Республиканская
студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 19 21 мая 2006 года

Группа А

1. Исследуйте сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{7} + \frac{2\,!}{3^2} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3\,!}{4^3} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4\,!}{5^4} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^4 + \ldots$$

2. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что несобственные интегралы $\int\limits_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$, $\int\limits_0^{+\infty} (f'(x))^2 dx$, сходятся.

Докажите, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

3. Пусть G группа, а F множество всех элементов этой группы, имеющих конечный порядок.

Докажите, что если F конечно, то существует такое натуральное n, что $x^n y = y x^n$ для всех $x \in G$ и всех $y \in F$.

4. Пусть $M_2(\mathbb{R})$ множество квадратных 2×2 матриц с действительными элементами, E единичная матрица из $M_2(\mathbb{R})$. На декартовом произведении $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ рассмотрим подмножество $\mathcal{M} = |(A, B) \mid AB = A + B + E, A \in M_2(\mathbb{R}), B \in M_2(\mathbb{R})\}$.

Пусть

$$\varPhi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (\det AB, \det(A + B), \mathrm{tr} AB), (A, B) \in \mathcal{M}\}.$$

Покажите, что расстояние d от начала координат до фигуры $\varPhi$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \le d \le 1.$$

5. Для непостоянной непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такая функция $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Докажите, что f строго монотонная функция.

6. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы нормы $\| * \|_0$, $\| * \|_1$, ..., $\| * \|_n$. Рассмотрим функцию, определенную формулой $|||x||| = \|(\|x\|_1, \|x\|_2, \ldots, \|x\|_n)\|_0$.

Докажите или опровергните утверждение: $|||x|||$ норма.

Время работы 4,5 часа.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.