Республиканская
студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 28   30 апреля 2003 года

Группа А

1. Найдите предел
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{[(n+\alpha)^2]}-n\right),$$
где α некоторое действительное число. (Здесь $[x]$ целая часть числа x.)

2. Пусть A матрица размерности $2\times n$ над полем комплексных чисел. Пусть d_{ij} определитель, первым столбцом которого является i-й столбец матрицы A, а вторым столбцом j-й столбец матрицы A, $i,j=1,2,...,n$.

Укажите все значения, которые может принимать ранг матрицы $D=(d_{ij})$.

3. Пусть p некоторое простое число и $a=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ip^i$, $b=\sum\limits_{i=0}^{n}b_ip^i$ p-ичные разложения целых чисел a и b, $a\ge b$.

а) Докажите, что для биномиальных коэффициентов справедливо сравнение
$$C_a^b\equiv C_{a_0}^{b_0}\cdot C_{a_1}^{b_1}\cdot ...\cdot C_{a_n}^{b_n}\pmod p.$$

б) Докажите, что многочлен
$$F(x_1,x_2,...,x_p)=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_p^{\alpha_p}-2(x_1-1)\cdot\ldots\cdot(x_p-1)+x_1^n+\ldots+x_p^n-1$$
неприводим над полем $\mathbb{Q}$, если $\alpha_1+\ldots+\alpha_p=2p>n$.

4. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$ сходится неабсолютно.

5. Пусть функции $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ и $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, возрастают на отрезке $[0,1]$. Докажите, что
$$\int\limits_0^1 f(x)dx\int\limits_0^1 g(x)dx\le\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$$

6. Пусть G конечная абелева группа, X,Y ее подгруппы, порожденные некоторыми элементами $x\in G$, $y\in G$ соответственно.

Докажите, что существует автоморфизм группы G, переводящий x в y, если известно, что фактор группы G/X и G/Y изоморфны.

7. Три игрока A,B,C равной силы проводят шахматный турнир по схеме: в первом туре играют A и B, игрок C свободен. Затем в каждом следующем туре победитель предыдущего тура играет с отдыхавших игроком. Турнир продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд две партии. Ничейных партий нет.

Найдите вероятность победы в турнире для каждого из игроков.

Время работы 5 часов.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.