Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 19 − 21 мая 2006 года

Решения (Группа B)

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+(tgx)^{\sqrt{3}}}$.

◊ **Ответ:** $\dfrac{\pi}{4}$. Имеем

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt3}}=[t=\pi/2-x]=-\int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{dt}{1+(\mathrm{ctg}t)^{\sqrt3}}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\mathrm{tg}t)^{\sqrt3}}{1+(\mathrm{tg}t)^{\sqrt3}}dt=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\mathrm{tg}x)^{\sqrt3}}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt3}}dx.$$

Откуда $I+I=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{1}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt3}}dx+\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{(\mathrm{tg}x)^{\sqrt3}}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt3}}dx=\int\limits_0^{\pi/2}dx=\dfrac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad I=\dfrac{\pi}{4}$. ■

2. Вычислите A^{200}, если $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

◊ **Ответ:** $\begin{pmatrix}1&-200&200\\-200&19901&-19900\\-200&19900&-19899\end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу $B=A-E$, где E — единичная матрица. Имеем

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$A^{200}(E+B)^{200}=E+200B+\frac{200\cdot199}{2}B^2=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+200\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+19900\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-200&200\\-200&19901&-19900\\-200&19900&-19899\end{pmatrix}.\ ■$$

3. Найдите $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{d^{2006}}{dx^{2006}}\left(\dfrac{\sin^2x}{x^2}\right)$.

◊ Ответ: $-\dfrac{2^{1003}}{2007\cdot2008}$.

Воспользуемся разложением функции $\sin^2x$ в ряд Тейлора:

$$\sin^2x=\frac12(1-\cos2x)=\frac12\left(1-\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)\,!}\right)\right)=\frac12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2x)^{2k}}{(2k)\,!}.$$

Поэтому $\dfrac{\sin^2x}{x^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}2^{k-1}x^{2k-2}}{(2k)\,!}=P(x)+\dfrac{(-1)^{1005}2^{1003}x^{2006}}{2008\,!}+x^{2007}f(x)$, где $P(x)$ — полином степени 2005, $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Легко видеть, что $(P(x))^{(2006)}\equiv0$ и $(x^{2007}f(x))^{(2006)}|_{x=0}=0$ (последнее равенство следует из того, что $x=0$ — ноль 2007 порядка для функции $x^{2007}f(x)$). Поэтому $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{d^{2006}}{dx^{2006}}\left(\dfrac{\sin^2x}{x^2}\right)=-\dfrac{2^{1003}2006\,!}{2008\,!}=-\dfrac{2^{1003}}{2007\cdot2008}$. ■

4. Найдите такие функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что для всех действительных x выполнены равенства

$$\begin{cases} (f(x))^3 - 3f(x)(g(x))^2 = \cos 3x, \\ 3(f(x))^2 g(x) - (g(x))^3 = \sin 3x. \end{cases}$$

$\diamondsuit$ Ответ: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение, умноженное на i:

$$(f(x))^3 + 3i\,(f(x))^2\,g(x) - 3f(x)\,(g(x))^2 - i\,(g(x))^3 = \cos 3x + i\sin 3x \quad\Longleftrightarrow\quad (f(x)+ig(x))^3 = e^{3ix}.$$

Поэтому $f(x)+ig(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, и так как обе функции действительнозначные, то $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Непосредственная проверка показывает, что обе найденные функции удовлетворяют исходной системе. ■

5. Найдите наименьший объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью, касательной к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$\diamondsuit$ **Ответ:** $V_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$. Не нарушая общности, считаем $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; кроме того, в силу симметрии, можно считать, что точка касания (x_0, y_0, z_0) находится в первом октанте. Вектор нормали к касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид $N = \left(\dfrac{2x_0}{a^2}, \dfrac{2y_0}{b^2}, \dfrac{2z_0}{c^2}\right)$. Поэтому уравнение касательной плоскости в этой точке

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y-y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z-z_0) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Следовательно, объем полученного тетраэдра равен

$$V(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0} \quad\Longrightarrow$$

$$V^2(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{36}a^2b^2c^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}\right)^{-1} \geq \left[\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{36}a^2b^2c^2\frac{3^3}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)^3} = \frac{3}{4}a^2b^2c^2 \quad\Longrightarrow\quad V(x_0,y_0,z_0) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

Равенство достигается при $\dfrac{x_0}{a^2} = \dfrac{y_0}{b^2} = \dfrac{z_0}{c^2} = \dfrac{1}{3}$, т.е. при $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}b$, $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}c$. ■

6. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, удовлетворяет условию $|f(x)| \leq 1$ при всех $x \in [-1, 1]$.
Докажите, что $|f'(x)| \leq 4$ при всех $x \in [-1, 1]$.
$\diamondsuit$ Не нарушая общности, считаем $a \geq 0$, $b \geq 0$.
При $a > 0$ имеем

$$\max_{|x|\leq 1}|f'(x)| = \max_{|x|\leq 1}|2ax+b| = \max\{2a+b, -2a+b\} = 2a+b. \tag{1}$$

Кроме того,

$$\max_{|x|\leq 1}|f(x)| \leq 1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} f(1) \leq 1, \\ f(0) \geq -1, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a+b+c \leq 1, \\ c \geq -1, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad a+b \leq 2 \quad\Longrightarrow\quad a \leq 2.$$

Тогда из (1) получаем $\max\limits_{|x|\leq 1}|f'(x)| = 2a+b = a+(a+b) \leq 4$.

Если же $a = 0$, то

$$|f'(x)| = |b| = |\frac{f(1)-f(-1)}{2}| \leq \frac{1}{2}\left(|f(1)| + |f(-1)|\right) \leq 1.$$

Заметим, что требуемая оценка для производной f' достижима, например, при $f(x) = 2x^2 - 1$. ■