Решения задач
республиканской студенческой олимпиады по математике

Группа A

1. *Найдите предел*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{[(n+\alpha)^2]}-n\right),$$

где α *некоторое действительное число. (Здесь* $[x]$ *целая часть числа* x.*)*

Ответ: α.

Пусть $a_n = \sqrt{[(n+\alpha)^2]}-n$. Так как $(n+\alpha)^2-1 \le [(n+\alpha)^2] \le (n+\alpha)^2$, то для достаточно больших n будет выполнено

$$\sqrt{(n+\alpha)^2-1}-n \le a_n \le |n+\alpha|-n=\alpha. \qquad (1)$$

Имеем (для достаточно больших n)

$$\sqrt{(n+\alpha)^2-1}-n=\frac{((n+\alpha)^2-1)-n^2}{\sqrt{(n+\alpha)^2-1}+n}=\frac{2\alpha n+\alpha^2-1}{\sqrt{(n+\alpha)^2-1}+n}\ge\frac{2\alpha n+\alpha^2-1}{\sqrt{(n+\alpha)^2}+n}=$$

$$=\frac{2\alpha n+\alpha^2-1}{|n+\alpha|+n}=\frac{2\alpha n+\alpha^2-1}{2n+\alpha}.$$

Поэтому из (1) получаем неравенство

$$\frac{2\alpha n+\alpha^2-1}{2n+\alpha}\le a_n\le\alpha,$$

переходя в котором к пределу при $n\to+\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\alpha$.

2. *Пусть* A *матрица размерности* $2\times n$ *над полем комплексных чисел. Пусть* d_{ij} *определитель, первым столбцом которого является* i*-й столбец матрицы* A*, а вторым столбцом* j*-й столбец матрицы* A, $i,j=1,2,...,n$.

Укажите все значения, которые может принимать ранг матрицы $D=(d_{ij})$.

Ответ: $\operatorname{rank} D\in\{0,2\}$.

Обозначим $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ b_1 & b_2 & \dots & b_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-b_1 & -b_2 & \dots & -b_n\\ a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}$. Тогда $d_{ij}=\begin{vmatrix}a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}$ и нетрудно заметить, что $D=B^TA$ и, кроме того, D кососимметрическая матрица. Поскольку $\operatorname{rank} D\le\max\{\operatorname{rank} B^T,\operatorname{rank} A\}$ и, очевидно $\operatorname{rank} A\le 2$ и $\operatorname{rank} B^T\le 2$, то $\operatorname{rank} D\le 2$. Однако ранг кососимметрической матрицы четное число, поэтому $\operatorname{rank} D$ может принимать лишь два значения 0 или 2.

Легко заметить, что если $\operatorname{rank} A\le 1$, то все элементы матрицы D нули и в этом случае $\operatorname{rank} D=0$. Если же $\operatorname{rank} A=2$, то у матрицы A существует минор второго порядка, отличный от нуля, т.е. существуют такие i_0 и j_0, что $d_{i_0j_0}\ne 0$. Но тогда у матрицы D существует минор второго порядка вида $\begin{vmatrix}0 & d_{i_0j_0}\\ -d_{i_0j_0} & 0\end{vmatrix}$, который, очевидно, отличен от нуля. Поэтому в этом случае $\operatorname{rank} D=2$.

3. *Пусть* p *некоторое простое число и* $a=\sum a_ip^i$, $b=\sum b_ip^i$ p*-ичные разложения целых чисел* a *и* b, $a\ge b$.

а) *Докажите, что для биномиальных коэффициентов справедливо сравнение*

$$C_a^b \equiv C_{a_0}^{b_0} \cdot C_{a_1}^{b_1} \cdots \quad (mod\ \ p).$$

б) *Докажите, что многочлен*

$$F(x_1, x_2, ..., x_p) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_p^{\alpha_p} - 2(x_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (x_p - 1) + x_1^n + \ldots + x_p^n - 1$$

неприводим над полем $\mathbb{Q}$, если $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 2p > n$.

Решение. а) Имеем

$$(x+1)^a = (x+1)^{\sum\limits_i a_i p^i} = \prod_i (x+1)^{a_i p^i} \equiv \prod_i (x^{p^i} + 1)^{a_i} \equiv \prod_i \sum_{j=0}^{a_i} C_{a_i}^j x^{jp^i} \pmod p.$$

Коэфициент при x^b в левой части равен C_a^b, а в правой $\prod\limits_i C_{a_i}^{b_i}$, что и доказывает требуемое утверждение.

б) Достаточным условием неприводимости многочлена $F(x_1, ..., x_p)$ является неприводимость многочлена $f(x) = F(x, ..., x)$ от одной переменной. Имеем

$$f(x) = F(x, ..., x) = x^{2p} - 2(x-1)^p + px^n - 1,$$

откуда $f(x+1) = (x+1)^{2p} - 2x^p + p(x+1)^n - 1$. Свободный член многочлена $f(x+1)$ равен p; остальные коэффициенты, за исключением старшего, делятся на p. Из критерия Эйзенштейна следует, что многочлен $f(x+1)$, а вместе с ним и многочлен $f(x)$, неприводим на полем $\mathbb{Q}$. Делимость же всех коэффициентов, за исключением старшего, на p очевидна для всех коэффициентов, за исключением быть может лишь коэффициента при x^p, который сравним с $C_{2p}^p - 2$ по модулю p. Однако, из утверждения доказанного в предыдущем пункте следует, что $C_{pa}^{pb} \equiv C_a^b \pmod p$:

$$a = \sum_i a_i p^i,\ b = \sum_i b_i p^i,\ \Longrightarrow\ pa = \sum_i a_i p^{i+1},\ pb = \sum_i b_i p^{i+1},\ \Longrightarrow$$

$$C_{pa}^{pb} \equiv C_1^1 \cdot C_{a_0}^{b_0} \cdot C_{a_1}^{b_1} \cdot \ldots = C_{a_0}^{b_0} \cdot C_{a_1}^{b_1} \cdot \ldots \equiv C_a^b \pmod p.$$

Поэтому, $C_{2p}^p \equiv C_2^1 = 2 \pmod 2$, и, следовательно, $C_{2p}^p - 2 \equiv 0 \pmod p$.

4. *Докажите, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$ *сходится неабсолютно.*

Решение. 1) Покажем вначале, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$ сходится. Действительно, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\cos(n^2 - n) - \cos(n^2 + n)\big) =$$

$$= \frac{1}{2} \left((\cos 0 - \cos 2) + (\cos 2 - \cos 6) + \ldots\right).$$

Следовательно, у этого ряда ограниченные частные суммы:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin n \cdot \sin n^2 \right| = \frac{1}{2} \big|\cos 0 - \cos(N^2 + n)\big| \le 1.$$

Так как последовательность $(\dfrac{1}{n})$ монотонно стремится к нулю, то по признаку Дирихле исходный ряд сходится.

2) Рассмотрим теперь ряд из модулей $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\cdot\sin n^2|}{n}$.

Лемма 1. Для любого $n\in\mathbb{N}$ среди чисел $|\sin(n+i)|$, $i=0,1,2,3$ по крайней мере три числа не меньше, чем

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}\min\{|\sin 1|,|\sin 2|,|\sin 3|\}.$$

Доказательство. От противного, $|\sin(n+i)|<\varepsilon_1$, $|\sin(n+j)|<\varepsilon_1$, $i,j=0,1,2,3$, $i>j$. Тогда

$$|\sin(i-j)|=|\sin((n+i)-(n+j))|=|\sin(n+i)\cos(n+j)-\sin(n+j)\cos(n+i)|\le$$

$$\le|\sin(n+i)|+|\sin(n+j)|<2\varepsilon_1,$$

что противоречит включению $i-j\in\{1,2,3\}$.

Лемма 2. Для любого $n\in\mathbb{N}$ $|\sin(n+i)^2|$, $i=0,1,2,3$ по крайней мере два числа не меньше, чем $\varepsilon_2=\dfrac{1}{6}\min\{|\sin 2|,|\sin 6|\}$.

Доказательство. От противного, пусть три из указанных чисел меньше ε_2. Рассмотрим четыре случая:

1) $\sin(n+i)^2|<\varepsilon_2$, $i=0,1,2$. Тогда

$$|\sin(2n+1)|=|\sin((n+1)^2-n^2)|\le|\sin(n+1)^2|+|\sin n^2|<2\varepsilon_2,$$

$$|\sin((n+1)^2+2n+1)|\le|\sin(n+1)^2|+|\sin(2n+1)|<3\varepsilon_2.$$

Так как $|\sin((n+1)^2+2n+1)|=|\sin(n^2+4n+2)|=|\sin((n+2)^2-2)|$, то

$$\sin 2=|\sin((n+2)^2-((n+2)^2-2))|\le|\sin(n+2)^2|+|\sin((n+2)^2-2)|<4\varepsilon_2<6\varepsilon_2,$$

противоречие.

2) $\sin(n+i)^2|<\varepsilon_2$, $i=1,2,3$. Тогда замена $n:=n=1$ сводит этот случай к предыдущему.

3) $\sin(n+i)^2|<\varepsilon_2$, $i=0,1,3$. Тогда

$$|\sin(n^2+6n+3)|=|\sin((n+1)^2+2(2n+1))|\le|\sin(n+1)^2|+2|\sin(2n+1)|,\varepsilon_2+2\cdot2\varepsilon_2\le5\varepsilon_2,$$

откуда

$$|\sin 6|=|\sin((n+3)^2-(n^2+6n+3))|<\varepsilon_2+5\varepsilon_2=6\varepsilon_2,$$

противоречие.

4) Случай $\sin(n+i)^2|<\varepsilon_2$, $i=0,2,3$, рассматривается аналогично предыдущему.

Поэтому, для любого $n\in N$ по крайней мере одно число среди $|\sin(n+i)\sin(n+i)^4|$ не меньше, чем $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2>0$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{|\sin(n+i)\cdot\sin(n+i)^2|}{n+i}\ge\frac{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}{n+3}\quad\Longrightarrow\quad S_{4k}=\sum_{n=1}^{4k}\frac{|\sin n\cdot\sin n^2|}{n}\ge$$

$$\ge\frac{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

Следовательно, рассматриваемый ряд не сходится абсолютно.

5. *Пусть функции* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *и* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, *возрастают на отрезке* $[0,1]$. *Докажите, что*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \int\limits_0^1 g(x)dx \le \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Решение. Так как f и g возрастающие функции, то для любых $x \in [0,1]$ и $y \in [0,1]$ выполнено $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \ge 0$. Поэтому

$$A = \int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy \ge 0.$$

С другой стороны,

$$A = \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(x)dxdy - \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(y)dxdy - \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(x)dxdy+$$

$$+\int_0^1 \int_0^1 f(y)g(y)dxdy = 2\int_0^1 dy \int_0^1 f(x)g(x)dx - 2\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx =$$

$$= 2\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx\right),$$

откуда и следует требуемое утверждение.

6. *Пусть* G *конечная абелева группа,* X, Y *ее подгруппы, порожденные некоторыми элементами* $x \in G, y \in G$ *соответственно.*

Докажите, что существует автоморфизм группы G, *переводящий* x *в* y, *если известно, что фактор группы* G/X *и* G/Y *изоморфны.*

7. *Три игрока* A, B, C *равной силы проводят шахматный турнир по схеме: в первом туре играют* A *и* B, *игрок* C *свободен. Затем в каждом следующем туре победитель предыдущего тура играет с отдыхавших игроком. Турнир продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд две партии. Ничейных партий нет.*

Найдите вероятность победы в турнире для каждого из игроков.

Ответ: $P(A) = P(B) = \dfrac{5}{14}$, $P(C) = \dfrac{2}{7}$.

Первое решение. Результат шахматного турнира можно представить в виде последовательности игроков победителей. Тогда событие C победителем будет игрок C представлет собой объединение следующих событий

$$C = acc \cup bcc \cup acbacc \cup bcabcc \cup acbacbacc \cup bcabcabcc \cup ...$$

Так как события, входящие в объединение, попарно несовместны и вероятность каждого события, содержащего n букв, будет равна $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, то

$$P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{2+3k} + ... = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

Поскольку $P(A)+P(B)+P(C)=1$, и, очевидно, $P(A)=P(B)$, то

$$P(A)=P(B)=\frac{1-P(C)}{2}=\frac{5}{14}.$$

Второе решение. Обозначим через P вероятность победы игроком в турнире после того, как он одержал первую победу. Из условия задачи следует, что эта вероятность будет одинаковой для всех игроков. Тогда, используя формулу полной вероятности, получим

$$P(A)=\frac{1}{2}P+\frac{1}{8}P=\frac{5}{8}P=P(B), \quad P(C)=\frac{1}{2}P.$$

Поскольку $P(A)+P(B)+P(C)=1$, то $\frac{5}{8}P+\frac{5}{8}P+\frac{1}{2}P=1$, откуда $P=\frac{4}{7}$. Поэтому $P(A)=P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$, $P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$.