Студенческая олимпиада по математике БГУ (2007 год)

1. Пусть $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=i+j \ (i,j=\overline{1,n})$. Найдите $rank(A)$.
2. Найдите все нечетные натуральные значения n, такие, что 10^n+1 является произведением нескольких (не менее двух) последовательных простых чисел.
3. Пусть F – множество непрерывных на $[0,1]$ функций f, $f:[0,1]\to[0,+\infty)$; $n-$некоторое натуральное число. Определите наименьшее значение постоянной c такой, что $\int\limits_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx \le c\int\limits_0^1 f(x)dx$ для любой функции $f\in F$.
4. Пусть $A-$ множество из n элементов ($n\in\mathbf{N}$).
   a) найдите число систем подмножеств $\{B_1,...,B_k\}$ множества A, таких, что $B_1\cap...\cap B_k$ - непустое множество;
   b) пусть $\{B_1,...,B_k\}$ – система подмножеств множества A, такая, что $|B_i|\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), |B_i\cap B_j|\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$ для любых $i,j=\overline{1,k}, i\ne j$. Докажите, что $k\le n$.
5. Функция $f:R\to R$ трижды дифференцируема.
   Докажите, что существует $a\in(-1,1)$, такое, что $f'''(a)=3(f(1)-f(-1)-2f'(0))$.
6. Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbf{Z}[x]$, причем $\sqrt[3]{f(n)}\in\mathbf{Z}$ для любого $n\in\mathbf{N}$. Докажите, что существуют целые числа p,q, такие, что $f(x)=(px+q)^3$.

Студенческая олимпиада по математике БГУ (2007 год)

1. Пусть $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=i+j \ (i,j=\overline{1,n})$. Найдите $rank(A)$.
2. Найдите все нечетные натуральные значения n, такие, что 10^n+1 является произведением нескольких (не менее двух) последовательных простых чисел.
3. Пусть F – множество непрерывных на $[0,1]$ функций f, $f:[0,1]\to[0,+\infty)$; $n-$некоторое натуральное число. Определите наименьшее значение постоянной c, такой, что $\int\limits_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx \le c\int\limits_0^1 f(x)dx$ для любой функции $f\in F$.
4. Пусть $A-$ множество из n элементов ($n\in\mathbf{N}$).
   a) найдите число систем подмножеств $\{B_1,...,B_k\}$ множества A, таких, что $B_1\cap...\cap B_k$ - непустое множество;
   b) пусть $\{B_1,...,B_k\}$ – система подмножеств множества A, такая, что $|B_i|\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2), |B_i\cap B_j|\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$ для любых $i,j=\overline{1,k}, i\ne j$. Докажите, что $k\le n$.
5. Функция $f:R\to R$ трижды дифференцируема.
   Докажите, что существует $a\in(-1,1)$, такое, что $f'''(a)=3(f(1)-f(-1)-2f'(0))$.
6. Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbf{Z}[x]$, причем $\sqrt[3]{f(n)}\in\mathbf{Z}$ для любого $n\in\mathbf{N}$. Докажите, что существуют целые числа p,q, такие, что $f(x)=(px+q)^3$.