Решения задач
республиканской студенческой олимпиады по математике
Группа А

1. *Непрерывная функция $f:[0,+\infty) \to [0;1]$ удовлетворяет при всех неотрицательных x и y неравенству $f(x+y) \le f(x)f(y)$. Докажите, что при всех неотрицательных x справедливо неравенство* $\int_0^x f(t)dt \ge x\sqrt{f(2x)}$.

Заметим, что функция f убывает. Поэтому

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = \int_0^x\int_0^x f(t)f(s)dtds \ge \int_0^x ds\int_0^x f(t+s)dt = \int_0^x ds\int_s^{s+x} f(u)du \ge f(2x)\int_0^x ds\int_s^{s+x} du = f(2x)x^2.$$

2. *Можно ли представить число $\sqrt{3}$ как предел последовательности (a_{nm}), члены которой принадлежат множеству $\left\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m} \mid n,m \in N\right\}$.*

Ответ: можно.

$$\left.\begin{array}{l} A=\left\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m}\right\} \\ a_{nm}\in A \Rightarrow ka_{nm}\in A,\ \forall k\in N \\ a_{n+1n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A}=R \Rightarrow \exists(a_{nm}) \to \sqrt{3}.$$

3. *Пусть (x_n) случайная последовательность, состоящая из 0 и 1 (появление 0 и 1 равновероятно). Определить вероятность какого события больше:*
А: в последовательности (x_n) первой появится тройка 110;
Б: в последовательности (x_n) первой появится тройка 010.

Ответ: вероятность события А больше.
Рассмотрим четыре равновероятные возможности:
1) $(x_1,x_2)=(1,1)$; 2) $(x_1,x_2)=(0,1)$; 3) $(x_1,x_2)=(1,0)$; 4) $(x_1,x_2)=(0,0)$;

В первом случае, очевидно, что первой в последовательности появится тройка 110.

Во втором случае, если $x_3=0$, то первой появится тройка 010, если $x_3=1$, то первой появится (см. предыдущий случай) тройка 110. Следовательно, в этом случае оба события А и Б равновероятны.

В третьем случае, пусть $x_3= x_4=\ldots= x_k=0,\ x_{k+1}=1\ (k\ge2)$.

Тогда $(x_k,\ x_{k+1})=(0,1)$ и мы имеем второй случай.

В четвертом случае, опять пусть $x_3= x_4=\ldots= x_k=0,\ x_{k+1}=1\ (k\ge2)$ и мы опять имеем $(x_k,\ x_{k+1})=(0,1)$, т.е. второй случай.

Следовательно, событие А более вероятно, чем событие Б.

4. *Пусть A и B – конечные множества действительных чисел. Отображения f и g таковы, что $f:A\to B,\ g:B\to A$, причем $g(B)\ne A$.*

а) Докажите, что существует такое подмножество $S\subset A$, что $A\backslash S=g(B\backslash f(S))$.

б) Верно ли это утверждение, если множества A и B бесконечны?

Ответ: б) неверно.

а) Обозначим $T_1=A\setminus g(B)$, $R_1=f(T_1)$. Так как $g(B)\neq A$, то $T_1\neq\varnothing$. Положим $T_{n+1}=A\setminus g(B\setminus R_n)$, $R_{n+1}=f(T_{n+1})$. Очевидно, что $T_1\subset T_2\subset\ldots\subset T_n\subset\ldots$ и $R_1\subset R_2\subset\ldots\subset R_n\subset$. Поскольку множества конечны, то $\exists$ k такое, что $T_k=T_{k+1}$. Имеем $T_{k+1}=A\setminus g(B\setminus R_k)\Rightarrow A\setminus T_{k+1}=g(B\setminus R_k)=g(B\setminus f(T_k))=g(B\setminus f(T_{k+1}))$, т.е. $S=T_k$ удовлетворяет требуемому условию.

б) Пусть $A=B=N$, $f(n)=n$, $g(n)=n+1$, $n\in N$. Предположим, что требуемое S существует. Пусть $n_0=\min(A\setminus S)$, тогда $f(n_0)=n_0$ и $g(f(n_0))=g(n_0)=n_0+1$. Т.к. $f(S)=S$, то условие $A\setminus S=g(B\setminus f(S))$ равносильно $N\setminus S=g(N\setminus S)$. Однако $\forall a\in N\setminus S$, $a\geq n_0$, поэтому $g(a)=a+1>n_0\in N\setminus S$, противоречие.

5. *A,B,C,D – $(n\times n)$ матрицы такие, что $AD^T-BC^T=E$, где E – единичная матрица, а матрицы AB^T и CD^T – симметрические. Докажите, что $A^TD-C^TB=E$.*

$AB^T=(AB^T)^T=BA^T\Rightarrow AB^T-BA^T=0$; $CD^T=(CD^T)^T=DC^T\Rightarrow CD^T-DC^T=0$;
$AD^T-BC^T=E\Rightarrow DA^T-CB^T=E$;

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD^T-BC^T & -AB^T+BA^T \\ CD^T-DB^T & -CB^T+DA^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\Rightarrow A^TD-C^TB=E.$$

6. *Пусть $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_{10}x^{10}+a_{11}x^{11}+a_{12}x^{12}+a_{13}x^{13}$, $a_{13}\neq 0$, и $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_{11}x^{11}+b_{12}x^{12}+b_{13}x^{13}$, $b_3\neq 0$ – два полинома над некоторым полем. Докажите, что степень их наибольшего общего делителя не превосходит 6.*

$f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $f_2(x)=a_{10}+a_{11}x+a_{12}x^2+a_{13}x^3$, $f(x)=f_1(x)+x^{10}f_2(x)$;
$g_1(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$, $g_2(x)=b_{10}+b_{11}x+b_{12}x^2+b_{13}x^3$, $g(x)=g_1(x)+x^{10}g_2(x)$;
$f(x)g_2(x)-g(x)f_2(x)=f_1(x)g_2(x)-f_2(x)g_1(x)$.