Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 18 − 20 мая 2008 года

Группа А

1. Пусть $t = g(x)$ − решение уравнения $t^5 + t = x$, $x > 0$. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^2 g(x)dx$ существует и найдите его.

2. Последовательность $(a_n), n \geqslant 1$, натуральных чисел такова, что все суммы $a_i + a_j$ различны. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ сходится.

3. Пусть $a, b, r_1, r_2, \ldots, r_n$ −действительные числа, функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(r_i - x)$. Рассмотрим матрицу A размера $n \times n$, у которой на главной диагонали стоят числа $r_1, \ldots, r_n$ (в указанном порядке), над диагональю a, а под диагональю b, т.е.,

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & a & \ldots & a \\ b & r_2 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & \ldots & r_n \end{pmatrix}.$$

Докажите, что

$$\det A = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и пересечения $A \cap L$ для всех линейных подмногообразий $L \subsetneq \mathbb{R}^n$ открыты в L. Является ли A открытым в $\mathbb{R}^n$? (Линейным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ называют подмножества вида $a + V$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а V − линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$).

5. Пусть $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ − трижды дифференцируемая функция. Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$. Докажите, что пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$ существуют и равны 0.

6. Пусть X, Y, Z − квадратные матрицы с комплексными коэффициентами, для которых $\operatorname{rank}(XY - YX + E) = 1, XZ = ZX, YZ = ZY$ (E − единичная матрица). Докажите, что $Z = aE$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$.

Время работы 5 часов.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.