Университетская студенческая олимпиада по математике

23 апреля 2009г.

Минск

1. На плоскости задано $n \geq 3$ различных точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Доказать, что существует простая замкнутая ломаная с вершинами в этих точках.

2. Задан циклический определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \ a_i \in C.$$

а) Доказать, что многочлен $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ делится на $a_1 + a_2\varepsilon + \dots + a_n\varepsilon^{n-1}$, $\varepsilon^n = 1$;
б) вычислить D, если $a_k = k$.

3. Доказать, что уравнение относительно функции u

$$u(x) = 1 + \lambda \int_x^1 u(y) \cdot u(y-x)dy$$

при $\lambda > \dfrac{1}{2}$ не имеет действительных решений, заданных на отрезке [0;1].

4. Пусть R − некоторое кольцо, причем множество $D_L(R)$ всех левых делителей нуля содержит ненулевые элементы и конечно. Доказать, что тогда и все кольцо R тоже конечно. (Элемент b называется левым делителем нуля, если для некоторого $a \in R$, $a \neq 0$ справедливо равенство $ba = 0$).

5. Пусть произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + ta_n)$, $a_n \in R$ сходится хотя бы для двух ненулевых вещественных t. Доказать, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся.

6. Найти $\lim\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}}$.