Решения задач
республиканской студенческой олимпиады по математике

Группа Б

1. *Найдите все пары комплексных чисел* (z_1, z_2), *удовлетворяющих следующим условиям:* 1) $|z_1| = |z_2| = r$, 2) $\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2-1} \in \mathbb{R}$.

Ответ: $(z, -z)$, $(z, \bar{z})$, где $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r \geq 0$, за исключением пар $(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Так как $\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2-1} \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2-1} = \dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2-1}$. Преобразуя, получим $z_1+z_2 = \bar{z}_1+\bar{z}_2$. Следовательно, $z_1+z_2 \in \mathbb{R}$. Поэтому, или $z_1 = -z_2 = z \in \mathbb{C}$, причем $z_1z_2 = -z^2 \neq 1$, или $z_1+z_2 \neq 0$ и тогда $z_1z_2 \in \mathbb{R}$. Полагая в последнем случае $z_1 = a+iy_1$, $z_2 = b+iy_2$ легко находим, что $y_1 = -y_2 = y$, и, следовательно,

$$\mathbb{R} \ni z_1z_2 = (ab+y^2) + iy(b-a) \quad \Longrightarrow \quad y(b-a) = 0,$$

что приводит к парам $z_2 = \bar{z}_1$. При $r = 1$ следует исключить из общего случая решения $(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, так как $z_1z_2 \neq 1$.

2. *В каждом столбце квадратной матрицы A ровно два элемента отличны от нуля: диагональный, который больше 1, и еще один, равный 1.*

Докажите, что определитель матрицы A отличен от нуля.

Решение. Если бы $\det A = 0$, то и $\det A^T = 0$, поэтому система $A^Tx = 0$ имела бы ненулевое решение. Рассмотрим одно из таких решений, и пусть $x_{i_1}, ... x_{i_m}$ ненулевые компоненты этого решения, $m \leq n$, где n размерность матрицы A.

Тогда из уравнения $a_{i_1i_1}x_{i_1} + x_j = 0$ следует, что $|x_j| = |a_{i_1i_1}x_{i_1}| = a_{i_1i_1}|x_{i_1}| > |x_{i_1}|$. Аналогично, из уравнения $a_jx_j + x_k = 0$ следует, что $|x_k| > |x_j| > |x_{i_1}|$. Поскольку число ненулевых компонент конечно, то на некотором шаге, быть может уже на втором, получим $|x_{i_1}| > ... > |x_{i_1}|$. Полученное противоречие и доказывает, что $\det A \neq 0$.

3. *Последовательности целых чисел (a_n) и (b_n) таковы, что $(1+\sqrt{2}\,)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Найдите* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Нетрудно заметить, что из условия $(1+\sqrt{2}\,)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ следует $(1-\sqrt{2}\,)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$. Поэтому

$$a_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2}\,)^n + (1-\sqrt{2}\,)^n) \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2}\,)^n - (1-\sqrt{2}\,)^n).$$

Следовательно, так как $(1+\sqrt{2}\,) > 1$ и $|1-\sqrt{2}\,| < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}((1+\sqrt{2}\,)^n + (1-\sqrt{2}\,)^n)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2}\,)^n - (1-\sqrt{2}\,)^n)} = \sqrt{2}.$$

4. *Докажите, что если многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ с действительными коэффициентами $a_0, ..., a_n$ не имеет действительных корней на интервале $(0, 1)$, то функция*

$$f(y) = \frac{a_n}{n+y} + \frac{a_{n-1}}{n+y-1} + ... + \frac{a_0}{y}$$

не обращается в нуль на интервале $(0, +\infty)$.

Решение. Предположим, от противного, существование такого $y_0 \in (0, +\infty)$, что

$$f(y_0) = \frac{a_n}{n+y_0} + \frac{a_{n-1}}{n+y_0-1} + ... + \frac{a_0}{y_0} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{a_nx^{n+y_0}}{n+y_0} + \dfrac{a_{n-1}x^{n+y_0-1}}{n+y_0-1} + ... + \dfrac{a_0x^{y_0}}{y_0}$. Нетрудно заметить, что из (1) следует $F(1) = 0$, а из условия $y_0 > 0$ следует $F(0) = 0$. Тогда по теореме Ролля на интервале $(0, 1)$

существует такая точка x_0, что $F'(x_0) = 0$. Но $F'(x) = a_n x^{n+y_0-1} + a_{n-1}x^{n-2+y_0} + ... + a_0 x^{y_0} = P(x)x^{y_0-1}$, и, следовательно, $P(x_0) = 0$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

5. *Последовательности* (a_n), (b_n) *действительных чисел* a_n, b_n, *таковы, что* $0 < a_n < b_n < a_{n+1}$ *для любых натуральных* n.

Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right)$ *сходится.*

Решение. Заметим, что при всех натуральных n члены рассматриваемого ряда $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} > \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n} = 0$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{a_1} - \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_2}\right) - ... - \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) - ... - \left(\frac{1}{b_{N-1}} - \frac{1}{a_N}\right) - \frac{1}{b_N} < \frac{1}{a_1} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, все частные суммы ряда с положительными членами ограничены, откуда и следует сходимость этого ряда.

6. *Вычислите интеграл* $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Обозначим $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$. Сделаем замену переменной:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \Big[x = -t,\ dt = -dt\Big] = -\int_{1}^{-1} \frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} = \Big[t = x\Big] =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(1+e^x)(x^2+1)}.$$

Следовательно,

$$2I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} + \int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(1+e^x)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{(1+e^x)dx}{(1+e^x)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $I = \frac{\pi}{4}$.

7. *Имеется* 10 *миллионов монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранная монета бросается 10 раз, причем при всех бросаниях она выпадает гербом кверху.*

Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами?

Ответ: $\frac{2^{10}}{2^{10} + 10^7 - 1}$.

Пусть событие A герб выпал 10 раз, гипотеза H_1 выбрали монету с двумя гербами, гипотеза H_2 выбрали обычную монету. Нам требуется определить вероятность $P(H_1|A)$. Воспользовавшись формулой Байеса, получим

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \begin{bmatrix} P(H_1) = 10^{-7}, & P(H_2) = 1 - 10^{-7}, \\ P(A|H_1) = 1, & P(A|H_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2^{10}}{2^{10} + 10^7 - 1} \approx 1,02 \cdot 10^{-4}.$$