Республиканская
студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 11 13 мая 2004 года

Группа А

1. Непрерывная функция $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1]$ удовлетворяет для всех неотрицательных x, y неравенству $f(x + y) \leq f(x)f(y)$.

Докажите, что для всех неотрицательных x справедливо неравенство

$$\int_0^x f(t)dt \geq x\sqrt{f(2x)}.$$

2. Можно ли представить число $\sqrt{3}$ как предел последовательности (a_{nm}), члены которой принадлежат множеству $\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid n, m \in N\}$

3. Пусть (x_n) случайная последовательность, состоящая из 0 и 1 (появление 0 и 1 равновероятно). Определите вероятность какого события больше:

А: в последовательности (x_n) первой появится тройка 110;

Б: в последовательности (x_n) первой появится тройка 010.

4. Пусть A и B конечные множества действительных чисел. Отображения f и g таковы, что $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$, причем $g(B) \neq A$.

а) Докажите, что существует такое подмножество $S \subset A$, что $A \setminus S = g(B \setminus f(S))$.

б) Верно ли это утверждение, если множества A и B бесконечны ?

5. Пусть A, B, C, D $n \times n$ матрицы такие, что $AD^T - BC^T = E$, где E единичная матрица, а матрицы AB^T и CD^T симметрические.

Докажите, что $A^T D - C^T B = E$.

6. Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12} + a_{13}x^{13}, \quad a_{13} \neq 0$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_{11}x^{11} + b_{12}x^{12} + b_{13}x^{13}, \quad b_3 \neq 0$$

два полинома над некоторым полем.

Докажите, что степень их наибольшего общего делителя не превосходит 6.

Время работы 4,5 часа.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.