

# Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 19 – 21 мая 2006 года

## Решения (Группа В)

1. Вычислите интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}}$ .

◇ Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ . Имеем

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}} = [t = \pi/2 - x] = - \int_{\pi/2}^0 \frac{dt}{1 + (\operatorname{ctgt})^{\sqrt{3}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{tgt})^{\sqrt{3}}}{1 + (\operatorname{tgt})^{\sqrt{3}}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}}{1 + (\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}} dx.$$

Откуда  $I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}}{1 + (\operatorname{tg}x)^{\sqrt{3}}} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \implies I = \frac{\pi}{4}$ . ■

2. Вычислите  $A^{200}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

◇ Ответ:  $\begin{pmatrix} 1 & -200 & 200 \\ -200 & 19901 & -19900 \\ -200 & 19900 & -19899 \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим матрицу  $B = A - E$ , где  $E$  — единичная матрица. Имеем

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$A^{200}(E + B)^{200} = E + 200B + \frac{200 \cdot 199}{2} B^2 = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 200 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 19900 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 200 \\ -200 & 19901 & -19900 \\ -200 & 19900 & -19899 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

3. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2006}}{dx^{2006}} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right)$ .

◇ Ответ:  $-\frac{2^{1003}}{2007 \cdot 2008}$ .

Воспользуемся разложением функции  $\sin^2 x$  в ряд Тейлора:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} \right) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2x)^{2k}}{(2k)!}.$$

Поэтому  $\frac{\sin^2 x}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{k-1} x^{2k-2}}{(2k)!} = P(x) + \frac{(-1)^{1005} 2^{1003} x^{2006}}{2008!} + x^{2007} f(x)$ , где  $P(x)$  — полином степени 2005,  $f(x)$  — бесконечно дифференцируемая на  $\mathbb{R}$  функция. Легко видеть, что  $(P(x))^{(2006)} \equiv 0$  и  $(x^{2007} f(x))^{(2006)}|_{x=0} = 0$  (последнее равенство следует из того, что  $x = 0$  — ноль 2007 порядка для функции  $x^{2007} f(x)$ ). Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2006}}{dx^{2006}} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = -\frac{2^{1003} 2006!}{2008!} = -\frac{2^{1003}}{2007 \cdot 2008}$ . ■

4. Найдите такие функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что для всех действительных  $x$  выполнены равенства

$$\begin{cases} (f(x))^3 - 3f(x)(g(x))^2 = \cos 3x, \\ 3(f(x))^2g(x) - (g(x))^3 = \sin 3x. \end{cases}$$

◇ Ответ:  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$ . Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение, умноженное на  $i$ :

$$(f(x))^3 + 3i(f(x))^2g(x) - 3f(x)(g(x))^2 - i(g(x))^3 = \cos 3x + i \sin 3x \iff (f(x) + ig(x))^3 = e^{3ix}.$$

Поэтому  $f(x) + ig(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , и так как обе функции действительнзначные, то  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$ . Непосредственная проверка показывает, что обе найденные функции удовлетворяют исходной системе. ■

5. Найдите наименьший объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью, касательной к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

◇ Ответ:  $V_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$ . Не нарушая общности, считаем  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ; кроме того, в силу симметрии, можно считать, что точка касания  $(x_0, y_0, z_0)$  находится в первом октанте. Вектор нормали к касательной плоскости в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид  $N = \left( \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right)$ . Поэтому уравнение касательной плоскости в этой точке

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Следовательно, объем полученного тетраэдра равен

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{b^2}{y_0} \cdot \frac{c^2}{z_0} \implies \\ V^2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{36} a^2 b^2 c^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} \cdot \frac{y_0^2}{b^2} \cdot \frac{z_0^2}{c^2} \right)^{-1} \geq \left[ \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{36} a^2 b^2 c^2 \frac{3^3}{\left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right)^3} = \frac{3}{4} a^2 b^2 c^2 \implies V(x_0, y_0, z_0) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} abc. \end{aligned}$$

Равенство достигается при  $\frac{x_0}{a^2} = \frac{y_0}{b^2} = \frac{z_0}{c^2} = \frac{1}{3}$ , т.е. при  $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ,  $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}b$ ,  $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}c$ . ■

6. Функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет условию  $|f(x)| \leq 1$  при всех  $x \in [-1, 1]$ . Докажите, что  $|f'(x)| \leq 4$  при всех  $x \in [-1, 1]$ .

◇ Не нарушая общности, считаем  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ .

При  $a > 0$  имеем

$$\max_{|x| \leq 1} |f'(x)| = \max_{|x| \leq 1} |2ax + b| = \max\{2a + b, -2a + b\} = 2a + b. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\max_{|x| \leq 1} |f(x)| \leq 1 \implies \begin{cases} f(1) \leq 1, \\ f(0) \geq -1, \end{cases} \implies \begin{cases} a + b + c \leq 1, \\ c \geq -1, \end{cases} \implies a + b \leq 2 \implies a \leq 2.$$

Тогда из (1) получаем  $\max_{|x| \leq 1} |f'(x)| = 2a + b = a + (a + b) \leq 4$ .

Если же  $a = 0$ , то

$$|f'(x)| = |b| = \left| \frac{f(1) - f(-1)}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (|f(1)| + |f(-1)|) \leq 1.$$

Заметим, что требуемая оценка для производной  $f'$  достижима, например, при  $f(x) = 2x^2 - 1$ . ■