Республиканская студенческая олимпиада по математике

г.Минск, 11 – 13 мая 2009г.

Группа А

1. Пусть$A_1, A_2, \ldots, A_{1066}$ являются подмножествами конечного множества X, $|X| \geq 10$, причем $|A_i| > \dfrac{1}{2}|X|$ для всех i. Доказать, что в X существует десять элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ таких, что каждое A_i содержит, по крайней мере, один из элементов $x_1, \ldots, x_{10}$. ($|X|$ означает число элементов множества X.)

2. Рассмотрим следующую бинарную операцию на точках плоскости. Фиксируем треугольник $\triangle = XYZ$, где тройка X, Y, Z задает направление обхода против часовой стрелки. Для любых двух точек плоскости $A, B, A \neq B$ положим $A * B = C$, где C – это вершина такого треугольника ABC, что тройки A, B, C и X, Y, Z задают одну и ту же ориентацию и при этом $\triangle ABC$ подобен $\triangle XYZ$. (При $A = B$ полагаем $A*A = A$). Докажите, что для любых четырех точек плоскости A, B, C, D справедливо тождество

$$(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D).$$

3. Пусть $f \in C^\infty([a,b], \mathbb{R})$ и $0 \in [a,b]$, причем $f^{(n)}(0) = 0$, $\sup\limits_{[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!\, M^n$, $\forall n$, где M – Const. Доказать, что $f = 0$.

4. Производится многократное подбрасывание симметричной монеты, т.е. выпадение герба (1) и решки (0) равны по 1/2. Последовательность из 0 и 1 назовем разреженной, если в ней нет двух стоящих рядом единиц.

а) Найти вероятность получения разреженной последовательности после n подбрасываний монеты.

б) Пусть теперь вероятность выпадения герба равна p. Обозначим через ξ_n число единиц в случайной разреженной последовательности длины n. Вычислить математическое ожидание ξ_n.

5. E – конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел, u и v – линейные отображения E в себя, и пусть ядро $u^{-1}(0)$ отображения u содержит ядро $v^{-1}(0)$ отображения v. Доказать, что существует такое линейное отображения w E в E, что $u = w \circ v$.

6. Для фиксированного натурального $m \geq 2$ рассмотрим отображение f_m,

$$f_m(x) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{x}{2m} +$$
$$+\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} + \ldots + \frac{1}{3m-1} - \frac{x}{3m} + \ldots.$$

Найти множество определения $D(f_m)$ и множество значений $E(f_m)$ функции f_m.

Республиканская
студенческая олимпиада по математике

г.Минск, 11 − 13 мая 2009г.

Группа B

1. Найти множество упорядоченных пар (b, c) действительных чисел b и c, для которых оба корня квадратного уравнения $z^2+bz+c=0$ лежат в круге $|z|<1$ комплексной плоскости.

2. Сколько нулей на $\mathbb{R}$ имеет функция $f(x) = 2^x - 1 - x^2$?

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{e^x + \cos x - \sin x} dx$.

4. Вычислить произведения:

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi k i}{n}} - 1 \right) \quad \text{и} \quad S = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

5.Производится многократное подбрасывание симметричной монеты, т.е. выпадение герба (1) и решки (0) равны по 1/2. Последовательность из 0 и 1 назовем разреженной, если в ней нет двух стоящих рядом единиц. Найти вероятность получения разреженной последовательности после n подбрасываний монеты.

6.Для любого действительного x найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}$.