Республиканская студенческая олимпиада по математике
Решения

1. Очевидно, что $X = [-3,-2] \cup [2,3]$. Так как $f'(x) = 3(x^2 - 1) > 0$ на X, то искомое значение равно $\max(f(-2); f(3)) = \max(-2; 18) = 18$.
   Ответ: 18.
2. Пусть $f(x) = x^{2007}\ln(1+e^x)$, $A = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, $B = \int_{-1}^{0} f(x)dx$, $C = \int_{0}^{1} f(x)dx$, тогда $B = [x=-t] =$ $= -\int_0^1 t^{2007}\ln(1+e^{-t})dt = -\int_0^1 t^{2007}\ln(1+e^t)dt + \int_0^1 t^{2008}dt = -C + 1/2009$, значит $A = B + C = 1/2009$.
   Ответ: 1/2009.
3. Используя правило Лопиталя, выделим у элемента a_n главную часть вида cn^k $(k<0)$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}((\int_0^{1/n}\frac{arctg\sqrt{x}}{x+1}dx)/(cn^k)) = \lim\limits_{n\to\infty}((\frac{-1}{n^2}arctg\sqrt{\frac{1}{n}})/(ckn^{k-1})) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-k-1,5}}{-ck} = 1.$
   Поэтому $k = -3/2, c = 2/3$, т.е. $a_n \sim 2/(3n^{1,5})$. Следовательно, ряд сходится.
   Ответ: ряд сходится.
4. Например, $\sin(1/x) = (-2/x) - ((-2/x) - \sin(1/x))$.
5. Пусть S_i – площадь i-ой грани, тогда $S_1 = S_2\cos\varphi_{12} + S_3\cos\varphi_{13} + S_4\cos\varphi_{14}$. Аналогичные равенства можно записать для S_2, S_3, S_4. Рассматривая их как систему линейных уравнений относительно S_1, S_2, S_3, S_4, получаем, что определитель системы, совпадающий с определителем матрицы A, равен 0, так как система имеет ненулевое решение.
   Ответ: 0.
6. Так как $e^x = 1 + x + ... + (x^n/n!) + e^{ax}x^{n+1}/(n+1)!$, где $a \in (0,1)$, то $e = 1 + 1 + 1/2 + ... + (1/n!) +$ $+ e^a/(n+1)!$. Так как $0 < e^a/(n+1) < 1$ для $n > 1$, то $[n!e] = n! + n! + 3\cdot 4\cdot ...\cdot n + ... + 1$ для $n > 1$, следовательно, $n!e - [n!e] = n!e^a/(n+1)! = e^a/(n+1)$ для $n > 1$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(n!e - [n!e]) = 0$.
   Ответ: 0.