Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 11 13 мая 2004 года

Группа Б

1. Через точку P, лежащую на графике Γ функции $y = x^3$ проведена касательная к Γ, пересекающая Γ в точке Q, отличной от P.

Докажите, что угловой коэффициент касательной к Γ в точке Q в четыре раза больше углового коэффициента касательной в точке P.

2. Последовательность действительных чисел (a_n), $n \in \mathbb{N}$, определена следующим образом

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4 \quad \forall\, n \geq 1.$$

а) Докажите, что последовательность (a_n) возрастает и неограниченна.

б) Докажите, что последовательность (b_n), $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$b_n = \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + ... + \frac{1}{a_n - 1} \quad \forall\, n \geq 1,$$

является сходящейся и найдите ее предел.

3. Непрерывная функция $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int\limits_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Докажите, что $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 4.$

4. Пусть (x_n) случайная последовательность, состоящая из 0 и 1 (появление 0 и 1 равновероятно). Определите вероятность какого события больше:

А: в последовательности (x_n) первой появится тройка 110;

Б: в последовательности (x_n) первой появится тройка 010.

5. Треугольник T ограничен отрезками прямых $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Докажите, что площадь T с точностью до знака равна

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{2 \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

6. Вычислите произведение

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i + \varepsilon_j),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\, \varepsilon_n$ корни степени n из 1.

Время работы 4,5 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.