Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 28   30 апреля 2003 года

Группа Б

1. Найдите все пары комплексных чисел (z_1, z_2), удовлетворяющих следующим условиям: 1) $|z_1| = |z_2| = r$, 2) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 - 1} \in \mathbb{R}$.

2. В каждом столбце квадратной матрицы A ровно два элемента отличны от нуля: диагональный, который больше 1, и еще один, равный 1.

Докажите, что определитель матрицы A отличен от нуля.

3. Последовательности целых чисел (a_n) и (b_n) таковы, что

$$(1 + \sqrt{2}\,)^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

4. Докажите, что если многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ с действительными коэффициентами a_0, ..., a_n не имеет действительных корней на интервале $(0, 1)$, то функция

$$f(y) = \frac{a_n}{n+y} + \frac{a_{n-1}}{n+y-1} + \ldots + \frac{a_0}{y}$$

не обращается в нуль на интервале $(0, +\infty)$.

5. Последовательности (a_n), (b_n) действительных чисел a_n, b_n, таковы, что $0 < a_n < b_n < a_{n+1}$ для любых натуральных n.

Докажите, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right)$ сходится.

6. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

7. Имеется 10 миллионов монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранная монета бросается 10 раз, причем при всех бросаниях она выпадает гербом кверху.

Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами ?

Время работы 5 часов.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.