Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 11 – 13 мая 2007 года

Группа А

1. Исследуйте сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x+1} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Последовательность (x_n) такова, что $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}$ для всех $n \geq 1$.
Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

3. Нормой $\|P\|$ многочлена P назовем сумму модулей его коэффициентов.
Найдите

$$\max_E \frac{\|P^{(n)}\|}{\|P\|}, \quad \text{где} \quad E = \{P \mid \deg P = n > 0, P(1) = 0\}.$$

4. Действительная $n \times n$ матрица A такова, что $A^{p+1} = A$ для некоторого натурального $p \geq 2$. E – единичная $n \times n$ матрица.
Докажите, что
а) $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(E - A^p) = n$;
б) $\operatorname{rank}(E - A) = ... = \operatorname{rank}(E - A^{p-1})$, если p – простое число.

5. Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$. Известно, что существует последовательность многочленов $(P_n(x))$ степени не выше k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |f(x) - P_n(x)| dx = 0.$$

Докажите, что
а) для любого $x \in [0,1]$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$;
б) $f(x)$ – многочлен.

6. A – постоянная $n \times n$ матрица, все элементы которой являются неотрицательными действительными числами. Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ – некоторое решение системы линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Докажите, что если $x(t) \to (0, 0, ..., 0)^T$ при $t \to +\infty$, то функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ линейно зависимы над полем действительных чисел.

Время работы 4,5 часа.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.