Республиканская студенческая олимпиада по математике (группа А, 2011 г.)

1. Пусть A — невырожденная матрица, в каждой строке которой есть только один ненулевой элемент — корень из единицы некоторой степени. Доказать, что существует такое целое число k, что $A^* = A^k$ (здесь $(A^*)_{ij} = (\overline{a_{ji}})$).

2. Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ — многочлен нечетной степени с целыми коэффициентами. Рассмотрим множество целых точек на его графике: $M = \{\, P_i = (b_i, f(b_i)) \,|\, b_i \in Z \,\}$. Доказать, что множество всех пар точек $P_i, P_j \in M$, расстояние между которыми является целым числом, конечно.

3. Числовая последовательность $(a_n), a_n \geq 0$, удовлетворяет неравенству $a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m \, \forall n, m \in N$. Доказать, что последовательность $(\sqrt[n]{a_n})$ имеет предел.

4. Пусть $A = [0;1[\times[0;1[$, и на множестве A задана функция
$$S(x,y) = \sum_{\frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} \leq 2,\ n,m \in N} x^m y^n.$$
Найти $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in A}} (1-xy^2)(1-x^2y)S(x,y)$.

5. С помощью циркуля и линейки построить директрису параболы, заданную на плоскости своим графиком.

6. Для произвольного числа $n \in N$ рассмотрим две суммы
$$\alpha_n := \sum_{j\geq 1} \sum_{\substack{1\leq k_1 < k_2 \cdots < k_j \leq n,\\ \text{все } k_j \text{ нечетны}}} \frac{1}{k_1 k_2 \cdots k_j}, \qquad \beta_n := \sum_{j\geq 1} \sum_{\substack{1\leq m_1 < m_2 \cdots < m_j \leq n,\\ \text{все } m_j \text{ четны}}} \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_j}.$$
Пусть $x_n = \alpha_n - \beta_n$. Найти асимптотику последовательности (x_n) (т.е. такие $\lambda, \mu \in R$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\lambda n^\mu} = 1$).

Республиканская студенческая олимпиада по математике (группа А, 2011 г.)

1. Пусть A — невырожденная матрица, в каждой строке которой есть только один ненулевой элемент — корень из единицы некоторой степени. Доказать, что существует такое целое число k, что $A^* = A^k$ (здесь $(A^*)_{ij} = (\overline{a_{ji}})$).

2. Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ — многочлен нечетной степени с целыми коэффициентами. Рассмотрим множество целых точек на его графике: $M = \{ P_i = (b_i, f(b_i)) \mid b_i \in Z \}$. Доказать, что множество всех пар точек $P_i, P_j \in M$, расстояние между которыми является целым числом, конечно.

3. Числовая последовательность $(a_n), a_n \geq 0$, удовлетворяет неравенству $a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m \; \forall n, m \in N$. Доказать, что последовательность $(\sqrt[n]{a_n})$ имеет предел.

4. Пусть $A = [0;1[\times[0;1[$, и на множестве A задана функция
$$S(x,y) = \sum_{\frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} \leq 2,\; n,m \in N} x^m y^n.$$
Найти $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in A}} (1 - xy^2)(1 - x^2 y) S(x,y)$.

5. С помощью циркуля и линейки построить директрису параболы, заданную на плоскости своим графиком.

6. Для произвольного числа $n \in N$ рассмотрим две суммы
$$\alpha_n := \sum_{j\geq 1} \sum_{\substack{1\leq k_1 < k_2 \cdots < k_j \leq n,\\ \text{все } k_j \text{ нечетны}}} \frac{1}{k_1 k_2 \cdots k_j}, \qquad \beta_n := \sum_{j\geq 1} \sum_{\substack{1\leq m_1 < m_2 \cdots < m_j \leq n,\\ \text{все } m_j \text{ четны}}} \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_j}.$$
Пусть $x_n = \alpha_n - \beta_n$. Найти асимптотику последовательности (x_n) (т.е. такие $\lambda, \mu \in R$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\lambda n^\mu} = 1$).

Республиканская студенческая олимпиада по математике (группа Б, 2011 г.)

1. Найти все функции $f : C \to C$, удовлетворяющие функциональному уравнению
$$f(z) + z \cdot f(1-z) = 1 + z.$$

2. Вычислить определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & h & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & hx & h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \cdots & h \end{vmatrix}$.

3. Последовательность (S_n) задана следующим образом:
$$S_1 = \ln a, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - S_k), \quad n \geq 2.$$
Доказать, что последовательность (S_n) сходится и найти ее предел.

4. Пусть $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $f(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)}$.
Найти: а) множество задания функции f;
б) точку минимума функции f.

5. Найти дифференцируемые функции $u : R \to R$, удовлетворяющие соотношениям
$$u'(t) = u(t) + \int\limits_0^1 u(\tau) d\tau, \quad u(0) = 1.$$

6. Известно, что наибольший угол, под которым эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ может пересекать концентричную ему окружность, равен 45°. Найти отношение a/b полуосей эллипса.

Республиканская студенческая олимпиада по математике (группа Б, 2011 г.)

1. Найти все функции $f : C \to C$, удовлетворяющие функциональному уравнению
$$f(z) + z \cdot f(1-z) = 1 + z.$$

2. Вычислить определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & h & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & hx & h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \cdots & h \end{vmatrix}.$

3. Последовательность (S_n) задана следующим образом:
$$S_1 = \ln a, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - S_k), \quad n \geq 2.$$
Доказать, что последовательность (S_n) сходится и найти ее предел.

4. Пусть $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $f(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)}$.
Найти: а) множество задания функции f;
б) точку минимума функции f.

5. Найти дифференцируемые функции $u : R \to R$, удовлетворяющие соотношениям
$$u'(t) = u(t) + \int\limits_0^1 u(\tau) d\tau, \quad u(0) = 1.$$

6. Известно, что наибольший угол, под которым эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ может пересекать концентричную ему окружность, равен 45°. Найти отношение a/b полуосей эллипса.

Республиканская студенческая олимпиада по математике (Группа А, 2011г.)

1. Пусть A — невырожденная матрица, в каждой строке которой есть только один ненулевой элемент — корень из единицы некоторой степени. Доказать, что существует такое целое число k, что $A^* = A^k$ (здесь $(A^*)_{ij} = (\overline{a_{ji}})$).

Решение. Легко усмотреть, что $AA^* = E$ — единичная матрица. Очевидно, что произведение двух матриц рассматриваемого вида снова будет иметь тот же вид, а обратной к A будет A^*. Поэтому все такие матрицы образуют группу по умножению.

Если в i-ой строке стоит корень из 1 степени $r_i, i = \overline{1,n}$, то можно считать, что все ненулевые элементы A являются корнями из 1 степени $N = k_1k_2...k_n$. Можно считать, что A является элементом конечной группы: имеется N ненулевых элементов, которые могут занимать $n!$ различных позиций. Если k-порядок этой группы, то $A^k = E$. Отсюда $A^* = A^kA^* = A^{k-1}(AA^*) = A^{k-1}$.

2. Пусть $f(x) = a_nx^n+\cdots+a_0$ — многочлен нечетной степени с целыми коэффициентами. Рассмотрим множество целых точек на его графике: $M = \{\, P_i = (b_i, f(b_i)) \,|\, b_i \in Z \,\}$. Доказать, что множество всех пар точек $P_i, P_j \in M$, расстояние между которыми является целым числом, конечно.

Решение. Пусть $P = (a, f(a))$ и $Q = (b, f(b)) \in M; d(P,Q) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2$ — точный квадрат. $f(b) - f(a) = a_n(b^n - a^n) + ... + a_1(b-a) = (b-a)[...]$. $d^2 = (b-a)^2(1+[...]^2)$. Отсюда $1 + [...]^2$ является точным квадратом. Это возможно только в том случае, когда $[...] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, т.е. $f(b) = f(a)$. Для многочлена нечетной степени n всегда существует столь большое $N \in \mathbb{N}$, что $f\Big(\{N+1, N+2, ...\}\Big) \cap f\Big(\{..., N-1, N\}\Big) = \emptyset$ и $f\Big(\{-N-1, -N-2, ...\}\Big) \cap f\Big(\{-N, -N+1, ...\}\Big) = \emptyset$, причем на множествах $\{N+1, N+2, ...\}$ и $\{-N-1, -N-2, ...\}$ функция f строго монотонна. Поэтому все такие $a, b \in \mathbb{Z}$, для которых $f(a) = f(b)$, лежат на отрезке $[-N, N]$, т.е. число пар (P,Q), для которых $d(P,Q) \in \mathbb{Z}$, конечно.

3. Числовая последовательность $(a_n), a_n \geq 0$, удовлетворяет неравенству $a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m \; \forall n, m \in N$. Доказать, что последовательность $(\sqrt[n]{a_n})$ имеет предел.

Решение. 1) Если $\exists a_m = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq m \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = 0$.

2) $a_n > 0, \forall n$. Обозначим $b_n = \lg a_n \Rightarrow b_{n+m} \leq b_n + b_m$ и $\lg \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{b_n}{n}$.

Выбираем произвольно m и фиксируем. любое n представимо в виде $n = q(n)m + r(n)$, где $0 \leq r(n) < m$. $b_n = b_{q(n)m+r(n)} \leqq q(n)b_m + b_{r(n)} \leq q(n)b_m + c, c = \max\{b_0, b_1, ..., b_{m-1}\}$.

$\dfrac{b_n}{n} \leq \dfrac{q(n)}{n}b_m + \dfrac{c}{n} \Rightarrow \overline{\lim}\dfrac{b_n}{n} \leq \dfrac{b_m}{m}, \forall m$, т.к. $1 = \dfrac{q(n)}{n}\cdot m + \dfrac{r(n)}{n} \Rightarrow \dfrac{q(n)}{n} \to \dfrac{1}{m}$.

$\overline{\lim}\dfrac{b_n}{n} \leq \underline{\lim}\dfrac{b_n}{n} \Rightarrow \exists \lim \dfrac{b_n}{n} \leq b_1$. $\sqrt[n]{a_n} = 10^{\frac{b_n}{n}} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n}$, причем конечный.

4. Пусть $A = [0;1[\times[0;1[$, и на множестве A задана функция

$$S(x,y) = \sum_{\frac{1}{2}\le\frac{m}{n}\le 2,\ n,m\in N} x^m y^n.$$

Найти $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in A}} (1-xy^2)(1-x^2y)S(x,y)$.

Решение. $S(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=n}^{4n} x^m y^{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=n}^{4n-2} x^m y^{2n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(y^{2n}\dfrac{x^n - x^{4n+1}}{1-x} + y^{2n-1}\dfrac{x^n - x^{4n-1}}{1-x}\right) =$
$\ldots = \dfrac{xy(1+x+y+xy-x^2y^2)}{(1-xy^2)(1-x^2y)} \Rightarrow \lim = 3.$

5. С помощью циркуля и линейки построить директрису параболы, заданную на плоскости своим графиком.

Решение. Построение основано на следующих двух фактах:

а) прямая, проходящая через середины параллельных между собой хорд параболы, параллельна оси параболы;

б) пучок лучей, параллельный оси параболы, при зеркальном отражении от параболы, проходит через фокус параболы.

6. Для произвольного числа $n \in N$ рассмотрим две суммы

$\alpha_n := \sum\limits_{j\ge1}\Big(\sum\limits_{\substack{1\le k_1<k_2\cdots<k_j\le n,\\ \text{все } k_j \text{ нечетны}}} \frac{1}{k_1k_2\cdots k_j}\Big),\quad \beta_n := \sum\limits_{j\ge1}\Big(\sum\limits_{\substack{1\le m_1<m_2\cdots<m_j\le n,\\ \text{все } m_j \text{ четны}}} \frac{1}{m_1m_2\cdots m_j}\Big).$

Пусть $x_n = \alpha_n - \beta_n$. Найти асимптотику последовательности (x_n) (т.е. такие $\lambda,\mu\in R$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\lambda n^{\mu}} = 1$).

Решение. Пусть, например, $n = 2l$. Рассмотрим многочлен

$$f_n(x) = \left(x+\frac{1}{1}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)\ldots\left(x+\frac{1}{2l-1}\right).$$

Легко видеть, что $\alpha_n = f_n(1)-1$. Аналогично для многочлена $g_n(x) = (x+\dfrac{1}{2})(x+\dfrac{1}{4})\ldots(x+\dfrac{1}{2l})$ имеем $\beta_n = g_n(1)-1$. Отсюда $x_n = \alpha_n - \beta_n = \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2l}{1\cdot3\cdot5\ldots\cdot(2l-1)} - \dfrac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2l+1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2l)}$.

Из формулы Валлиса $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$ получаем эквивалентность

$\dfrac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2l-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2l)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi l}}$. Поэтому $x_n \sim \sqrt{\pi l} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi l}}(2l+1) \sim \sqrt{\pi l} - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{l} = \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)\sqrt{n}$.
Случай $n = 2l+1$ приводит к тому же результату.

Республиканская студенческая олимпиада по математике (Группа Б, 2011г.)

1. Найти все функции $f : C \to C$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(z) + z \cdot f(1-z) = 1 + z.$$

Решение. $\begin{cases} f(z) + zf(1-z) = 1+z \\ f(1-z) + (1-z)f(z) = 2-z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (z^2 - z + 1)f(z) = z^2 - z + 1.$

Пусть α и $\overline{\alpha}$ — корни уравнения $z^2 - z + 1 = 0$. Тогда $\alpha + \overline{\alpha} = 1$, $\alpha\overline{\alpha} = 1$ и $f(z) = 1\ \forall z \neq \alpha, \overline{\alpha}$. Пусть $f(\alpha) = a$, $f(\overline{\alpha}) = b$. Тогда $\begin{cases} a + \alpha b = 1 + \alpha \\ b + \overline{\alpha}a = 1 + \overline{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow\ b + \overline{\alpha}a = 1 + \overline{\alpha}.$

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \neq \alpha, \overline{\alpha}, \\ a, & z = \alpha, \text{где } a - \text{произвольное}, \\ 1 + \overline{\alpha}(1-a), & z = \overline{\alpha}. \end{cases}$$

2. Вычислить определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & h & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & hx & h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \cdots & h \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавляем первый столбец ко второму и имеем
$\Delta_n = (x+h)\Delta_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \Delta_n = (x+h)^n$

3. Последовательность (S_n) задана следующим образом:

$$S_1 = \ln a, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - S_k), \quad n \geq 2.$$

Доказать, что последовательность (S_n) сходится и найти ее предел.

Решение. $S_{n+1} = S_n + \ln(a - S_n) \quad (1)$
Рассмотрим функцию $f(x) = x + \ln(a-x)$, $x < a$. Из неравенства $\ln(1+x) \leq x$, $x > -1$, следует, что $f(x) \leq x + a - 1 - x = a - 1$, $x < a$. Если $x \leq a - 1$, то $\ln(a-x) \geq 0$ и, поэтому, $f(x) \geq x$. Так как $S_1 = \ln a \leq a - 1$, то $S_1 \leq S_2 = f(S_1) \leq S_3 \leq \cdots$. Следовательно, последовательность (S_n) возрастает и ограниченна, а, значит имеет конечный предел S. Переходя в неравенстве (1) к пределу, имеем $S = S + \ln(a - S)\ \Rightarrow\ S = a - 1$.

4. Пусть $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $f(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)}$. Найти: а) множество задания функции f; б) точку минимума функции f.

Решение. 1) $D(f) = (-1; 5)$.

$$2) \quad f(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)} = [\tau = \frac{1}{x}] = -\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{\tau^6 d\tau}{\tau^{2+\alpha} p(\tau)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^{4-\alpha} d\tau}{p(\tau)} \ \Rightarrow\ f(\alpha) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(4-\alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x^\alpha + x^{4-\alpha})dx}{p(x)} \geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{p(x)} = f(2), \forall \alpha \in (-1; 5).$$

Следовательно, $\alpha = 2$ — точка минимума f.

5. Найти дифференцируемые функции $u: R \to R$, удовлетворяющие соотношениям

$$u'(t) = u(t) + \int\limits_0^1 u(\tau)d\tau, \quad u(0) = 1.$$

Решение. Обозначим $b = \int\limits_0^1 u(t)dt$, тогда $u(t) = Ce^x - b$.

$$\begin{cases} u(0) = C - b = 1 \\ b = C(e-1) - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C - b = 1 \\ C(e-1) - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{e-1}{3-e},\ C = \frac{2}{3-e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{3-e}(2e^t - e + 1).$$

6. Известно, что наибольший угол, под которым эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ может пересекать концентричную ему окружность, равен $45°$. Найти отношение a/b полуосей эллипса.

Решение. Пусть $P(x_0, y_0)$ — точка пересечения эллипса и окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащая в первой четверти.

Уравнение касательной l_e к эллипсу в точке P имеет вид $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$, а уравнение касательной l_o к окружности в P — $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$. Из этих уравнений находим x_0 и y_0: $x_0^2 = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$, $y_0^2 = \frac{(a^2 - r^2)b^2}{a^2 - b^2}$.

Угол $\varphi = (\widehat{l_e, l_o}) = (\widehat{n_e, n_o}) = (\widehat{\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\}, \{x_0, y_0\}})$, где $n_e = \{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\}$, $n_o = \{x_0, y_0\}$ — нормали в $P(x_0, y_0)$ к эллипсу и окружности соответственно.

$$\cos\varphi = \frac{x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1 \cdot ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2} \cdot r} =: f(r).$$

Для нахождения $\min f(r)$ находим решения уравнения $f'(r) = 0$, т.е. решения уравнения $\frac{a^2 + b^2 - r^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}} = 0$. Отсюда $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Тогда

$$\cos\varphi_0 = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)/2}\sqrt{(a^2 + b^2)/2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

По условию $\frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(t = \frac{a}{b}) \Rightarrow t = \sqrt{2} + 1$.