Республиканская
студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 18 − 20 мая 2008 года

Группа Б

1. Пусть $t = g(x)$ − решение уравнения $t^5 + t = x$, $x > 0$. Вычислите интеграл $\int\limits_0^2 g(x)dx$.

2. Возрастающая последовательность $(a_n), n \geqslant 1$, натуральных чисел такова, что все суммы $a_i + a_j$ различны. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ сходится.

3. Найти предел последовательности (x_n), если $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{2k+1}{k^2+k} \sin \dfrac{1}{k^2+k}$.

4. Для комплексных чисел z, w положим $d(z, w) = |1 - \overline{z}w|$.
а) Докажите, что $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$, если $|z_i| \leqslant 1$, $(i = 1, 2, 3)$.
б) Пусть ε − некоторое положительное число. Верно ли указанное неравенство для любых комплексных z_i с $|z_i| \leqslant 1 + \varepsilon$, $(i = 1, 2, 3)$?

5. Пусть $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ − действительные числа. Докажите, что уравнение $P(x) = e^x$ имеет не более $n + 1$ решений, в случае когда:
а) $n \leqslant 3$.
б) n произвольное.

6. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ − действительные числа. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, где $a_{ij} = \cos(x_i - x_j)$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - x_1) & \cos(x_1 - x_2) & \ldots & \cos(x_1 - x_n) \\ \cos(x_2 - x_1) & \cos(x_2 - x_2) & \ldots & \cos(x_2 - x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(x_n - x_1) & \cos(x_n - x_2) & \ldots & \cos(x_n - x_n) \end{pmatrix}$$

Докажите, что определитель матрицы A
а) неотрицательный для $n = 2$;
б) равен 0 для $n > 2$.

Время работы 5 часов.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.