Студенческая олимпиада БГУ по математике (2010г.)

1. По заданной последовательности (x_n) строим последовательность (y_n), $y_n = x_{n-1} + 2x_n$. Доказать, что если последовательность (y_n) сходится, то последовательность (x_n) также сходится.

2. Вычислить сумму
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2},$$
где x_i — корни многочлена $x^4 - x + 1$.

3. Функция $f \in C^1([a;+\infty[)$ удовлетворяет условию
$$(f'(x))^2 + f^3(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$
Доказать, что $f(x) \to 0$ и $f'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

4. Неотрицательная непрерывная функция $f : [a > 0; +\infty[\to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству
$$\int_a^x f(t)\,dt < \sqrt{x}, \quad \forall x \geq a.$$
Можно ли утверждать, что (a) интеграл $\int_a^\infty \frac{f(x)\,dx}{x}$ сходится;
(b) ряд $\sum_{n=[a]+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$ сходится?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы векторы $v_1, \ldots, v_n$, $||v_i|| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и матрица $\Gamma = [(v_i, v_j)]$. Доказать, что существует такая матрица A, все элементы которой равны ± 1, что норма линейного оператора $\Gamma - A$ удовлетворяет оценке $||\,\Gamma - A|| \leq n$.

6. Пусть H — собственная подгруппа конечной группы G, т.е. $H \neq G$. Показать, что $G \neq \bigcup_{a\in G} \varphi_a(H)$, где $\varphi_a(H) = aHa^{-1}$.

Студенческая олимпиада БГУ по математике (2010г.)

1. По заданной последовательности (x_n) строим последовательность (y_n), $y_n = x_{n-1} + 2x_n$. Доказать, что если последовательность (y_n) сходится, то последовательность (x_n) также сходится.

2. Вычислить сумму
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2},$$
где x_i — корни многочлена $x^4 - x + 1$.

3. Функция $f \in C^1([a; +\infty[)$ удовлетворяет условию
$$(f'(x))^2 + f^3(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$
Доказать, что $f(x) \to 0$ и $f'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

4. Неотрицательная непрерывная функция $f : [a > 0; +\infty[\to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству
$$\int\limits_a^x f(t)\,dt < \sqrt{x}, \quad \forall x \geq a.$$
Можно ли утверждать, что (a) интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{f(x)\,dx}{x}$ сходится;
(b) ряд $\sum\limits_{n=[a]+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$ сходится?

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы векторы $v_1, \ldots, v_n$, $||v_i|| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и матрица $\Gamma = [(v_i, v_j)]$. Доказать, что существует такая матрица A, все элементы которой равны ± 1, что норма линейного оператора $\Gamma - A$ удовлетворяет оценке $||\,\Gamma - A|| \leq n$.

6. Пусть H — собственная подгруппа конечной группы G, т.е. $H \neq G$. Показать, что $G \neq \bigcup\limits_{a \in G} \varphi_a(H)$, где $\varphi_a(H) = aHa^{-1}$.

Студенческая олимпиада БГУ по математике (2010г.)

1. По заданной последовательности (x_n) строим последовательность (y_n), $y_n = x_{n-1} + 2x_n$. Доказать, что если последовательность (y_n) сходится, то последовательность (x_n) также сходится.

Решение. Обозначим $b = \lim y_n$ и $a = b/3$. Докажем, что $\lim x_n = a$.

$$\varepsilon \geq |y_n - b| = |2(x_n - a) + (x_{n-1} - a)| \geq 2|x_n - a| - |x_{n-1} - a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n - a| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}|x_{n-1} - a| \leq \cdots \leq \varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - a|,$$

откуда следует требуемый результат.

2. Вычислить сумму $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2}$, где x_i — корни многочлена $x^4 - x + 1$.

Решение. $$\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$P(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_4), \quad P'(x) = (x-x_2)\cdots(x-x_4) + \cdots + (x-x_1)\cdots(x-x_3).$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i-1} = -\frac{P'(1)}{P(1)}, \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(x_i-1)^2} = -\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)'(1), \quad x_i \neq 1.$$

Ответ. $-\frac{13}{3}$.

3. Функция $f \in C^1([a;+\infty[)$ удовлетворяет условию $(f'(x))^2 + f^3(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Доказать, что $f(x) \to 0$ и $f'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Решение. Обозначим $N = \{x | f'(x) = 0\}$.

а) $\sup N = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in N}} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\lambda_\varepsilon \ \forall x \geq \lambda_\varepsilon, \ x \in N \quad |f(x)| \leq \varepsilon.$

Предположим $\exists y, \ x_1 < y < x_2, \ \lambda_\varepsilon \leq x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in N, \ |f(y)| > \varepsilon$. Тогда

$\max\limits_{x\in[x_1,x_2]} |f(x)| = |f(\bar{x})| \geq |f(y)| > \varepsilon$ и $\bar{x} \in N \Rightarrow |f(\bar{x})| \leq \varepsilon$. (?!) Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

б) $\sup N = x_0 < +\infty \Rightarrow$ функция f строго монотонна на $[x_0; +\infty[\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \leq 0$.

Предположим $A < 0 \Rightarrow (f'(x))^2 \geq \frac{1}{2}(-f(x))^3 \Rightarrow |f'(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|f|^{3/2} \Rightarrow \frac{d|f|}{|f|^{3/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}dx$ и т.д. (?!) Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. Неотрицательная непрерывная функция $f : [a > 0; +\infty[\to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^x f(t)\,dt < \sqrt{x}, \quad \forall x \geq a.$$

Можно ли утверждать, что: (a) интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{f(x)\,dx}{x}$ сходится; (b) ряд $\sum\limits_{n=[a]+1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$ сходится?

Решение. (a) Можно. Рассмотрим функцию $g(t) := \int\limits_0^t f(x)\,dx; \ 0 \leq g(t) \leq \sqrt{t}$.

$$\int_0^M \frac{f(t)}{t+1}dt = \int_0^M \frac{g'(t)}{t+1}dt = \int_0^M \frac{dg(t)}{t+1} = \frac{g(t)}{t+1}\bigg|_0^M + \int_0^M g(t)\frac{dt}{(t+1)^2}.$$

$$\frac{g(t)}{t+1}\Big|_0^M \leq \frac{\sqrt{t}}{t+1}\Big|_0^M \xrightarrow[M\to\infty]{} 0. \qquad \int\limits_0^M \frac{g(t)}{(t+1)^2}dt \leq \int\limits_0^M \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt \xrightarrow[M\to\infty]{} \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt \in \mathbb{R}.$$

(b) Нельзя. Примером тому является ломаная с узловыми точками $(n-\frac{1}{2n^2};0)$, $(n,1)$, $(n+\frac{1}{2n^2};0)$, $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы векторы $v_1,\dots,v_n$, $||v_i||=1$, $i=1,\dots,n$, и матрица Грама $\Gamma=[(v_i,v_j)]$. Доказать, что существует такая матрица A, все элементы которой равны ±1, что норма линейного оператора $\Gamma-A$ удовлетворяет оценке $||\,\Gamma-A||\leq n$.

Решение. Очевидно, что для $\forall i,j\in\{1,...,n\}$ имеем $(v_i,v_j)\in[-1,1]$. Если фиксировать некоторый порядок пересчета элементов матриц Γ, A, то на них можно смотреть как на векторы из $\mathbb{R}^{n^2}$. При этом матрицу A можно интерпретировать как некоторую вершину n^2- мерного куба $[-1,1]\times\dots\times[-1,1]$. Ясно, что самой удаленной точкой куба $[-1,1]^{n^2}$ от множества его вершин является его центр — начало координат. Поэтому для любой точки $\Gamma\in[-1,1]^{n^2}$ найдется некоторая вершина A, удаленная от Γ не более чем на $\sqrt{(1-0)^2+\dots+(1-0)^2}=n$. Докажем, что

$$||\,\Gamma-A||=\sup_{||x||_{\mathbb{R}^n}=1}||\,(\Gamma-A)x||\leq||\,\Gamma-A||_{\mathbb{R}^{n^2}}.$$

Действительно, для любого линейного оператора $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ имеем:

$$||Bx||_{\mathbb{R}^n}=\sqrt{(\sum_{j=1}^n b_{1j}x_j)^2+(\sum_{j=1}^n b_{2j}x_j)^2+\dots+(\sum_{j=1}^n b_{nj}x_j)^2}\leq[\text{нер-во Коши}-\text{Буняковского}]\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_j b_{1j}^2\sum_j x_j^2+\dots+\sum_j b_{nj}^2\sum_j x_j^2}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2}\sqrt{x_j^2}=||B||_{\mathbb{R}^{n^2}}||x||=||B||_{\mathbb{R}^{n^2}}.$$

6. Пусть H — собственная подгруппа конечной группы G, т.е. $H\neq G$. Показать, что $G\neq\bigcup\limits_{a\in G}\varphi_a(H)$, где $\varphi_a(H)=aHa^{-1}$.

Решение. Так как каждая собственная подгруппа содержится в некоторой максимальной подгруппе, то можно считать, что H — максимальная подгруппа в G. Обозначим $N_G(H)=\{a\in G\mid\varphi_a(H)=H\}$ (нормализатор подгруппы H в G). Ввиду того, что $N_G(H)$ является подгруппой группы G, содержащей H, то либо $N_G(H)=G$, либо $N_G(H)=H$. В первом случае H является номальным делителем G, так что $\bigcup\limits_{a\in G}\varphi_a(H)=H\neq G$.

Разберем подробнее второй случай $N_G(H)=H$. Пусть $|G|=n$, $|H|=m$, $|G:H|=k$ (индекс подгруппы H в G — число смежных классов aH, $a\in G$). Тогда m делит n и $n=km$. Обозначим через X множество всех сопряженных с H подгрупп. Известно, что число сопряженных подгрупп с данной подгруппой равно индексу ее нормализатора, поэтому $|X|=k$. Если предположить, что $G=\bigcup\limits_{a\in G}\varphi_a(H)$, то имели бы цепочку соотношений:

$$|G|\leq\sum_{K\in X}(|K|-1)+1=(m-1)k+1=mk-k+1=n-k+1,$$

откуда $k=1$ и получим противоречие.