Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 18 – 20 мая 2008 года

Группа А

Решения

1. Пусть $t = g(x)$ – решение уравнения $t^5 + t = x$, $x > 0$. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^2 g(x)dx$ существует и найдите его.

♦ Функция $g(x)$ непрерывна, будучи обратной к возрастающей непрерывной функции. Поэтому требуемый интеграл существует и равен площади под графиком функции $g(x)$. Таким образом, $\int\limits_0^2 g(x)dx = 2 - \int\limits_0^1 (t^5 + t)dt = \dfrac{4}{3}$. ■

2. Последовательность $(a_n), n \geqslant 1$, натуральных чисел такова, что все суммы $a_i + a_j$ различны. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ сходится.

♦ Сходимость ряда с положительными членами не зависит от их перестановки. Так что, мы можем предполагать, что последовательность (a_n) возрастает. Все суммы вида $a_i + a_j, i \leqslant j \leqslant n$ различны и являются натуральными числами. Поэтому $2a_n \geqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$. Отсюда $a_n \geqslant n^2/4$. Сходимость исходного ряда следует из того, что мажорирующий его ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}$ сходится. ■

3. Пусть $a, b, r_1, r_2, \ldots, r_n$ –действительные числа, функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (r_i - x)$. Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$, у которой на главной диагонали стоят числа $r_1, \ldots, r_n$ (в указанном порядке), над диагональю a, а под диагональю b, т.е.,

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & a & \ldots & a \\ b & r_2 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & \ldots & r_n \end{pmatrix}.$$

Докажите, что

$$\det A = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

♦ Пусть I – матрица, у которой все элементы единицы. Рассмотрим матрицу $A + xI$. Вычитая первую строку этой матрицы из всех остальных и считая определитель, мы видим, что $\det(A + xI)$ зависит от x линейно, т.е., $\det(A + xI) = \det(A) + \alpha x$, где α – некоторое действительное число. Для $x = -b$ (соотв., $-a$) матрица $A + xI$ верхне-(соотв., нижне-)треугольная. Поэтому $\det(A - bI) = f(b), \det(A - aI) = f(a)$. Учитывая, что функция $\det(A + xI)$ линейна по x, получаем требуемое. ■

4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и пересечения $A \cap L$ для всех линейных подмногообразий $L \subsetneq \mathbb{R}^n$ открыты в L. Является ли A открытым в $\mathbb{R}^n$? (Линейным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ называют подмножества вида $a + V$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а V – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$).

♦ Ответ: нет.

Условимся называть линейное подмногообразие, не совпадающее с $\mathbb{R}^n$, собственным. Положим $x(t) = (t, t^2, t^3, \ldots, t^n)$. Докажем, что никакие $n + 1$ точек из $x(t)$ не лежат ни в каком собственном линейном подмногообразии. Точки $x^1, \ldots, x^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ лежат в собственном линейном подмногообразии тогда и только тогда, когда равен 0 определитель размера $n + 1$, строки которого равны $(1, x^i)$. Если точки $x^1, \ldots, x^{n+1}$ берутся из $x(t)$, то требуемый определитель становится определителем Вандермонда, а значит, отличен от 0. В качестве подмножества A мы возьмем $\mathbb{R}^n \setminus \{x(t), t \neq 0\}$. Точка 0 лежит в A, но любая её окрестность содержит точку из $x(t)$, поэтому A не является открытым. С другой стороны, любое собственное линейное подмногообразие содержит не более n точек не из A, а поэтому пересечение A с ним открыто.

Альтернативное построение подмножества A. Для $0 < a < b$ положим $S_{a,b} := \{(x_1, \ldots, x_n) | a < \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < b\}$. Выберем в $S_{1/2,1}$ $n+1$ точек $P_1, \ldots, P_{n+1}$ общего положения, т.е., не содержащихся в собственном линейном подмногообразии. Выберем в $S_{1/3,1/2}$ точку P_{n+2}, так, чтобы каждые $n+1$ точек из $P_1, \ldots, P_{n+2}$ были общего положения. Затем выберем точку P_{n+3} в $S_{1/4,1/3}$ с тем же свойством, и т.д. Опять же, полагаем, $A = \mathbb{R}^n \setminus \{P_i, i \in \mathbb{N}\}$. ■

5. Пусть $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ − трижды дифференцируемая функция. Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$. Докажите, что пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$ существуют и равны 0.

♦ Для произвольной точки $x > 1$ найдутся $\theta_1(x), \theta_2(x) \in (0, 1)$, для которых выполняются равенства

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(x + \theta_1(x)),$$
$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(x + \theta_2(x)),$$

Складывая эти равенства, и вычитая одно из другого, получаем

$$f''(x) = (f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)) + \frac{1}{6}(f'''(x + \theta_1(x)) - f'''(x + \theta_2(x))),$$

$$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) + \frac{1}{6}(f'''(x + \theta_1(x)) + f'''(x + \theta_2(x))).$$

При $x \to +\infty$ правые части стремятся к 0, откуда следует требуемое. ■

6. Пусть X, Y, Z − квадратные матрицы с комплексными коэффициентами, для которых $\operatorname{rank}(XY - YX + E) = 1$, $XZ = ZX$, $YZ = ZY$ (E − единичная матрица). Докажите, что $Z = aE$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$.

♦ Предположим противное, пусть Z не является постоянной матрицей. Тогда для любого собственного значения a матрицы Z подпространство $U := \ker(Z - aE)$ отлично от 0 и $\mathbb{C}^n$. Отметим, что U устойчиво относительно X и Y. Действительно, для $u \in U$ имеем $ZXu = XZu = aXu$.

Напомним, что $\operatorname{tr}(XY - YX) = 0$. Будучи оператором ранга 1 со следом n, $XY - YX + E$ подобен диагональной матрице $(n, 0, \ldots, 0)$. Действительно, приведем этот оператор к ЖНФ. Если на диагонали есть хотя бы два ненулевых элемента, то ранг больше 1. Таким образом, на диагонали есть единственный ненулевой элемент, который должен быть равен n, что доказывает утверждение в начале абзаца.

Значит, $XY - YX$ имеет собственные значения $n - 1$ (кратности 1) и -1 (кратности $n - 1$). Отметим также, что ограничение $(XY - YX)|_U$ оператора $XY - YX$ на U совпадает с $X|_U Y|_U - Y|_U X|_U$, а потому имеет след 0. Но собственные значения оператора $(XY - YX)|_U$ суть либо -1 (кратности $\dim U$), либо $n - 1$ (кратности 1) и -1 (кратности $\dim U - 1$). Эти числа не могут в сумме давать 0. Поскольку след совпадает с суммой собственных значений, получаем противоречие. ■