Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 14 – 16 мая 2010 года

Группа Б

1. Найдите максимальное значение функции $(x^3 - 3x)$ на множестве E, если

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 36 \leq 13x^2\}.$$

2. Вычислите

$$\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx.$$

3. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни уравнения $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = 0$.
Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k}.$$

4. На гиперболе $xy = 1$ взяты точки A_n и B_n с абсциссами $\dfrac{n}{n+1}$ и $\dfrac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, ...$, соответственно. Обозначим через O_n центр окружности, проходящей через точки A_n, B_n и точку $(1; 1)$.

Существует ли предельная точка центров O_n? Если такая точка существует, то укажите ее координаты.

5. Пусть K – замкнутый единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ и $M(x_0; y_0)$ – точка на единичной окружность $x^2 + y^2 = 1$. Через $R(MN)$ обозначим прямоугольник с диагональю MN и сторонами, параллельными осям Ox и Oy.

Найдите вероятность того, что при случайном выборе точки N в круге K прямоугольник $R(MN)$ целиком лежит в круге K.

6. Пусть функция $y = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

Верны ли следующие утверждения:

а) если $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то и $f'(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

б) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то и $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

Время работы 4,5 часа.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.
Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.