Республиканская студенческая олимпиада по математике

Минск, 14 – 16 мая 2010 г.

Группа А

1. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на интервале $(-1;1)$ и пусть последовательность $f^{(n)}$ сходится равномерно на $(-1;1)$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0)=1$.

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$.

Ответ: e^x.

Решение. Пусть функция $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$. Тогда из равенства

$$f^{(n)}(x)=\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)dt+f^{(n)}(0)$$

переходом к пределу получаем $g(x)=\int\limits_0^x g(t)dt+1$, откуда $g'(x)=g(x)$. Так как по условию $g(0)=1$, то $g(x)=e^x$ как решение соответствующей задачи Коши.

2. Вычислите

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(1+x^{\sqrt{2}})}.$$

Ответ: $\pi/2$.

Решение. $\int\limits_0^{+\infty}=\int\limits_0^1+\int\limits_1^{+\infty}$. Имеем

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(1+x^{\sqrt{2}})}=[x=1/t]=\int\limits_1^{+\infty}\frac{t^{\sqrt{2}}}{t^2t^{-1/2}(1+t^{-1})(1+t^{\sqrt{2}})}dt=$$

$$=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}+t^{1/2}}-\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)(1+t^{\sqrt{2}})}.$$

Таким образом

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(1+x^{\sqrt{2}})}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}=[t=u^2]=\int\limits_1^{+\infty}\frac{2udu}{u(1+u^2)}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

3. Пусть K – замкнутый единичный круг $x^2+y^2\le 1$ и C – единичная окружность $x^2+y^2=1$. Через $R(MN)$ обозначим прямоугольник с диагональю MN и сторонами, параллельными осям Ox и Oy.

а) Зафиксируем на окружности C точку M. Найдите вероятность того, что при случайном выборе точки M во внутренности круга K ни одна из точек прямоугольника $R(MN)$ не лежит во внешности K.

б) Найдите вероятность того, что при случайном выборе точки M на окружности C и точки N во внутренности K ни одна из точек прямоугольника $R(MN)$ не лежит во внешности K.

Ответ а) $P=4|x_0y_0|/\pi$, где $M=(x_0;y_0)$; б) $P=4/\pi^2$.

Решение. а) Пусть $M(x_0,y_0)\in C$, $N(x,y)\in K$.

$$R(MN)\subset K \iff \begin{cases} x_0^2+y^2\le 1, \\ x^2+y_0^2\le 1\end{cases} \iff \begin{cases} |x|\le|x_0|, \\ |y|\le|y_0|\end{cases} \quad P(x_0,y_0)=4|x_0||y_0|/\pi.$$

б)

$$P=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C P(x_0,y_0)ds=[x_0=\cos t,\ y_0=\sin t]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2|\sin 2t|dt}{\pi}=\frac{4}{\pi^2}.$$

4. Пусть M — симметрическая $n\times n$ матрица, а U — такое подпространство $\mathbb{R}^n$, что $x^TMx\le 0$ при всех $x\in U$.

Докажите, что если размерность U равна $n-1$, то матрица M имеет не более одного положительного собственного значения.

Решение. Пусть, от противного, M имеет два собственных положительных значения λ_1 и λ_2. Пусть u_1, u_2 — нормированные собственные векторы, отвечающие λ_1 и λ_2. Тогда $(u_1,u_2)=0$. Обозначим через V подпространство, натянутое на u_1, u_2. Тогда $x^TMx>0$ для всех $x\in V$, $x\ne 0$. Действительно, если $x=a_1u_1+a_2u_2$, то

$$x^TMx=a_1^2\lambda_1+a_2^2\lambda_2>0 \text{ при } (a_1;a_2)\ne(0;0).$$

Так как $\dim U=n-1$ и $\dim V=2$, то существует ненулевой вектор $x\in U\cap V$. Тогда, с одной стороны, $x^TMx\le 0$ (так как $x\in U$), а с другой $x^TMx>0$ (так как $x\in V$). Противоречие.

5. Сопоставим конечной группе G граф Γ следующим образом: два элемента $a,b\in G$ соединим ребром в том и только том случае, если $(ab^{-1})^2\ne e$, где e — единица группы G.

Если $G=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, то пусть A обозначает матрицу смежности графа Γ ($a_{ij}=1$, если v_i и v_j соединены ребром, в противном случае $a_{ij}=0$). Докажите, что $\det A$ является четным числом.

Решение. Так как определитель не меняется при замене столбца суммой всех столбцов, то следовательно, если в матрице с целыми элементами все суммы по строкам четные, то ее определитель — четное число.

Для заданной конечной группы рассмотрим множество $X=\{x\in G\mid x^2\ne e\}$.Тогда X содержит четное число m элементов (возможно ни одного), ибо $x\in X$ влечет $x\ne x^{-1}$ и $x^{-1}\in X$.

Рассмотрим теперь i-ю строку матрицы A. Имеем

$$a_{ij}=1\ \Leftrightarrow\ (v_iv_j^{-1})^2\ne e,\ \text{т.е. } v_iv_j^{-1}=x\in X \text{ или } v_j=x^{-1}v_i.$$

При фиксированном i и j, меняющемся от 1 до n, элемент $v_iv_j^{-1}$ пробегает всю группу G, а элемент x^{-1} в представлении $v_j=x^{-1}v_i$ пробегает все X. Таким образом, в любой строке матрицы A будет m единиц, откуда и следует четность $\det A$.

6. Действительная последовательность $(x_n)_{n\ge 0}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $x_n\ne 0$ при всех $n\ge 0$;

б) $$\begin{vmatrix} x_{n+k} & x_{n+k+1} & \dots & x_{n+2k} \\ x_{n+k-1} & x_{n+k} & \dots & x_{n+2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+k} \end{vmatrix}=a^n,\quad a\ne 0, \text{ при всех } n\ge 0.$$

Докажите, что существуют такие действительные числа a_1, a_2, ..., a_k, что

$$x_{n+k+1}=a_1x_{n+k}+\dots+a_kx_{n+1}+(-1)^kax_n,\quad \forall\, n\ge 0.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} x_{n+1}-(-1)^kax_{n-k} & x_{n+2}-(-1)^kax_{n-k+1} & \dots & x_{n+k+1}-(-1)^kax_n \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-k+1} & x_{n-k+2} & \dots & x_{n+1} \end{vmatrix}=$$

$$=a^{n-k+1}-(-1)^ka(-1)^ka^{n-k}=0.$$

Следовательно,

$$\big(x_{n+1}-(-1)^kax_{n-k},\dots,x_{n+k+1}-(-1)^kax_n\big)=a_1^n(x_n,\dots,x_{n+k})+\dots+a_k^n(x_{n-k+1},\dots,x_{n+1})$$

при всех $n\ge 0$.

Нетрудно проверить, что коэффициенты a_1^n,...,a_k^n не зависят от n (полагаем n равным $n-1$ и сравниваем подходящие координаты в предыдущем равенстве). Из последнего равенства следует, что

$$x_{n+k+1}=a_1x_{n+k}+\dots+a_kx_{n+1}+(-1)^kax_n,\quad \forall\, n\ge 0.$$

Республиканская
студенческая олимпиада по математике

Минск, 14 – 16 мая 2010 г.

Группа Б

1. Найдите максимальное значение функции $(x^3 - 3x)$ на множестве E, если

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 36 \leq 13x^2\}.$$

Ответ: 18.
Решение.
$E = [-3; -2] \cup [2, 3]$, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. Функция f возрастает на $[-3; -2]$ и на $[2, 3]$. Следовательно,

$$\max_E f = \max\{f(-2), f(3)\} = f(3) = 18.$$

2. Вычислите

$$\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx.$$

Ответ: 1.
Решение. Обозначим $I = \int\limits_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$. Сделаем в интеграле замену $9 - y = x + 3$. Получаем

$$I = -\int\limits_4^2 \frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)} + \sqrt{\ln(9-y)}} dx = \int\limits_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx.$$

Тогда

$$2I = \int\limits_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = 2 \implies I = 1.$$

3. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни уравнения $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = 0$.
Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k}.$$

Ответ: 0,5.
Решение. Пусть $P(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$. Тогда

$$P'(x) = (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n) + ... + (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}) =$$

$$= P(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} = \frac{P'(x)}{P(x)} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k} = \frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{n + (n-1) + ... + 1}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

Таким образом, искомый предел равен $1/2$.

4. На гиперболе $xy = 1$ взяты точки A_n и B_n с абсциссами $\frac{n}{n+1}$ и $\frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, ...$, соответственно. Обозначим через O_n центр окружности, проходящей через точки A_n, B_n и точку $(1; 1)$.

Существует ли предельная точка центров O_n? Если такая точка существует, то укажите ее координаты.

Ответ: существует, (2;2).

Решение. Очевидно, что A_n, B_n симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому все центры O_n лежат на этой прямой. Если $C(1;1)$, то O_n – это точка пересечения прямой $y = x$ и прямой ℓ_n, которая является серединным перпендикуляром отрезка A_nC. Середина A_nC – точка $(P_n; Q_n) = \left(\dfrac{2n+1}{2(n+1)}; \dfrac{2n+1}{2n}\right)$.
Уравнение прямой ℓ_n:

$$(X - P_n; Y - Q_n) = t\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n+1}\right) \implies nX - (n+1)Y = -\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)},$$

откуда (подставляя $X = Y$) находим

$$O_n = \left(\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}; \frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}\right) \to (2:2).$$

5. Пусть K – замкнутый единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ и $M(x_0; y_0)$ – точка на единичной окружность $x^2 + y^2 = 1$. Через $R(MN)$ обозначим прямоугольник с диагональю MN и сторонами, параллельными осям Ox и Oy.

Найдите вероятность того, что при случайном выборе точки N в круге K прямоугольник $R(MN)$ целиком лежит в круге K.

Ответ: $4|x_0||y_0|/\pi$.

Решение. Пусть $N(x, y) \in K$.

$$R(MN) \subset K \iff \begin{cases} x_0^2 + y^2 \leq 1, \\ x^2 + y_0^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \leq |x_0|, \\ |y| \leq |y_0| \end{cases} \quad P(x_0, y_0) = 4|x_0||y_0|/\pi.$$

6. Пусть функция $y = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

Верны ли следующие утверждения:

а) если $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то и $f'(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

б) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то и $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = (x^2 + C_1x + C_2)e^x$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

$$y(x) > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \iff \quad C_1^2 - 4C_2 < 0,$$

$$y'(x) = (x^2 + (C_1 + 2)x + C_1 + C_2)e^x > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \iff \quad C_1^2 - 4C_2 + 4 < 0.$$

таким образом, имеем

а) решение $y(x) = (x^2 + 0,5)e^x$ не удовлетворяет утверждению а);

б) неравенство $C_1^2 - 4C_2 + 4 < 0$ влечет неравенство $C_1^2 - 4C_2 < 0$, и, следовательно, утверждение б) верно.