Решения задач
республиканской студенческой олимпиады по математике
Группа Б

1. *Через точку P, лежащую на графике Г функции $y=x^3$ проведена касательная к Г, пересекающая Г в точке Q≠P. Доказать, что угловой коэффициент касательной к Г в точке Q в четыре раза больше углового коэффициента касательной в точке P.*

Решение.

$$K_p = 3x_p^2,\ K_Q = 3x_Q^2,\ \frac{K_Q}{K_p} = \left(\frac{x_Q}{x_p}\right)^2,\ x_Q^3 = x_p^3 + 3x_p^2(x_Q - x_p),\ x_Q^2 + x_Q x_p - 2x_p^2 = 0,\ \frac{x_Q}{x_p} = 2.$$

2. *Последовательность действительных чисел (a_n), $n \in N$, определена следующим образом $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4$, $\forall n\geq 1$.*
а) Докажите, что последовательность (a_n) возрастает и неограниченна.
б) Докажите, что последовательность (b_n), $n \in N$, такая, что $b_n = \frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+...+\frac{1}{a_n-1}$, $\forall n\geq 1$, является сходящейся и найдите ее предел.

Решение.

а) Последовательность a_n возрастает, т.к. $a_{n+1}=(a_n-2)^2+a_n\geq a_n$. Если бы a_n была ограниченной, то она бы сходилась к некоторому числу L, причем $a_n\leq L$, $n\geq 1$. Переходя к пределу в равенстве $a_{n+1}=a_n^2-3a_n+4$, получим $L=L^2-3L+4$, откуда $L=2$. Но тогда $3=a_1\leq 2$, противоречие.

б) Так как $a_{n+1}-1=(a_n-1)(a_n-2)$, то

$$\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{(a_n-1)(a_n-2)} = \frac{1}{a_n-2} - \frac{1}{a_n-1},\ \text{откуда}\ \frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{a_n-2} - \frac{1}{a_{n+1}-2}.$$

Поэтому

$$b_n = \left(\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_2-2}\right)+\left(\frac{1}{a_2-2}-\frac{1}{a_3-2}\right)+...+\left(\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}\right) = \frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2} =$$

$$= \frac{1}{3-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2} = 1-\frac{1}{a_{n+1}-2},$$ т.к. $a_n\to+\infty$, то $b_n\to 1$.

3. *Непрерывная функция $f:[0,1]\to R$ удовлетворяет условиям* $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_0^1 xf(x)dx = 1$. *Доказать, что* $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4$.

Решение.

$$g(x)=ax+b,\ \int_0^1 g(x)dx=1,\ \int_0^1 xg(x)dx=1 \Rightarrow g(x)=6x-2,\ \int_0^1 g^2(x)dx=4.$$

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))dx \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\ge 4.$$

4. *Пусть (x_n) случайная последовательность, состоящая из 0 и 1 (появление 0 и 1 равновероятно). Определите вероятность какого события больше:*
А: в последовательности (x_n) первой появится тройка 110;
Б: в последовательности (x_n) первой появится тройка 010.

Ответ: вероятность события А больше.
Рассмотрим четыре равновероятные возможности:
1) $(x_1,x_2)=(1,1)$; 2) $(x_1,x_2)=(0,1)$; 3) $(x_1,x_2)=(1,0)$; 4) $(x_1,x_2)=(0,0)$;

В первом случае, очевидно, что первой в последовательности появится тройка 110.

Во втором случае, если $x_3=0$, то первой появится тройка 010, если $x_3=1$, то первой появится (см. предыдущий случай) тройка 110. Следовательно, в этом случае оба события А и Б равновероятны.

В третьем случае, пусть $x_3= x_4=\ldots= x_k=0,\ x_{k+1}=1\ (k\ge 2)$.

Тогда $(x_k,\ x_{k+1})=(0,1)$ и мы имеем второй случай.

В четвертом случае, опять пусть $x_3= x_4=\ldots= x_k=0,\ x_{k+1}=1\ (k\ge 2)$ и мы опять имеем $(x_k,\ x_{k+1})=(0,1)$, т.е. второй случай.

Следовательно, событие А более вероятно, чем событие Б.

5. *Треугольник T ограничен отрезками прямых $A_ix+B_iy+C_i=0,\ i=1,2,3$. Докажите, что площадь T с точностью до знака равна*

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{2\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Решение. $M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, где (X_i,Y_i) – вершина, противоположная i-ой стороне T.

$$MX=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},\ M\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow 1=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & d_1 \\ A_2 & B_2 & 0 \\ A_3 & B_3 & 0 \end{vmatrix}}{\det M}=\frac{d_1\cdot\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\det M},$$

$d_1=\det M\Big/\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$. Аналогично $d_2=\det M\Big/\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $d_3=\det M\Big/\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

$$S(T)=\pm\frac{1}{2}\det X=\pm\frac{1}{2}\frac{d_1d_2d_3}{\det M}.$$

6. *Вычислите произведение* $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$, *где* $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ *– корни степени n из 1.*

<u>Решение.</u> Если n четно, то, очевидно, П=0. Пусть n=2k+1. Тогда для любого ε_i найдется ε_m,такой, что $\varepsilon_i=\varepsilon_m^2$. Или $\varepsilon_m^2=\varepsilon_{\sigma(m)}$, где $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$, поскольку $\varepsilon_m^2=\varepsilon_{2m}$, если $\varepsilon_1=\exp(2\pi i/n)$.

$\prod(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=\dfrac{\prod(\varepsilon_i^2-\varepsilon_j^2)}{\prod(\varepsilon_i-\varepsilon_j)}=\dfrac{\prod(\varepsilon_{\sigma(i)}-\varepsilon_{\sigma(j)})}{\prod(\varepsilon_i-\varepsilon_j)}=\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$, $\dfrac{k(k+1)}{2}$ – число инверсий в строке (2,4,…,2n)=(2,4,…,2k, 1,3,…,2k+1).