Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 11 – 13 мая 2006 года

Решения (Группа А)

1. Исследуйте сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \int\limits_0^{1/n} \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x+1}dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

$\diamondsuit$ В силу непрерывности подынтегральной функции $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Выделим главную часть a_n степенного вида Cn^α. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{Cn^\alpha} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\int\limits_0^{1/y}\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x+1}dx}{Cy^\alpha} = [\text{правило Лопиталя}] = \lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{1/y}}{1/y+1}(-1/y^2)}{C\alpha y^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} -\frac{1}{C\alpha y^{\alpha-1}y^{5/2}} = [\alpha = -3/2, C = 2/3] = 1.$$

Следовательно, $a_n \sim \dfrac{2}{3}n^{-3/2}$, и поэтому исходный ряд сходится. $\blacksquare$

2. Последовательность (x_n) такова, что $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}$ для всех $n \geq 1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

$\diamondsuit$ Ответ: 1. Так как $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 1 + \dfrac{1}{4x_n^2}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2 + 1 + \dfrac{1}{4x_i^2}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + n + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{4x_i^2}$, откуда, учитывая, что $x_1 = 1$, получаем $x_{n+1}^2 = n + 1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{4x_i^2}$, т.е. $x_n > n$ при всех $n \geq 1$. Поэтому $n < x_n^2 = n + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{4x_i^2} < n + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{4i}$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i} = \alpha + \ln(n-1) + \varepsilon_n$, где α – постоянная Эйлера, $\varepsilon_n \to 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{x_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2}{n}} = \sqrt{1} = 1.$$

3. Нормой $\|P\|$ многочлена P назовем сумму модулей его коэффициентов. Найдите

$$\max_E \frac{\|P^{(n)}\|}{\|P\|}, \quad \text{где} \quad E = \{P \mid \deg P = n > 0, P(1) = 0\}.$$

$\diamondsuit$ Ответ: $n!/2$. Пусть $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. Так как $P(1) = a_0 + a_1 + ... + a_n = 0$, то $\dfrac{\|P^{(n)}\|}{\|P\|} =$ $= \dfrac{n!|a_n|}{\sum\limits_{i=0}^{n}|a_i|} = \dfrac{n!|a_n|}{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i| + |\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|}$. Заметим, что имеет место неравенство $\dfrac{|a_n|}{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i| + |\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|} \leq \dfrac{1}{2}$. Действительно, при $n = 1$ получаем равенство, а при $n > 1$ это неравенство равносильно неравенству $|a_n| - \sum\limits_{i=1}^{n-1}|a_i| \leq$ $\leq |\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|$, которое верно, поскольку $|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i| \geq |a_n| - |a_1 + ... + a_{n-1}| \geq |a_n| - (|a_1| + ... + |a_{n-1}|)$. Осталось заметить, что равенство $1/2$ достигается, например, при $a_1 = ... = a_{n-1} = 1$, $a_n = 1 - n$. $\blacksquare$

4. Действительная $n \times n$ матрица A такова, что $A^{p+1} = A$ для некоторого натурального $p \geq 2$. E – единичная $n \times n$ матрица. Докажите, что

а) $\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(E - A^p) = n$; б) $\operatorname{rank}(E - A) = ... = \operatorname{rank}(E - A^{p-1})$, если p – простое число.

$\diamondsuit$ а) В силу неравенства Сильвестра $0 = \operatorname{rank}(A(E - A^p)) \geq \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(E - A^p) - n$, откуда $\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(E - A^p) \leq n$. С другой стороны, $\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(E - A^p) \geq \operatorname{rank}A^p + \operatorname{rank}(E - A^p) \geq \operatorname{rank}(A^p + E - A^p) = n$. Следовательно, $\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(E - A^p) = n$.

б) Заметим, что, если $k, m \in \mathbb{N}$ и $k|m$, то $E - A^m = (E - A^k)P(A)$, где P – некоторый многочлен. Поэтому $\operatorname{rank}(E - A^k) \geq \operatorname{rank}(E - A^m)$. Если p – простое число, то для любого k, $1 \leq k \leq p - 1$, остатки от деления на k чисел $p+1, 2p+1, ..., kp+1$ попарно различны. Поэтому среди них есть число $t = qp+1$, кратное k. Тогда $\operatorname{rank}(E-A) \geq \operatorname{rank}(E-A^k) \geq \operatorname{rank}(E-A^t) = \operatorname{rank}(E-A^{qp+1}) = \operatorname{rank}(E-A)$.

Замечание. Возможно решение с использованием жордановой формы матрицы A.

5. Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$. Известно, что существует последовательность многочленов $(P_n(x))$ степени не выше k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |f(x) - P_n(x)|dx = 0$. Докажите, что

а) для любого $x \in [0,1]$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$; б) $f(x)$ – многочлен.

$\diamondsuit$ а) Для любого m, $0 \leq m \leq k$, имеем

$$0 \leq \left| \int\limits_0^1 x^m (f(x) - P_n(x))dx \right| \leq \int\limits_0^1 x^m |f(x) - P_n(x)|dx \leq [0 \leq x \leq 1] \leq \int\limits_0^1 |f(x) - P_n(x)|dx.$$

Следовательно, $|\int\limits_0^1 x^m (f(x) - P_n(x))dx| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$, откуда

$$\int\limits_0^1 x^m P_n(x)dx \to \int\limits_0^1 x^m f(x)dx \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad m = 0,1,...,k. \tag{1}$$

Пусть $\alpha_n = (a_k^n, a_{k-1}^n, ..., a_0^n)^T$, где a_i^n $(i = 0, ..., k)$ – коэффициенты многочленов $P_n(x)$,

$$b = \left(\int\limits_0^1 x^0 f(x)dx, \int\limits_0^1 x^1 f(x)dx, ..., \int\limits_0^1 x^k f(x)dx \right)^T, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+1} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2k+1} & \frac{1}{2k} & \cdots & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение (1) примет вид $A\alpha_n \to b$ при $n \to \infty$, откуда в силу невырожденности матрицы A имеем $\alpha_n \to A^{-1}b = \alpha^*$ при $n \to \infty$, что и означает сходимость на $[0,1]$ последовательности многочленов P_n к многочлену P^*, коэффициентами которого являются координаты вектора α^*.

б) Так как $0 \leq \int\limits_0^1 |f(x) - P^*(x)|dx \leq \int\limits_0^1 |f(x) - P_n(x)|dx + \int\limits_0^1 |P_n(x) - P^*(x)|dx \to 0$ при $n \to \infty$, то $\int\limits_0^1 |f(x) - P^*(x)|dx = 0$. В силу непрерывности f и P^* это равносильно равенству $f(x) = P^*(x)$ для всех $x \in [0,1]$. ■

6. A – постоянная $n \times n$ матрица, все элементы которой являются неотрицательными действительными числами. Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ – некоторое решение системы линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Докажите, что если $x(t) \to (0,0,...,0)^T$ при $t \to +\infty$, то функции $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ линейно зависимы над полем действительных чисел.

$\diamondsuit$ Так как $\mathrm{Sp}A^T \geq 0$, то существует такое собственное значение λ матрицы A^T, что $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Пусть a – собственный вектор матрицы A^T, соответствующий собственному значению λ, т.е. $A^T a = \lambda a$. Рассмотрим функцию $F(t) = a^T x(t)$. Имеем

$$\frac{dF(t)}{dt} = a^T \frac{dx(t)}{dt} = a^T A x(t) = (A^T a)^T x(t) = \lambda a^T x(t) = \lambda F(t) \quad \Longrightarrow \quad F(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Так как $x(t) \to (0,0,...,0)^T$ при $t \to +\infty$, то $F(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а так как $e^{\lambda t} \nrightarrow 0$ ($|e^{\lambda t}| = e^{\mathrm{Re}\lambda t}$), то $C = 0$. Следовательно, $F(t) \equiv 0$. Требуемая линейная зависимость над полем действительных чисел следует теперь из действительности всех функций $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$, и отличию от нулевого вектора или $\mathrm{Re}\, a$, или $\mathrm{Im}\, a$. ■