Университетская студенческая олимпиада по математике

23 апреля 2009г.

Минск

1. На плоскости задано $n \geq 3$ различных точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Доказать, что существует простая замкнутая ломаная с вершинами в этих точках.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $P_1, P_2, \ldots, P_n$ заданные точки и пусть все точки лежат по одну сторону от прямой (P_1P_2) (такая прямая всегда существует). Обозначим α_i угол между прямыми (P_1P_2) и (P_1P_i), $i \geq 3$ и упорядочим их по возрастанию $0 < \alpha_{i_3} < < \alpha_{i_4} < \ldots < \alpha_{i_n} < \pi$. Ломаная $P_1P_2P_{i_3}\ldots P_{i_n}P_1$ – искомая.

2. Задан циклический определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}, \ a_i \in C.$$

а) Доказать, что многочлен $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ делится на $a_1 + a_2\varepsilon + \ldots + a_n\varepsilon^{n-1}$, $\varepsilon^n = 1$;
б) вычислить D, если $a_k = k$.

РЕШЕНИЕ. а)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2\varepsilon + \ldots + a_n\varepsilon^{n-1} & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n + a_1\varepsilon + \ldots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} + a_n\varepsilon + \ldots + a_{n-2}\varepsilon^{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 + a_3\varepsilon + \ldots + a_1\varepsilon^{n-1} & a_3 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$$

Все члены первого столбца пропорциональны, т.к. $\varepsilon^n = 1$ и каждый элемент получается из предыдущего умножением на ε.

Поэтому D делится на $a_1 + a_2\varepsilon + \ldots + a_n\varepsilon^{n-1} \Rightarrow D = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\varepsilon_k + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1})$.

б) $D = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1 + 2\varepsilon_k + \ldots + n\varepsilon_k^{n-1})$, $1 + 2\varepsilon + \ldots + n\varepsilon^{n-1} = (1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^n)' = = \left(\dfrac{\varepsilon^{n+1} - 1}{\varepsilon - 1}\right)' = \dfrac{n\varepsilon^{n+1} - (n+1)\varepsilon^n + 1}{(\varepsilon - 1)^2} \Rightarrow 1 + 2\varepsilon_k + \ldots + n\varepsilon_k^{n-1} = \dfrac{n}{\varepsilon_k - 1}$, $\varepsilon_k \neq 1$.
$D = (1 + 2 + \ldots + n)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{n}{\varepsilon_k - 1} = \dfrac{n^n(n+1)}{2} \cdot \dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(\varepsilon_k - 1)}$. Числа $\varepsilon_k - 1$ есть корни многочлена $(v+1)^n - 1 = v(v^{n-1} + \ldots + n) \Rightarrow \prod\limits_{k=1}^{n-1}(\varepsilon_k - 1) = (-1)^{n-1} \cdot n$. Следовательно, $D = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

3. Доказать, что уравнение относительно функции u

$$u(x) = 1 + \lambda \int\limits_x^1 u(y) \cdot u(y-x)dy$$

при $\lambda > \dfrac{1}{2}$ не имеет действительных решений, заданных на отрезке [0;1].

РЕШЕНИЕ. Пусть u – действительное решение уравнения на [0;1]. $\int\limits_0^1 u(x)dx = 1 + \lambda \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 u(y)u(y-x)dy = 1 + \lambda \int\limits_0^1 u(y)dy \int\limits_0^y u(y-x)dx =$ $= 1 + \lambda \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y u(x)dx \right) \cdot u(y)dy = 1 + \dfrac{\lambda}{2} \left(\int\limits_0^1 u(x)dx \right)^2$, т.е. $\lambda \left(\int\limits_0^1 u(x)dx \right)^2 - 2\int\limits_0^1 u(x)dx +$ $+2 = 0 \Rightarrow 1 - 2\lambda \geq 0,\ \lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

4. Пусть R – некоторое кольцо, причем множество $D_L(R)$ всех левых делителей нуля содержит ненулевые элементы и конечно. Доказать, что тогда и все кольцо R тоже конечно. (Элемент b называется левым делителем нуля, если для некоторого $a \in R$, $a \neq 0$ справедливо равенство $ba = 0$).

РЕШЕНИЕ. Выберем $b \in D_L(R) \setminus \{0\}$ и рассмотрим аддитивную подгруппу Rb группы R. Отображение $\varphi_b : R \to Rb,\ r \mapsto rb$ является эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом). $\mathrm{Ker}\varphi_b = \{x \in R, |xb = 0\}$. По теореме о гомоморфизме $R/\mathrm{Ker}\varphi_b \cong Rb$. Т.к. $\mathrm{Ker}\varphi_b \subset D_L(R)$, то $|\mathrm{Ker}\varphi_b| < \infty$. С другой стороны, имеем включение $Rb \subset D_L(R)$ и, значит, $|Rb| < \infty$. Поэтому $|R| = |Rb| \cdot |\mathrm{Ker}\varphi_b| < \infty$.

5. Пусть произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + ta_n),\ a_n \in R$ сходится хотя бы для двух ненулевых вещественных t. Доказать, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся.

РЕШЕНИЕ. Пусть произведение сходится при $t = \alpha$ и $t = \beta$. Тогда сходятся ряды $\sum \ln(1 + \alpha a_n)$ и $\sum \ln(1 + \beta a_n)$. $\ln(1 + ta_n) = ta_n - t^2 a_n^2 \left(\dfrac{1}{2} + 0(1) \right) \Rightarrow$ $\Rightarrow\ \alpha \ln(1 + \beta a_n) - \beta \ln(1 + a_n) = a_n^2 \left(\dfrac{\beta\alpha(\alpha - \beta)}{2} + 0(1) \right) \Rightarrow \sum a_n^2$ сходится, и т.к. $\sum \ln(1 + \alpha a_n)$ сходится, то $\sum a_n$ сходится.

6. Найти $\lim \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \ldots}}}}}$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \ldots}}}}$. Она удовлетворяет функциональному уравнению $f^2(x) = 1 + xf(x+1)$. Одно решение этого уравнения усматривается непосредственно $f(x) = x+1$. Оказывается, что это – единственное решение. Идея доказательства состоит в построении все более точных аппроксимаций вида $\alpha_n(x+1) \leq f(x) \leq \beta_n(x+1)$, в которых $\lim\alpha_n = \lim\beta_n = 1$. Для этого произведем оценку снизу: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \ldots}}} \leq f(x)$ или $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots} = x \leq f(x)$, откуда

$\frac{1}{2}(x+1) \le f(x)$ (для $x \ge 1$). Оценим $f(x)$ сверху:

$$f(x) \le \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\ldots}}} \le \sqrt{(x+1)\sqrt{2(x+1)\sqrt{4(x+1)\sqrt{8(x+1)\ldots}}}} =$$

$= A(x+1)$, где $A = \sqrt{1\sqrt{2\sqrt{4\ldots}}} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}} = 2^{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}} = 2$. $/\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{2^k}\quad|_{x=1} = \sum\limits_{1}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^k\right)'|_{x=1} = \left(\frac{x}{2-x}\right)'|_{x=1} = 2/$. Итак, $\frac{1}{2}(x+1) \le f(x) \le 2(x+1)$. Далее, $\frac{1}{2}(x+2) \le f(x+1) \le 2(x+2)$. Поскольку $f^2(x) = 1 + xf(x+1)$, для $f^2(x)$ получим $\frac{1}{2}(x+2)x+1 \le f^2(x) \le 2(x+2)x+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}(x+1) \le f(x) \le \sqrt{2}(x+1)$. Повторяя эти рассуждения k раз, получим $\sqrt[2^k]{\frac{1}{2}}(x+1) \le f(x) \le \sqrt[2^k]{2}(x+1)$. Переходя к пределу, находим $f(x) = x+1$. Отсюда, искомый предел равен $f(2) = 3$.