Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 18 – 20 мая 2008 года

Группа Б

Решения

1. Пусть $t = g(x)$ – решение уравнения $t^5 + t = x$, $x > 0$. Вычислите интеграл $\int\limits_0^2 g(x)dx$.

♦ Требуемый интеграл равен площади под графиком функции $g(x)$. Поэтому $\int\limits_0^2 g(x)dx = $
$= 2 - \int\limits_0^1 (t^5 + t)dt = \frac{4}{3}$. ■

2. Возрастающая последовательность (a_n), $n \geqslant 1$, натуральных чисел такова, что все суммы $a_i + a_j$ различны. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ сходится.

♦ Все суммы вида $a_i + a_j$, $i \leqslant j \leqslant n$ различны и являются натуральными числами. Поэтому $2a_n \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$. Отсюда $a_n \geqslant n^2/4$. Сходимость исходного ряда следует из того, что мажорирующий его ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ сходится. ■

3. Найти предел последовательности (x_n), если $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{2k+1}{k^2+k} \sin\frac{1}{k^2+k}$.

♦ Ответ: $\sin^2 1$.

Поскольку $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $\frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$, то

$$\sin\frac{2k+1}{k^2+k}\sin\frac{1}{k^2+k} = (\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1} + \sin\frac{1}{k+1}\cos\frac{1}{k})(\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1} - \sin\frac{1}{k+1}\cos\frac{1}{k}) =$$
$$= \sin^2\frac{1}{k}\cos^2\frac{1}{k+1} - \sin^2\frac{1}{k+1}\cos^2\frac{1}{k} = \sin^2\frac{1}{k}\cos^2\frac{1}{k+1} - (1 - \cos^2\frac{1}{k+1})\cos^2\frac{1}{k} =$$
$$= \sin^2\frac{1}{k}\cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k} + \cos^2\frac{1}{k}\cos^2\frac{1}{k+1} = \cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k}.$$

Отсюда $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(\cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k}) = \cos^2\frac{1}{n+1} - \cos^2 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \cos^2 1 = \sin^2 1$.
■

4. Для комплексных чисел z, w положим $d(z, w) = |1 - \overline{z}w|$.

а) Докажите, что $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$, если $|z_i| \leqslant 1$, $(i = 1, 2, 3)$.

б) Пусть ε – некоторое положительное число. Верно ли указанное неравенство для любых комплексных z_i с $|z_i| \leqslant 1 + \varepsilon$, $(i = 1, 2, 3)$?

♦ В пункте б) ответ нет. Достаточно взять $z_1 = z_2 = 1 + \varepsilon$, $z_3 = 1$. Докажем утверждение пункта а). Несложно видеть, что

$$d(z_1, z_2) = |1 - \overline{z_1} z_2| = |1 - \overline{z_1} z_3 + \overline{z_1} z_3 - \overline{z_1} z_2| \leqslant |1 - \overline{z_1} z_3| + |z_1||z_3 - z_2|.$$

Остается доказать, что $|z_3 - z_2| \leqslant |1 - \overline{z_3} z_2|$. Последнее неравенство эквивалентно $(z_3 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2}) \leqslant (1 - \overline{z_3} z_2)(1 - z_3 \overline{z_2})$. Но

$$(1 - \overline{z_3} z_2)(1 - z_3 \overline{z_2}) - (z_3 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2}) = 1 + \overline{z_3}\overline{z_2} z_3 z_2 - \overline{z_3} z_3 - \overline{z_2} z_2 = (1 - z_2 \overline{z_2})(1 - \overline{z_3} z_3) \geqslant 0.$$

■

5. Пусть $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа. Докажите, что уравнение $P(x) = e^x$ имеет не более $n + 1$ решений, в случае когда:

а) $n \leqslant 3$.

б) n произвольное.

♦ Рассмотрим сразу общий случай. Докажем утверждение индукцией по n. Для $n = 0$ оно очевидно. Пусть оно уже доказано для $n - 1$, докажем его для n. Предположим противное, пусть уравнение $P(x) = e^x$ имеет $n + 2$ различных корня $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$. Применим теорему Ролля к $f(x) = P(x) - e^x$. Получим, что существует $y_i \in (x_i, x_{i+1}), i = \overline{1, n+1}$ с $P'(x) = e^x$. Поскольку $P'(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i$, получаем противоречие с предположением индукции. ■

6. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – действительные числа. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, где $a_{ij} = \cos(x_i - x_j)$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - x_1) & \cos(x_1 - x_2) & \ldots & \cos(x_1 - x_n) \\ \cos(x_2 - x_1) & \cos(x_2 - x_2) & \ldots & \cos(x_2 - x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(x_n - x_1) & \cos(x_n - x_2) & \ldots & \cos(x_n - x_n) \end{pmatrix}$$

Докажите, что определитель матрицы A

а) неотрицательный для $n = 2$;

б) равен 0 для $n > 2$.

♦ Для $n = 2$ определитель равен $1 - \cos^2(x_1 - x_2) = \sin^2(x_1 - x_2)$. Покажем теперь, что матрица в условии имеет ранг не больше 2.

$\cos(x_k - x_j) = \dfrac{1}{2}(e^{i(x_k - x_j)} + e^{i(x_j - x_k)})$. Все строки матрицы $(e^{i(x_k - x_j)})_{k,j=1}^n$ пропорциональны, поэтому данная матрица имеет ранг 1. Будучи суммой двух матриц ранга 1, матрица $(\cos(x_k - x_j))$ имеет ранг не более 2. Действительно, пусть A, B – произвольные матрицы ранга 1 одного размера. Тогда все строки матрицы A пропорциональны некоторому вектору a, а все строки матрицы B – некоторому вектору b. Отсюда все строки матрицы $A + B$ линейно выражаются через a и b, откуда ранг $A + B$ не больше 2. ■