СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

БГУ, 11 апреля 2012г.

1. а) Отображения $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ являются инъективными. Доказать, что отображение $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, h = f \cdot g$ не может быть сюръективным.

б) Пусть $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – сюръекция. Доказать, что существуют такие сюръекции $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, что $h = f \cdot g$.

2. Строку матрицы назовем перестановочной, если любая перестановка элементов строки не меняет величины определителя матрицы. Доказать, что матрица с двумя перестановочными строками является вырожденной.

3. Дифференцируемые функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)\cdot f(y) - g(x)\cdot g(y) \\ g(x+y) &= f(x)\cdot g(y) + g(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

при всех x и y. Найти множество значений функции $f^2 + g^2$ при условии, что $f'(0) = 0$.

4. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходящийся ряд с положительными членами. Можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{b_n}$ сходится, если

1) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$; 2) $b_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$?

5. Задана непрерывная функция $f : [0, 1] \to (0; +\infty)$. Для любого $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ рассматриваем такое разбиение $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$ отрезка $[0, 1]$, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \ldots = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f(t_k)}}$.

6. Пусть конечная группа G содержит m элементов, а ее собственная подгруппа H содержит n элементов. Для каждого $x \in G$ обозначим

$$H^x = \{xhx^{-1} | h \in H\}.$$

Известно, что для всех $x \in G \setminus H$ выполнено условие $H^x \cap H = \{e\}$, где e – единица G. Найти число элементов множества $\bigcup\limits_{x\in G} H^x$ как функцию от m и n.

РЕШЕНИЯ

1) а) Равенства $h(a) = 1$ и $h(b) = -1$ противоречат инъективности f или g.

б) Если $h(a_n) = n^2, h(b_n) = -n^2, h(c_n) = n(n+1)$, то полагаем

$$f(m) = \begin{cases} n, m = a_n \\ -n, m = b_n \\ -(n+1), m = c_n \\ h(m) \text{в остальных точках}, \end{cases} \qquad g(m) = \begin{cases} n, m = a_n \\ n, m = b_n \\ -n, m = c_n \\ 1 \text{ в остальных точках}. \end{cases}$$

2. Нетрудно доказать, что строка матрицы является перестановочной тогда и только тогда, если все элементы строки равны между собой, либо совпадают все алгебраические дополнения элементов строки. Для матрицы с двумя перестановочными строками возможны следующие ситуации:

а) две строки постоянные;

б) две строки имеют постоянные алгебраические дополнения;

в) одна строка постоянная, алгебраические дополнения элементов другой строки постоянные.

Все три случая приводят к равенству нулю определителя матрицы.

3. Дифференцируя тождества по y и полагая $y = 0$, получим

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0) - g(x) \cdot g'(0)$$
$$g'(x) = f(x) \cdot g'(0) + g(x) \cdot f'(0),$$

откуда

$$\big(f^2(x) + g^2(x)\big)' = 2f'(0) \cdot \big(f^2(x) + g^2(x)\big),$$
$$f^2 + g^2 = \mathrm{Const} = f^2(0) + g^2(0).$$
$$\begin{cases} f(0) = f^2(0) - g^2(0) \\ g(0) = 2f(0)g(0) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(0) = f(0) = 0 \\ g(0) = 0, f(0) = 1 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{0\}$ или $\{1\}$.

4. 1) Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{b_n}$ сходится. Если $a_n \geq \frac{1}{2^{n+1}}$, то $a_n^{b_n} = \frac{a_n}{\sqrt[n+1]{a_n}} \leq 2a_n$. Если $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, то $a_n^{b_n} \leq \frac{1}{2^n}$. Следовательно, $a_n^{b_n} \leq \max\{2a_n, 2^{-n}\} < 2a_n + 2^{-n}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n + 2^{-n})$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{b_n}$ сходится.

2) Пусть $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ при $n \geq 2$ (a_1 – произвольное), $a_n^{b_n} = \frac{1}{n}$, тогда $b_n = -\log_{a_n} n = -\frac{\ln n}{\ln a_n} = \frac{\ln n}{\ln(n\ln^2 n)} = \frac{\ln n}{\ln n + 2\ln\ln n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$. При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{b_n}$ расходится. Ответ: а) да; б) нет.

5. Строим функцию $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Функция F непрерывно дифференцируема и строго возрастает. Обозначим $A = \int\limits_0^1 f(t)dt$. $F(t_k) = \frac{kA}{n}$, $t_k = F^{-1}\Big(\frac{kA}{n}\Big)$, $f(t_k) = f\Big(F^{-1}(\frac{kA}{n})\Big) = F'\Big(F^{-1}(\frac{kA}{n})\Big)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f(t_k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(F^{-1}\Big)'\Big(\frac{kA}{n}\Big)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum \frac{1}{f(t_k)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum \big(F^{-1}\big)'\big(\frac{kA}{n}\big)} = \frac{A}{\int\limits_0^A \big(F^{-1}\big)'(t)dt} = \frac{A}{F^{-1}(A) - F^{-1}(0)} = A.$$

Ответ: A.

6. Пусть $\mathbf{H} = \{H^x | x\}$. Рассмотрим функцию $f : G \to \mathbf{H}, f(x) = H^x$. Покажем, что условие $f(x) = f(y)$ или $H^x = H^y$ эквивалентно условию $x^{-1}y \in H$. Пусть $H^x = H^y$. Тогда для любого $h \in H$ существует такой $h_1 \in H$, что $xhx^{-1} = yh_1y^{-1}$. Отсюда

$$h = x^{-1}yh_1(x^{-1}y)^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}y}.$$

По условию отсюда следует $x^{-1}y \in H$. Обратно, если $h \in H$, то $yhy^{-1} = x\big((x^{-1}y)h(x^{-1}y)^{-1}\big)x^{-1} \in H^x$. Следовательно, $h^y \subseteq H^x$. Аналогично получаем $H^x \subseteq H^y$. Покажем, что если для $x, y \in G$ выполняется $H^x \neq H^y$, то $H^x \cap H^y = \{e\}$. Действительно, пусть $z = xhx^{-1} = yh'y^{-1} \in H^x \cap H^y$. Так как $x^{-1}y \in G \setminus H$, то $h = x^{-1}yh'(x^{-1}y)^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}y} = \{e\}$, откуда $z = e$, и мы получаем $H^x \cap H^y = \{e\}$. Возвращаясь к функции f и записывая условие $x^{-1}y \in H$ в виде $y \in xH$, видим, что f отображает каждый смежный класс xH в один элемент . Поэтому $\mathbf{H}$ состоит из $k = \dfrac{m}{n}$ элементов: $\mathbf{H} = \{H^{x_1}, \ldots, H^{x_k}\}$. Поскольку $H^{x_i} \cap H^{x_j} = \{e\}$ для всех $i \neq j$, получаем

$$\big|\bigcup_{x \in G} H^x\big| = \big|\bigcup_{i=1}^{k} H^{x_i}\big| = k(n-1) + 1 = m - \frac{m}{n} + 1.$$

Ответ: $m - \dfrac{m}{n} + 1$.