Республиканская студенческая олимпиада по математике

г. Минск, 14 – 16 мая 2010 года

Группа А

1. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на интервале $(-1;1)$ и пусть последовательность $f^{(n)}$ сходится равномерно на $(-1;1)$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$.

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$.

2. Вычислите

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(1+x^{\sqrt{2}})}.$$

3. Пусть K – замкнутый единичный круг $x^2+y^2 \le 1$ и C – единичная окружность $x^2+y^2=1$. Через $R(MN)$ обозначим прямоугольник с диагональю MN и сторонами, параллельными осям Ox и Oy.

а) Зафиксируем на окружности C точку M. Найдите вероятность того, что при случайном выборе точки M во внутренности круга K ни одна из точек прямоугольника $R(MN)$ не лежит во внешности K.

б) Найдите вероятность того, что при случайном выборе точки M на окружности C и точки N во внутренности K ни одна из точек прямоугольника $R(MN)$ не лежит во внешности K.

4. Пусть M – симметрическая $n\times n$ матрица, а U – такое подпространство $\mathbb{R}^n$, что $x^TMx \le 0$ при всех $x\in U$.

Докажите, что если размерность U равна $n-1$, то матрица M имеет не более одного положительного собственного значения.

5. Сопоставим конечной группе G граф Γ следующим образом: два элемента $a, b\in G$ соединим ребром в том и только том случае, если $(ab^{-1})^2 \ne e$, где e – единица группы G.

Если $G=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, то пусть A обозначает матрицу смежности графа Γ ($a_{ij}=1$, если v_i и v_j соединены ребром, в противном случае $a_{ij}=0$). Докажите, что $\det A$ является четным числом.

6. Действительная последовательность $(x_n)_{n\ge 0}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $x_n \ne 0$ при всех $n\ge 0$;

б) $\begin{vmatrix} x_{n+k} & x_{n+k+1} & \dots & x_{n+2k} \\ x_{n+k-1} & x_{n+k} & \dots & x_{n+2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+k} \end{vmatrix} = a^n, \quad a\ne 0$, при всех $n\ge 0$.

Докажите, что существуют такие действительные числа $a_1, a_2, ..., a_k$, что

$$x_{n+k+1} = a_1x_{n+k} + ... + a_kx_{n+1} + (-1)^k a x_n, \quad \forall\, n\ge 0.$$

Время работы 4,5 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.