**1.** *1 способ.* Если $n=1$, то ранг матрицы $A$ равен 1. Если $n=2$, то ранг матрицы $A$ равен 2. Покажем, что если $n>2$, то ранг матрицы $A$ также равен 2. Действительно, минор второго порядка, расположенный на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов, равен 2, а всякий минор порядка 3 равен нулю (минор порядка 3, расположенный на пересечении строк с номерами $a,b,c$ и столбцов с номерами $m,n,k$, равен $\begin{vmatrix} a+m & a+n & a+k \\ b+m & b+n & b+k \\ c+m & c+n & c+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+m & a+n & a+k \\ b-a & b-a & b-a \\ c-a & c-a & c-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+m & a+n & a+k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$).

*2 способ.* Если $n=1$, то ранг матрицы $A$ равен 1. Пусть $n>1$. Известно, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов матриц. Имеем $A=B+C$, где $B=(b_{ij}),\ C=(c_{ij}),\ b_{ij}=i, c_{ij}=j$. Так как ранги матриц $B$ и $C$ равны 1, то ранг матрицы $A$ не превосходит 2. Кроме того, минор второго порядка матрицы $A$, расположенный на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов, равен 2. Следовательно, ранг матрицы $A$ равен 2.

Ответ: 1, если $n=1$; 2, если $n>1$.

**2.** Пусть $A=10^n+1=p_1\ldots p_k, n-$нечетное число, $p_1,\ldots,p_k-$последовательные простые числа, $k>1$. Очевидно, что $A$ делится на 11, $n>1$. Так как $A$- нечетное число, не делящееся на 3 и 5, то $p_i\neq 2,3,5\,(i=1,\ldots,k)$. И так как $7\cdot 11\neq 10^n+1$, то $p_k\geq 13$, значит $10^n+1$ делится на 13, поэтому $10^{2n}-1$ делится на 13, следовательно, $n=3m$, $m\in\mathbf{N}$ (действительно, если $n=3m+1$, то $10^{2n}-1=10^{6m+2}-1=100(10^{6m}-1)+13\cdot 7+8$ не делится на 13, ибо $10^{6m}-1 \vdots 10^6-1, 10^6-1 \vdots 13$; аналогично получаем противоречие в случае $n=3m+2$). Итак, $A=10^{3m}+1=1000^m+1$, где $m-$нечетное число. Так как $A=1000^m+1=(37\cdot 27+1)^m+1\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 37)$, то $A$ не делится на 37, следовательно, $p_k<37$. И так как $A=1000^m+1 \vdots 1000+1, 1001=7\cdot 11\cdot 13$, то $p_1=7, p_2=11, p_3=13$. Числа $7\cdot 11\cdot 13\cdot 17,\ldots,7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot\ldots\cdot 29\cdot 31$ при делении на 100 не дают в остатке 1. Поэтому $k=3, 10^n+1=p_1p_2p_3=7\cdot 11\cdot 13=1001$. Следовательно, $n=3$.

Ответ: 3.

**3**. Поскольку

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx = [x=t^n] = n\int_0^1 t^{n-1}f(t)dt \leq n\int_0^1 f(t)dt,$$

то $c\leq n$. С другой стороны, при $f(x)=x^p$, $p>0$, получим

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx = \int_0^1 x^{p/n}\,dx = \frac{n}{n+p} \leq c\frac{1}{p+1} = c\int_0^1 x^p\,dx.$$

Поэтому для любого положительного р, выполнено неравенство $c\geq\frac{np+n}{n+p}$.

Откуда $c\geq \lim_{p\to+\infty}\frac{np+p}{n+p}=n$. Следовательно, $c=n$.

Ответ: $n$.

**4.** а) Сначала найдем число систем $\{B_1,\ldots,B_k\}$, таких, что $B_1\cap\ldots\cap B_k-$ пустое множество. Каждую систему можно однозначно описать матрицей из 0 и 1 размерами $k\times n$, в которой множеству $B_i$ отвечает $i$-ая строка – набор длины $n$ из нулей и единиц, представляющий характеристическую функцию $B_i$. Матрицы, соответствующие системам, для которых $B_1\cap\ldots\cap B_k-$ пустое множество, характеризуются тем, что у них нет столбцов, состоящих из одних единиц. Таких матриц $(2^k-1)^n$. Следовательно, $2^{nk}-(2^k-1)^n-$ искомое число.

b) Снова сопоставим множеству $B_i$ его характеристическую функцию – строку длины $n$, состоящую из нулей и единиц. Образуем из векторов $B_i$ матрицу Грама $G$. Условия на мощности $|B_i|$ и $|B_i \cap B_j|$ показывают, что все диагональные элементы этой матрицы – нечетные числа, а внедиагональные – четные. Отсюда $\det(G) \neq 0$, т.е. векторы $B_1, ..., B_k$ линейно независимы, следовательно, $k \leq n$.
Ответ: $2^{nk} - (2^k - 1)^n$.

**5**. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - \frac{f(1)}{2} x^2(x+1) + \frac{f(-1)}{2} x^2(x-1) + f(0)(x^2-1) + f'(0)x(x^2-1)$.
Очевидно, что $h(-1) = h(0) = h(1) = h'(0)$. Согласно обобщенной теореме Ролля, существует $\xi \in ]-1;1[$ такое, что $h'''(\xi) = 0$, следовательно, $f'''(\xi) = 3(f(1) - f(-1) - 2f'(0))$.

**6.** Пусть $x_n = \sqrt[3]{an^3 + bn^2 + cn + d}$. Если $a \neq 0$, то $\lim(x_n/n) = \lim(x_{n+1}/n) = \sqrt[3]{a}$, $\lim(x_{n+1} - x_n) =$ $\lim((x_{n+1}^3 - x_n^3)/(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2)) = \lim((3an^2 + (3a+2b)n + a + b + c)/(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2)) =$ $3a/(3\sqrt[3]{a^2}) = \sqrt[3]{a}$. Если $a = 0$, то аналогично получаем $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$. Итак, $\lim(x_{n+1} - x_n) = \sqrt[3]{a}$ для любого $a$. И так как $x_{n+1} - x_n \in \mathbf{Z}$, то $\sqrt[3]{a} \in \mathbf{Z}$ и существует натуральное число $k$, такое, что $x_{n+1} - x_n = \sqrt[3]{a}$ для любого $n \geq k$. Пусть $p = \sqrt[3]{a}, q = x_k - pk$ $(p, q \in \mathbf{Z})$, тогда для любого натурального значения $m \geq k+1$ имеем $x_m - x_k = (x_m - x_{m-1}) + ... + (x_{k+1} - x_k) = p + ... + p = p(m-k)$, т.е. $x_m = x_k + p(m-k) = pm + q$. Итак, $\sqrt[3]{am^3 + bm^2 + cm + d} = pm + q, am^3 + bm^2 + cm + d - (pm+q)^3 = 0$ для любого натурального значения $m \geq k+1$, т.е. многочлен $f(x) - (px+q)^3$ имеет бесконечно много различных корней, следовательно, $f(x) = (px+q)^3$.