Республиканская студенческая олимпиада по математике

г.Минск, 11 – 13 мая 2009г.

Группа А

1. Пусть$A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ являются подмножествами конечного множества X, $|X| \geq 10$, причем $|A_i| > \dfrac{1}{2}|X|$ для всех i. Доказать, что в X существует десять элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ таких, что каждое A_i содержит, по крайней мере, один из элементов $x_1, \ldots, x_{10}$. ($|X|$ означает число элементов множества X.)

РЕШЕНИЕ. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m = |X|$. Обозначим через n_i число тех подмножеств A_j, для которых $x_i \in A_j$ и через N – число упорядоченных пар (i, j), $x_i \in A_j$.

Тогда $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = |A_1| + \ldots + |A_{1066}| > \dfrac{1066}{2} \cdot m = 533m$, поэтому одно из n_i, считаем $n_1 \geq 534$ и так далее.

2. Рассмотрим следующую бинарную операцию на точках плоскости. Фиксируем треугольник $\triangle = XYZ$, где тройка X, Y, Z задает направление обхода против часовой стрелки. Для любых двух точек плоскости $A, B, A \neq B$ положим $A * B = C$, где C – это вершина такого треугольника ABC, что тройки A, B, C и X, Y, Z задают одну и ту же ориентацию и при этом $\triangle ABC$ подобен $\triangle XYZ$. (При $A = B$ полагаем $A * A = A$). Докажите, что для любых четырех точек плоскости A, B, C, D справедливо тождество

$$(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D).$$

РЕШЕНИЕ. Интерпретируем точки как комплексные числа. Тогда $A * B - A = \varepsilon k(B - A)$ для некоторых $k > 0$ и $\varepsilon \in \{|z| = 1\}$. $A * B = (1 - \varepsilon k)A + \varepsilon kB$. Вычислим $(A * B) * (C * D) = [(1 - \varepsilon k)A + \varepsilon kB] * [(1 - \varepsilon k)C + \varepsilon kD] = (1 - \varepsilon k)[(1 - \varepsilon k)A + \varepsilon kB] + \varepsilon k[(1 - \varepsilon k)C + \varepsilon kD] = (1 - \varepsilon k)^2 A + \varepsilon k(1 - \varepsilon k)(B + C) + (\varepsilon k)^2 D$.

Так как B и C входят в последнее выражение симметрично, то все доказано.

3. Пусть $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ и $0 \in [a, b]$, причем $f^{(n)}(0) = 0$, $\sup\limits_{[a,b]} \left| f^{(n)}(x) \right| \leq n!\, M^n$, $\forall n$, где M – Const. Доказать, что $f = 0$.

РЕШЕНИЕ. По формуле Тейлора-Лагранжа $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$, $\forall n \Rightarrow \left|f(x)\right| \leq \dfrac{\left|f^{(n)}(c)\right|}{n!} |x|^n < \big(M|x|\big)^n \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in [a, b]$, $|x| < \dfrac{1}{M}$.

Следовательно, $f(x) = 0$ на $[a, b] \cap \left(-\dfrac{1}{M}; \dfrac{1}{M}\right)$, а в силу непрерывности f и на $[a, b] \cap \left[-\dfrac{1}{M}; \dfrac{1}{M}\right]$.

Если $[a, b] \subset \left[-\dfrac{1}{M}; \dfrac{1}{M}\right]$, то $f(x) = 0$ на $[a, b]$. В противном случае, записывая формулу Тейлора-Лагранжа в точках $\pm\dfrac{1}{M}, \pm\dfrac{2}{M}, \ldots$, получаем требуемый результат.

4. Производится многократное подбрасывание симметричной монеты, т.е. выпадение герба (1) и решки (0) равны по 1/2. Последовательность из 0 и 1 назовем разреженной, если в ней нет двух стоящих рядом единиц.
а) Найти вероятность получения разреженной последовательности после n подбрасываний монеты.
б) Пусть теперь вероятность выпадения герба равна p. Обозначим через ξ_n число единиц в случайной разреженной последовательности длины n. Вычислить математическое ожидание ξ_n.

РЕШЕНИЕ.

а) Обозначим через a_n число разреженных последовательностей длины n. При $n = 1$ это будут 0 и 1; при $n = 2$ – это 00, 01, 10; при $n = 3$ получаем 000, 001, 010, 100, 101. Ввиду равенство 5=2+3, возникает гипотеза, что при любом n имеет место $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Это легко доказать по индукции. Если $(n + 2)$ – последовательность оканчивается символами 00, то на местах с 1-го до n-го может стоять любая n-последовательность. Аналогично, если $(n+2)$-последовательность оканчивается 01. Наконец, если последними символами будут 10, то на n-м месте должен стоять 0, а места с 1-го до $(n-1)$-го может занимать любая разреженная $(n-1)$-последовательность. Поэтому справедливо равенство $a_{n+2} = a_n + a_n + a_{n-1}$. По индуктивному предположению $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, и тогда $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. С учетом начальных значений $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5$ получаем, что $a_n = F_{n+2}$, где F_k – k-ое число Фибоначчи. Тогда $P_n = \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$.

б) Запишем ξ_n в виде суммы $\xi_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$, где η_i – цифра, записанная на i-ой позиции.

Пусть $\alpha_i := M\eta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда последовательно находим
$\alpha_1 = P(\eta_1 = 1) = p$,
$\alpha_2 = P(\eta_2 = 1) = P(\eta_1 = 0)p = (1-p)p = p - p^2$,
$\alpha_3 = P(\eta_3 = 1) = P(\eta_2 = 0)p = (1-p+p^2)p = p - p^2 + p^3$,
и вообще, $\alpha_n = (1 - \alpha_{n-1})p$.

$\mu_n := M\xi_n = M\eta_1 + M\eta_2 + \ldots + M\eta_n$. Так, для μ_1, μ_2, μ_3 получаем значения $\mu_1 = p,\ \mu_2 = 2p - p^2,\ \mu = 3p - 2p^2 + p^3$. В общем случае имеем $\mu_n = np - (n-1)p^2 + \ldots +$
$+(-1)^{n-1}p^n = \dfrac{np}{1+p} + \left(\dfrac{p}{1+p}\right)^2\left[1 - (-p)^n\right]$.

5. E – конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел, u и v – линейные отображения E в себя, и пусть ядро $u^{-1}(0)$ отображения u содержит ядро $v^{-1}(0)$ отображения v. Доказать, что существует такое линейное отображения w E в E, что $u = w \circ v$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ такой базис E, что $(e_1, \ldots, e_k)$ – базис $v^{-1}(0)$. Докажем, что векторы $v(e_i),\ i \geq k+1$ образуют базис $v(E)$:
а) $v(x) = v\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i v(e_i), \forall x \in E$;

б) $\sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i v(e_i) = 0 \Rightarrow v\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i e_i\right) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i e_i \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i$ и, поэтому, векторы $v(e_i),\ i \geq k+1$ независимые.

Искомое линейное отображение $w : E \to E$ строим следующим образом. Пусть $v(x) = \sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i v(e_i)$, $w(v(x)) = \sum\limits_{i=k+1}^{n}\lambda_i u(e_i) \Rightarrow w\big|_{v(E)}\circ v(e_i) = u(e_i),\ \forall i.$

На подпространстве, дополнительном к $v(E)$ w задаем произвольно. Тогда

$$w \circ v(x) = w \circ v\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i w\big|_{v(E)}\circ v(e_i) = u(x).$$

6. Для фиксированного натурального $m \geq 2$ рассмотрим отображение f_m,

$$f_m(x) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{x}{2m} +$$
$$+\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} + \ldots + \frac{1}{3m-1} - \frac{x}{3m} + \ldots .$$

Найти множество определения $D(f_m)$ и множество значений $E(f_m)$ функции f_m.

РЕШЕНИЕ. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{(k-1)m+1} + \ldots + \dfrac{1}{km-1} - \dfrac{x}{km}\right]$. Предположим, что ряд сходится для x и y. Тогда сходится и последовательность $S_n(x) - S_n(y) = \dfrac{y-x}{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Но это возможно, только если $x = y$, т.к. $\sum\dfrac{1}{k}$ расходится. Следовательно, ряд сходится не более, чем в одной точке x. Последовательность $A_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{nm} - \ln nm$ сходится, как известно, к эйлеровой константе γ. Далее, $S_n(m-1) = A_n + \ln(nm) - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{km} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{m-1}{km} = A_n + \ln m + \left(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) \to \gamma + \ln m - \gamma = \ln m$. Итак, f_m определена в единственной точке $x = m-1$ и $f_m(m-1) = \ln m$.

Республиканская
студенческая олимпиада по математике

г.Минск, 11 – 13 мая 2009г.

Группа B

1. Найти множество упорядоченных пар (b, c) действительных чисел b и c, для которых оба корня квадратного уравнения $z^2+bz+c=0$ лежат в круге $|z| < 1$ комплексной плоскости.

РЕШЕНИЕ. Для того, чтобы уравнение имело действительные корни в круге $|z|<1$, необходимо и достаточно, чтобы $\begin{cases} b^2-4c \geq 0 \\ 1-b+c>0 \\ 1+b+c>0 \\ |\dfrac{b}{2}|<2, \end{cases}$, а для комплексных корней в круге $|z|<1 - \begin{cases} b^2-4c<0 \\ c<1. \end{cases}$ В итоге получаем треугольник $\begin{cases} 1-b+c>0 \\ 1-b+c>0 \\ |b|<2 \\ c<1, \end{cases}$ с вершинами $(0, -1),\ (\pm 2, 1)$ плоскости Obc.

2. Сколько нулей на $\mathbb{R}$ имеет функция $f(x) = 2^x - 1 - x^2$?

РЕШЕНИЕ. Функция f имеет по крайней мере три нуля: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 \in (4, 5)$, т.к. $f(4) < 0$ и $f(5) > 0$. Так как $f"(x) = 2^x \ln^2 2 - 2$ строго возрастает и $f"(-\infty) < 0$, $f"(+\infty) > 0$, то $f"$ имеет единственный нуль.

Если бы функция f имела четвертый нуль, то в силу теоремы Ролля $f"$ имела бы два нуля (?!).

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x}{e^x+\cos x-\sin x}dx$.

РЕШЕНИЕ. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x}{e^x(1+e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{-x}\cos x dx}{1+e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x} =$
$= -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{d(1+e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)}{1+e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x} = -\dfrac{1}{2}\ln\left|1+e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$
$= -\dfrac{1}{2}\ln\left|1+e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-e^{-\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|+\dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{2}\ln 2.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

4. Вычислить произведения:

$$P = \prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2\pi k i}{n}}-1\right) \quad \text{и} \quad S = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

РЕШЕНИЕ. Числа 1 и $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi ki}{n}}$, $k = \overline{1, n-1}$ являются нулями функции $z^n - 1$, поэтому $z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\varepsilon_k) \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1}(\varepsilon_k - z) = \frac{z^n-1}{z-1}\cdot(-1)^{n-1} = \big(n+0(1)\big)(-1)^{n-1}$. Переходя к пределу при $z \to 1$ имеем $P = (-1)^{n-1}\cdot n$.

С другой стороны, $P = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{\pi ki}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{\pi ki}{n}} - e^{-\frac{\pi ki}{n}}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}(n-1)}\cdot(2\cdot i)^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} =$ $= i^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot i^{n-1}\cdot S \Rightarrow S = \frac{n}{2^{n-1}}$.

5.Производится многократное подбрасывание симметричной монеты, т.е. выпадение герба (1) и решки (0) равны по 1/2. Последовательность из 0 и 1 назовем разреженной, если в ней нет двух стоящих рядом единиц. Найти вероятность получения разреженной последовательности после n подбрасываний монеты.

РЕШЕНИЕ. Обозначим через a_n число разреженных последовательностей длины n. При $n = 1$ это будут 0 и 1; при $n = 2$ – это 00, 01, 10; при $n = 3$ получаем 000, 001, 010, 100, 101. Ввиду равенство 5=2+3, возникает гипотеза, что при любом n имеет место $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Это легко доказать по индукции. Если $(n+2)$ – последовательность оканчивается символами 00, то на местах с 1-го до n-го может стоять любая n-последовательность. Аналогично, если $(n+2)$-последовательность оканчивается 01. Наконец, если последними символами будут 10, то на n-м месте должен стоять 0, а места с 1-го до $(n-1)$-го может занимать любая разреженная $(n-1)$-последовательность. Поэтому справедливо равенство $a_{n+2} = a_n + a_n + a_{n-1}$. По индуктивному предположению $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, и тогда $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. С учетом начальных значений $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5$ получаем, что $a_n = F_{n+2}$, где F_k – k-ое число Фибоначчи. Тогда $P_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$.

6.Для любого действительного x найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}$.

РЕШЕНИЕ. Для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\exists M \big|f^{(n)}(x)\big| < M\ \forall n \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, по теореме Тейлора имеем при всех x

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Полагая здесь $f(x) = \sin x$ и учитывая, что $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, получаем, что при всех x из $\mathbb{R}$ сумма данного ряда равна $\sin(x+1)$.