

АЛГОРИТМЫ КРЕДИТНОГО СКОРИНГА НА ОСНОВЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В. С. Дежемесова, Б. А. Барановский

На практике управление кредитным риском коммерческим банком предполагает решение задач анализа и классификации заемщиков по степени кредитоспособности. Важным инструментом анализа и принятия решений является *кредитный скоринг* (*credit scoring*), осуществляемый с помощью систем автоматической классификации потенциальных заемщиков коммерческого банка на основе доступной информации.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Будем предполагать, что при оценке (прогнозировании) состояния заемщика на момент окончания срока кредитного договора наряду с вектором контролируемых признаков $x = (x_1, \dots, x_N)' \in \mathfrak{R}^N$ (балансовых показателей и показателей качества обслуживания долга) используется вектор экзогенных переменных (факторов) $z = (z_1, \dots, z_M)' \in Z \subset \mathfrak{R}^M$, описывающих влияние на состояние заемщиков со стороны общих внешних экономических факторов.

Предположим, что существующая между векторами $x \in \mathfrak{R}^N$ и $z \in Z$ статистическая зависимость для t -го заемщика описывается эконометрической моделью многомерной линейной регрессии:

$$x_t = B_l z_t + u_t, \quad l \in S(L) = \{1, \dots, L\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где для класса заемщиков Ω_l : $B_l = (b_{lje}) - (N \times M)$ - матрица коэффициентов регрессии, $Z \subset \mathfrak{R}^M$ – ограниченная замкнутая область, такая, что $(B_i - B_j)z \neq 0, (i \neq j)$ при $z \in Z$; $u_t \in \mathfrak{R}^N$ – гауссовский случайный вектор с нулевым средним значением и невырожденной ковариационной $(N \times N)$ - матрицей $\Sigma_l = (\sigma_{ljk})$.

Пусть истинные значения параметров $\{\pi_l\}, \{B_l\}, \{\Sigma_l\} (l \in S(L), L \geq 2)$ модели (1) не известны. Имеется неклассифицированная обучающая выборка значений признаков $X = \{x_1, \dots, x_T\}$ объема T из классов $\{\Omega_l\} (l \in S(L))$, соответствующая последовательности значений факторов $Z = \{z_1, \dots, z_T\}$, где значение вектора признаков $x_t \in \mathfrak{R}^N$ определяется на основании (1) для заданного номера класса l и значения вектора факторов $z_t \in Z (t = 1, \dots, T)$.

В рамках рассматриваемой модели наблюдений выборку регрессионных наблюдений $X = \{x_1, \dots, x_T\}$, соответствующую последовательности значений факторов $Z = \{z_1, \dots, z_T\}$, можно рассматривать как случайную выборку из смеси распределений регрессионных наблюдений, плотность распределения вероятностей для которой имеет вид:

$$p_\pi(x, z, \theta) = \sum_{l=1}^L \pi_l n_N(x | B_l z, \Sigma_l) = \sum_{l=1}^L \pi_l p(x, z, \theta_l), \quad x \in \mathfrak{R}^N, \quad z \in Z, \quad (2)$$

где $\theta \in \Theta \subset \mathfrak{R}^m$ – составной вектор всех параметров смеси, образованный из независимых элементов матриц $\{B_l\}$, $\{\Sigma_l\}$ и априорных вероятностей $\{\pi_l\}$ ($l \in S(L)$); $p(x, z, \theta_l) \equiv n_N(x | B_l z, \Sigma_l)$ ($x \in \mathfrak{R}^N$) – условная плотность нормального распределения для заданного значения $z \in Z$; θ_l – составной вектор параметров модели для класса Ω_l .

Имеют место следующие задачи кластерного анализа смеси (2) по неклассифицированной обучающей выборке $\{X, Z\}$:

- 1) статистическое оценивание вектора параметров $\theta \in \Theta \subset \mathfrak{R}^m$ (вычисление оценок максимального правдоподобия $\{\pi_l\}, \{B_l\}, \{\Sigma_l\}$ ($l \in S(L)$);
- 2) классификации, обучающей выборки $\{X, Z\}$, т.е. оценивание вектора классификации выборки $d = (d_t) \in S^T(L)$.
- 3) классификация вновь поступающих наблюдений (x_τ, z_τ) ($\tau = T + 1, \dots, T + n, n \geq 1$).

АЛГОРИТМ КРЕДИТНОГО СКОРИНГА

Для решения задач 1, 2 предлагается итерационный алгоритм расщепления смеси распределений регрессионных наблюдений (2) из класса EM-алгоритмов, позволяющий одновременно вычислять оценки максимального правдоподобия параметров $\{\hat{\pi}_l\}, \{\hat{B}_l\}, \{\hat{\Sigma}_l\}$, а также апостериорные вероятности классов. Решающее правило классификации на основе данного алгоритма эквивалентно решающему правилу по максимуму апостериорной вероятности классов вида:

$$d_t^{(k)} = \operatorname{argmax} \left\{ p^{(k)}(l | x_t, z_t, \theta) \right\} \text{ по } l \in S, \quad (3)$$

где $\left\{ p^{(k)}(l | x_t, z_t, \theta) \right\}$ ($l \in S(L)$) – апостериорная вероятность отнесения регрессионного наблюдения (x_t, z_t) к классу Ω_l на итерации k ($1 \leq k \leq K$), определяемая по формуле:

$$p^{(k)}(l | x_t, z_t, \theta^{(k-1)}) = \frac{\pi_l^{(k-1)} p_l(x_t, z_t | \theta_l^{(k-1)})}{p_\pi(x_t, z_t, \theta^{(k-1)})},$$

где $\theta^{(0)}$, $\{\theta_l^{(0)}\}$ – заданные начальные значения векторов параметров.

При использовании в (3) известных значений параметров получаем решающее правило, эквивалентное байесовскому решающему правилу (БРП).

Получим представления для оценок максимального правдоподобия параметров смеси распределений регрессионных наблюдений (2), зависящие от апостериорных вероятностей. $\{p^{(k)}(l | x_t, z_t, \theta)\}$ ($l \in S(L)$) отношения регрессионного наблюдения (x_t, z_t) к классу Ω_l .

Теорема. В условиях описываемой выше модели наблюдения оценки максимального правдоподобия (МП-оценки) $\{\hat{\pi}_l\}, \{\hat{B}_l\}, \{\hat{\Sigma}_l\}$ $l \in S(L)$, параметров смеси (2) по неклассифицированной выборке регрессионных наблюдений $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$, $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N\}$ из классов $\{\Omega_l\}$, допускают представления:

$$\hat{B}_l = \sum_{i=1}^T x_i z_i' p(l | x_i, z_i, \theta) \left(\sum_{i=1}^T z_i z_i' p(l | x_i, z_i, \theta) \right)^{-1},$$

$$\hat{\Sigma}_l = \frac{\sum_{i=1}^T p(l | x_i, z_i, \theta) (x_i - \hat{B}_l z_i) (x_i - \hat{B}_l z_i)'}{\sum_{i=1}^T p(l | x_i, z_i, \theta)}, \quad \hat{\pi}_l = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T p(l | x_i, z_i, \theta).$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ

В таблице 1 и таблице 2 для алгоритма кластерного анализа приводятся оценки следующих характеристик: P^L и P^E – безусловная вероятность ошибки при классификации обучающей (learning) и экзаменационной (examine) выборки; P^{BPP} – риск байесовского решающего правила в условиях полной априорной информации.

Тестовый пример 1. В данном эксперименте для моделирования данных использовались значения параметров: $L = 2$, $N = 2$, $M = 3$,

$$n_1 = n_2 = 1000, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Полагалось, что $B_1 = B_2 + H$, где H – фиксированная матрица, определяющая расстояние Махаланобиса $\Delta(z)$ между классами, характеризующее степень разделимости классов

$$\Delta^2(z_0) = z_0^T H^T \Sigma^{-1} H z_0, \quad z_0 = (0.5; 0.5; 0.5).$$

Результаты экспериментов представлены в таблице 1. Как и следовало ожидать, при уменьшении межклассового расстояния вероятности ошибочной классификации увеличиваются, при этом точность классификации обучающей и новой экзаменационной выборки практически идентична и заметно уступают при большом межклассовом расстоянии точности БРП.

Таблица 1

Результаты анализа точности классификации

Δ	P^L	P^E	$P^{БРП}$
6	6,15%	6,8%	0,1%
4	11,75%	12,45%	2,2%
2,5	14,5%	14,15%	10,6%
1	47,65%	47,95%	30,85%
0	42,8%	42,6%	50%

Тестовый пример 2. Целью данного эксперимента было выяснения влияние точности задания начальной классификации обучающей выборки на итоговую классификацию. В качестве начальных значений вектора классификации $d = (d_i) \in S(L)^T$ использовались векторы, полученные из истинного вектора классификации внесением 5%, 10%, 30% ошибок. Актуальность данной проблемы отмечалась в [3].

На основе приведенных в таблице 2 результатов можно сделать вывод, что увеличение доли ошибок во входных данных приводит к существенному увеличению безусловной вероятности ошибки.

Таблица 2

Влияние входного вектора классификации на итоговую классификацию

Δ	Доля ошибок 5%		Доля ошибок 10%		Доля ошибок 30%		$P^{БРП}$
	P^L	P^E	P^L	P^E	P^L	P^E	
6	7,25%	7,9%	7,5%	7,75%	8,9%	8,6%	0,1%
4	13,05%	13,35%	13,05%	14,3%	13,2%	13,45%	2,2%
2,5	16,1%	16,7%	16,5%	16,95%	17,55%	18%	10,6%
1	48,1%	48%	47,65%	47,95%	48,2%	48,15%	30,85%
0	43,75%	43,15%	46,8%	46,6%	47,8%	48,55%	50%

Литература

1. Гринь Н.В., Малюгин В.И. Исследование точности методов классификации многомерных данных в задачах кредитного скоринга / Н.В. Гринь, В.И. Малюгин // Вестник ГрГУ. Сер.2. 2008. №1. С. 77–85.

2. *Thomas, L.C.* A survey of credit and behavioural scoring: forecasting financial risk of lending to consumers / L. C. Thomas // *International Journal of Forecasting*. 2000. V. 6. P. 49–172.
3. *Малюгин В.И.* Исследование эффективности алгоритмов классификации заемщиков банков на основе балансовых коэффициентов / В.И. Малюгин, О.И. Корчагин, Н.В. Гринь // *Банковский Вестник* № 4 2009. С. 27–32.

РАЗРАБОТКА ТЕСТОВ КОНТРОЛЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ НА ВЕРХНИХ УРОВНЯХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

А. В. Ильинкова

Анализируется состояние проблемы контроля сверхбольших интегральных схем (СБИС). Рассматриваются задачи направленного построения тестов контроля по поведенческому описанию объекта на уровне межрегистровых передач (RTL) на языке VHDL. Класс функциональных неисправностей, рассматриваемых при направленном построении теста, соответствует неисправностям константного типа реализаций СБИС на элементах соответствующих библиотек проектирования. Предлагается метод направленного построения теста, который позволяет на ранних этапах проектирования анализировать контролепригодность проекта и ее зависимость от применяемых технологических библиотек проектирования.

Требования к надежности цифровых систем постоянно возрастают не только в областях, в которых отказ может привести к катастрофическим событиям, но и во всех других применениях. Одной из самых важных компонентов систем обеспечения высокой надежности электронных систем является способность определить наличие или отсутствие ошибки функционирования системы. Проблема построения тестов на всем интервале развития интегральной схемотехники является одной из наукоемких проблем, которые до настоящего времени не получили эффективного теоретического и практического решения. Задача построения тестов принадлежит к классу NP- трудных проблем. В связи с высокой сложностью построения тестов контроля и диагностирования функционально-сложных цифровых систем применяются методы контролепригодного проектирования, которые направлены на снижение сложности задачи. В то же время проблема построения тестов остается высоко актуальной, так как все используемые подходы к проектированию не решают по разным причинам задачу контроля цифровых систем.

Тесты необходимы на всех этапах жизненного цикла цифровой системы. Актуальность тестов обусловлена потребностью в тестах на этапе проектирования для анализа корректности проектов на всех этапах про-

ектирования, так как методы формальной верификации не достигли уровня практического применения. На этапе производства тесты необходимы для контроля исправности готовых изделий, на этапе эксплуатации для подтверждения исправности, работоспособности или правильного функционирования устройства. На каждом из этапов жизненного цикла изделия необходимо контролировать объект с учетом моделей неисправностей, соответствующих физическим дефектам, возникающим в связи с рядом конструктивно-технологических факторов и дестабилизирующим воздействием внешней среды.

Основная цель работы - построение тестов контроля цифровых систем на верхних уровнях проектирования для своевременной оценки степени контролепригодности проекта, реализованного в разных технологических библиотеках и сокращения сроков проектирования объекта.

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ

1. Выбор математической платформы для разработки программной модели объекта, представленного в виде описания поведения или RTL на языке VHDL.

2. Направленное построение теста контроля цифровой системы в целом в классе неисправностей, свойственных физическому объекту.

3. Построение тестов функциональных блоков на основе моделирования и символьных вычислений.

Решение данной задачи в указанной постановке позволяет, во-первых, уменьшить размерность сложной наукоемкой задачи, во-вторых, на ранних этапах в динамике анализировать качество проекта с точки зрения его контролепригодности, в-третьих, оценить контролепригодность проекта применительно к разным технологическим библиотекам на ранних этапах проектирования.

Как математическую платформу для построения поведенческой модели цифровой системы, представленной в виде управляющей и операционной частей, используем DD (диаграмма принятия решений) потоков данных и DD потока управления, которые строятся на основе VHDL - описания объекта. Программный код такого описания содержит операторы языка VHDL, составляющие его синтезируемое подмножество.

Пути данных распространяются через функциональные блоки, которые могут представлять собой комбинационные или последовательностные схемы. При описании системы каждая выходная и внутренняя переменная описывается в виде DD потока данных. Нетерминальные вершины DD потока данных содержат значения сигналов управления, а оконечные, терминальные, узлы описывают соответствующие данные, т.е.

состояния первичных входов, регистров, операции, константы. Управляющая часть описывается конечным автоматом, таблица переходов которого описывается единственной DD. Нетерминальные узлы представляют текущее состояние и входные условия (состояния) управляющей части, а терминальные – следующие логические состояния, которые управляют распространением и обработкой информации в системе.

Описание объекта на языке VHDL на RTL-уровне не несет информации о структурном наполнении объекта, тем не менее, на этапе структурного синтеза каждый фрагмент описания будет реализован в виде некоторой структуры в заданном элементном базисе.

Рассмотрим задачу построения теста в следующей постановке. Цифровая система представлена на RTL-уровне или уровне описания поведения. Структурная реализация системы отсутствует, но известны технологические библиотеки элементов, которые доступны на этапе его синтеза. Необходимо построить тест контроля объекта, при этом функциональные модели рассматриваемых неисправностей должны соответствовать моделям неисправностей константного типа, свойственных реальному физическому объекту. Исходными данными для решения задачи является VHDL –описание объекта. По данному описанию необходимо построить DD потоков данных и DD потока управления, которые затем необходимо перевести в множество предикатов изменения состояния системы, и затем с использованием предикатов будут определяться ограничения при активизации и распространении неисправностей.

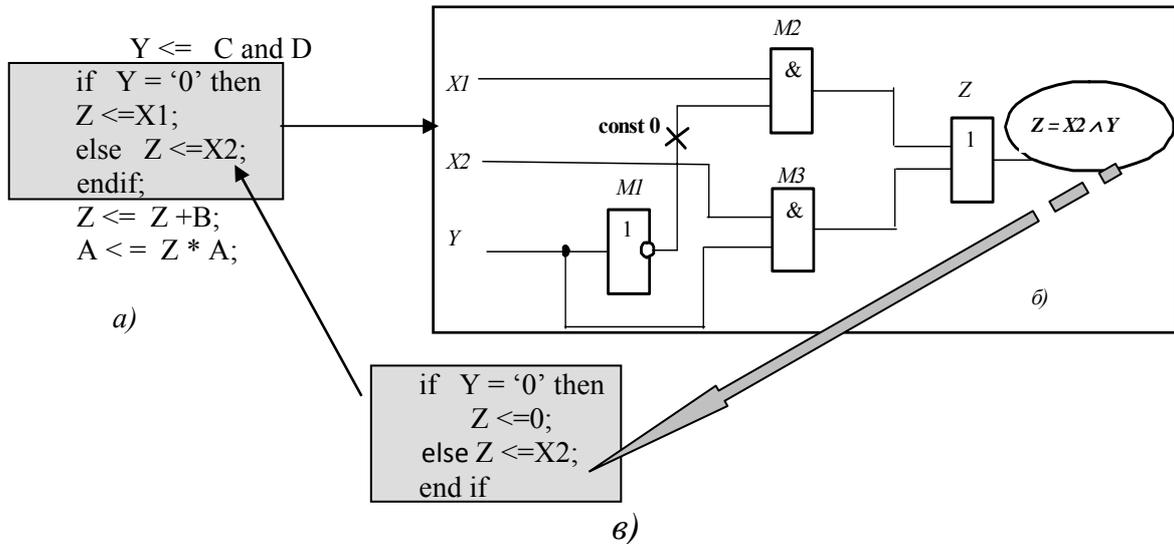
ОБЩИЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТЕСТА:

1. VHDL-описанию объекта строим DD потоков данных и DD потока управления (используется синтезируемое подмножество языка VHDL).
2. Выбираем очередной оператор программного кода.
3. Выбираем очередную функциональную неисправность оператора.
4. Извлекаем функциональные ограничения для очувствления данной неисправности.
5. Извлекаем функциональные ограничения для распространения эффекта неисправности к выходам системы.
6. Выполняем разрешение ограничений.
7. Если ограничения удовлетворены, то сравниваем реакции системы по выполнению программного VHDL - кода с исходным оператором и с оператором-мутантом. Если реакции различные, то фиксируем найденный тест контроля определенной группы неисправностей.
8. В противном случае, переходим к п.3 или к п. 2, или на выход при окончании процесса или по времени.

Иерархический подход к генерации тестов позволяет на самом высоком уровне анализировать способность системы к тестированию, уменьшает размерность задачи. При этом можно сравнивать контролепригодность объекта в зависимости от используемой технологической элементной базы. Можно генерировать тесты для разных возможных проектов реализаций (различные технологические библиотеки) и выбирать решение, которое является лучшим с точки зрения способности к тестированию.

Предложенный метод основан на построении моделей функциональных неисправностей элементов программного кода. В работе исследуются известные подходы к построению функциональных неисправностей, предлагается методика построения функциональных неисправностей по структурному представлению механизмов реализации операторов, что представлено схематично на рисунке, где показано соответствие между ошибкой оператора if-then-else (функциональной неисправностью моделируемой системы) и неисправностью константного типа некоторого «механизма» его структурной реализации.

Результаты работы опубликованы в сборниках материалов конференций и научных журналах [1–5].



Литература

1. Золоторевич Л. А. Построение тестов контроля цифровых систем на уровне межрегистровых передач // Л.А. Золоторевич, А.В. Ильинкова // Информатика. 2010. №1. С. 112–121.
2. Золоторевич Л. А. Разработка тестов для анализа контролепригодности СБИС на верхних уровнях проектирования // Л.А. Золоторевич, А.В. Ильинкова // Автоматика и телемеханика. 2010. В печати.

3. *Золоторевич Л.А.* Экспериментальное исследование базовых методов моделирования в системе ModelSim / Л.А. Золоторевич, А.В. Ильинкова // The International Conference Computer– Aided Design of Diskrete Devices (CAD-DD'07). Vol.1. Minsk. 2007. P. 245–251.
4. *Золоторевич Л.А.* Анализ полноты тестов контроля цифровых устройств на основе решения задачи выполнимости // Л.А. Золоторевич, А.В. Ильинкова // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Современная радиоэлектроника: научные исследования и подготовка кадров». Минск, 23–24 апреля 2008. С. 25–27.
5. *Золоторевич Л.А.* Анализ тестов контроля цифровых устройств по отрицательной нормальной форме реализуемой функции // Л.А. Золоторевич, А.В. Ильинкова // The Fifth International Scientific Conference «Information technologies in industry» ITI* 2008. P. 107–108.
- Ibarra O. H., Sahni S.* Polynomially Complete Fault Detection Problems // IEEE Transactions on Computers. 1975. V. C. 24. No. 3. P. 242-249.
7. *Murray B. T., Hayes J. P.* Hierarchical Test Generation Using Precomputed Tests for Modules // International Test Conference. 1988. P. 221–229.
8. *Ubar R.* Test Synthesis with Alternative Graphs // IEEE Design and Test of Computers. 1996. V. 13. No. 1. P. 48–57.
9. *Jervan G., Peng Z., Ubar R.* Test Cost Minimization for Hybrid BIST // IEEE Int. Symp. on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems (DFT'00). 2000. P. 283–291.
10. *Roth J.P.* Diagnosis of automata failures: a calculus and a method // IEEE Trans. on Computers. 1966. V. 15. No. 7. P. 278–291.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ПАРАРЕАЛЬНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОДУ

В. А. Карпейчик

В настоящее время особенно актуальным становится вопрос наличия алгоритмов, способных выполняться параллельно несколькими вычислительными модулями, так как при исполнении последовательного алгоритма на вычислительной системе, использующей несколько вычислительных модулей, вычисления будут производиться только на одном из них. Важной проблемой при моделировании и решении сложных задач является решение дифференциальных уравнений и их систем. В данной работе проведено численное исследование одного парареального метода решения систем ОДУ, впервые представленного в 2001 году Габриэлем Туриничи и Айвоном Мэдэем[1]. Парареальным они называют алгоритм решения исходной задачи, позволяющий производить параллельные вычисления на отрезках временной оси дифференциальной задачи.

Пусть имеем дифференциальную задачу

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u(t)), \\ u(T_0) &= u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in [T_0, T] = \Omega$, $u \in \Omega \rightarrow R^n$, $f \in R^n \rightarrow R^n$.

Для построения парареального алгоритма разобьем Ω на N отрезков $\Omega_n = [T_n, T_{n+1}]$, где $n = 0, 1, \dots, N-1$ и решаем на каждом Ω_n задачу[2]

$$\begin{aligned} u_n'(t) &= f(u_n(t)), \\ u_n(t) &= U_n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $t \in \Omega_n$, а значения U_0, \dots, U_n должны выбираться так, чтобы $u_i(T_{i+1}) = u_{i+1}(T_{i+1}), i = 0, \overline{N-2}$.

То есть U_n должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} U_0 &= u^0, \\ U_n &= \varphi_{\Omega_{n-1}}(U_{n-1}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = 0, 1, \dots, N-1$, $\varphi_{\Omega_{n-1}}(U_{n-1})$ – это точное решение задачи вида (2) на отрезке Ω_{n-1} с начальным условием равным U_{n-1} . Тогда систему (3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} U_0 - u^0 &= 0, \\ U_1 - \varphi_{\Omega_0}(U_0) &= 0, \\ U_{N-1} - \varphi_{\Omega_{N-2}}(U_{N-2}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) позволяет определить необходимые значения U_n для каждого из отрезков Ω_n . Решать ее можно, например, при помощи модифицированного метода Ньютона. Тогда запишем:

$$\begin{aligned} U_0^k &= u^0, k = 0, 1, \dots, \\ U_n^{k+1} &= \varphi_{\Omega_{n-1}}(U_{n-1}^k) + \varphi_{\Omega_{n-1}}'(U_{n-1}^k)(U_{n-1}^{k+1} - U_{n-1}^k), \\ k &= 0, 1, \dots; n = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь, пусть $F(T_{n-1}, T_n, U_{n-1})$ – приближенное решение к $\varphi_{\Omega_{n-1}}(U_{n-1})$ порядка p_0 , а $G(T_{n-1}, T_n, U_{n-1})$ – приближенное решение к $\varphi_{\Omega_{n-1}}'(U_{n-1})$ порядка p_1 , причем $p_0 > p_1$. Тогда справедливо[2]

$$\begin{aligned} \varphi_{\Omega_{n-1}}(U_{n-1}^k) &\approx F(T_{n-1}, T_n, U_{n-1}^k), \\ \varphi_{\Omega_{n-1}}'(U_{n-1}^k)(U_{n-1}^{k+1} - U_{n-1}^k) &\approx G(T_{n-1}, T_n, U_{n-1}^{k+1}) - G(T_{n-1}, T_n, U_{n-1}^k). \end{aligned}$$

Тогда из (5) можно записать парареальный алгоритм решения исходной задачи:

$$U_0^{k+1} = u^0,$$

$$U_n^{k+1} = F(T_{n-1}, T_n, U_{n-1}^k) + G(T_{n-1}, T_n, U_{n-1}^{k+1}) - G(T_{n-1}, T_n, U_{n-1}^k),$$

$$k = 0, 1, \dots; n = 1, \dots, N - 1,$$

где $U_n^0 = G(T_n, T_{n-1}, U_{n-1}^0)$.

Представим общий вид параллельного алгоритма при выполнении на N процессорах[1].

$$U_0^0 \leftarrow u^0$$

for i=0:N-1 do

$$U_{i+1}^0 \leftarrow G(T_i, T_{i+1}, U_i^0)$$

end for

Разбиваем Ω на N отрезков и вычисляем $F(T_n, T_{n+1}, U_{n-1}^0)$ параллельно на N процессорах, по одному отрезку на процессор.

$$k \leftarrow 0$$

while true do

$$U_0^{k+1} \leftarrow U_0^k$$

for i=0:N-1 do

вычисляем $G(T_i, T_{i+1}, U_i^{k+1})$

$$U_{i+1}^{k+1} = F(T_i, T_{i+1}, U_i^k) + G(T_i, T_{i+1}, U_i^{k+1}) - G(T_i, T_{i+1}, U_i^k)$$

end for

if сходимость

 выход

end if

Вычисляем $F(T_n, T_{n+1}, U_{n-1}^{k+1})$ параллельно на N процессорах, по одному отрезку на процессор.

$$k \leftarrow k + 1$$

end while

Для проверки эффективности алгоритма были проведены тесты на задаче нахождения орбиты Аренсторфа, которая представляет собой замкнутую кривую. Всего было произведено две серии тестов, первая – для достижения одинаковой точности. Вторая – тесты с одинаковым шагом сетки.

Все тесты производились на компьютере с двухъядерным процессоре Intel Core 2 Duo с тактовой частотой каждого ядра 2 ГГц и оперативной памятью 4 Гб.

В тестах сравнивались:

- последовательный алгоритм метода Рунге-Кутты 4-го порядка аппроксимации;
- параллельный алгоритм при запуске на одном ядре процессора;
- параллельный алгоритм при запуске на 2-х ядрах процессора.

Первая серия – тесты на достижение одинаковой точности. В таблице показана зависимость времени выполнения в секундах от количества витков вычисляемого решения.

Таблица

Алгоритм	1	2	3	4
Р-К 4	0.2	1.11	6.83	38.96
Параллельный на 1 ядре	0.39	1.37	8.63	18.02
Параллельный на 2 ядрах	0.29	1.15	6.42	9.83

Вторая серия – тесты с одинаковым шагом сетки $h=0.0003$. Ниже на рисунках приводятся результаты такого тестирования (точное решение показано прерывистой линией):

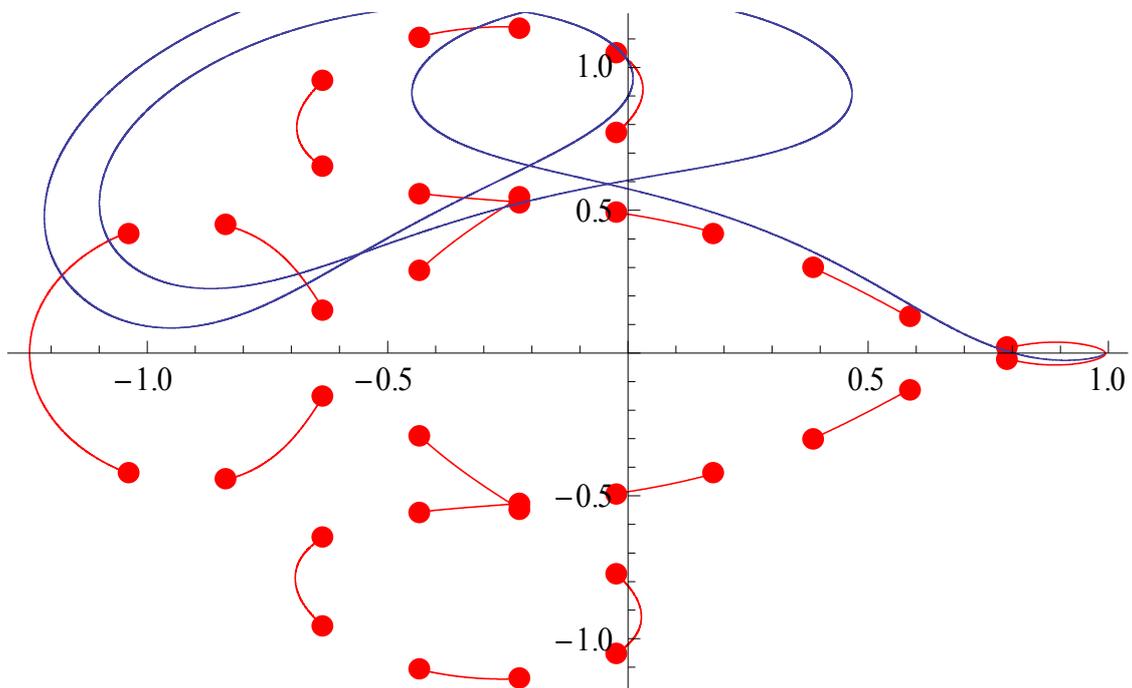


Рис. 1. Решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности, количество витков – 3, время выполнения – 6.352 сек.

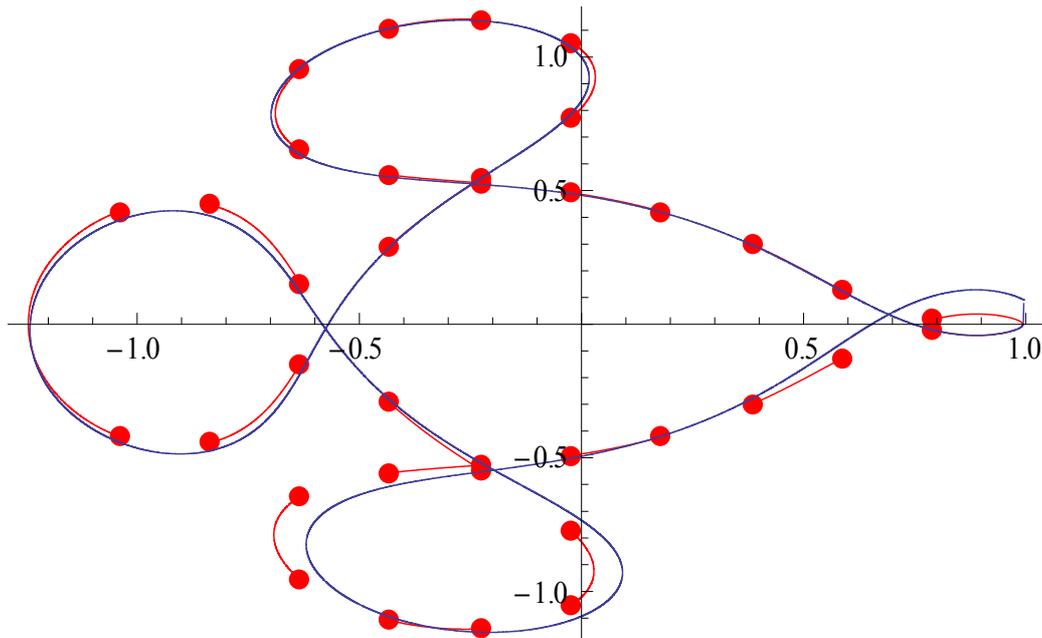


Рис. 2. Решение парареальным алгоритмом, количество витков – 4.
 Время выполнения: на одном ядре – 10.36 сек, на двух ядрах – 6.504 сек

Полученные результаты сравнения работы разных алгоритмов показали, что парареальный алгоритм ведет себя эффективнее, чем классический метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Во второй серии тестов примечательным является результат, полученный при вычислении с шагом сетки 0.0003, когда метод Рунге-Кутты 4-го порядка аппроксимации смог проделать только два витка, с сильной погрешностью в самом начале 3-его, а парареальный алгоритм почти закончил четвертый виток.

При этом необходимо отметить относительно невысокую скорость работы парареального алгоритма на сетке малой размерности. Это можно объяснить тем, что время тратится на инициализацию потоков, которые при малом количестве вычисляемых шагов излишни.

Литература

1. *Gunnar A. Staff and E.M. Rønquist* Stability of the parareal algorithm, Proceedings of the 15th International Conference on Domain Decomposition Methods (Berlin 2003). // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 40. Springer. 2004.
2. *M.J. Gander and E. Hairer* Nonlinear Convergence Analysis for the Parareal Algorithm. // Proceedings of the 17th International Conference on Domain Decomposition Methods. 2007.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК ХВОСТОВОГО ИНДЕКСА МЕТОДАМИ М.Б.ХИЛЛА И DPR УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

И. И. Комаров

В последние годы возрос интерес к задачам, в которых исходные данные могут быть описаны с помощью тяжёло-хвостовых распределений.

К тяжёло-хвостовым распределениям могут быть отнесены те распределения, хвост которых убывает на бесконечности медленнее, чем экспоненциальный хвост. Такие распределения могут не иметь конечного момента второго порядка и даже момента первого порядка и это в частности определяет специфику исследования.

Одной из важных характеристик при исследовании тяжёло-хвостовых данных является хвостовой индекс. С помощью него можно определить наличие в данных тяжёлых хвостов, а также количество конечных моментов.

Известны многочисленные оценки хвостового индекса: оценка Хилла [1], оценка отношения Goldie [2], УН-оценка Berline [3], момент-оценки Dekkers, Einmalh, de Naan [4], DPR оценка [5] и др.

Определение 1[6]. Случайная величина X будет устойчивой тогда и только тогда, когда логарифм ее характеристической функции $\varphi_X(t)$, $t \in R$ представим в виде:

$$\ln \varphi_X(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha + i\sigma^\alpha t \omega(t, \alpha, \beta), \quad (1)$$

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1} \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1, \\ -2\beta \ln |t| / \pi, & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\sigma > 0$, $\mu \in R$.

Из представления (1) видно, что класс устойчивых случайных величин представляет собой четырехпараметрическое семейство с параметрами $\alpha, \beta, \sigma, \mu$. Если характеристическая функция случайной величины X удовлетворяет (1), то будем писать $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$.

Определение 2. Параметр $\gamma = 1/\alpha$, где α хвостовой индекс, называется индексом экстремального значения (extreme value index, EVI) и определяет форму хвоста распределения случайной величины X [7].

Оценим хвостовой индекс, применив различные подходы в его оценивании для устойчивых случайных величин, и проведём сравнительный анализ полученных оценок.

МЕТОД ХИЛЛА

Предположим, что X_1, X_2, \dots, X_n выборка наблюдений за α -устойчивой случайной величиной X , $n \in \mathbb{N}$ и пусть

$$X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(n)}.$$

Оценка Хилла основана на $k+1$ верхней статистике, определяется как

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln X_{(i)} - \ln X_{(k+1)}), \quad (2)$$

$k \in [2; n/2]$ и является состоятельной.

Так как X_1, X_2, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$ независимые наблюдения, то оценка Хилла $H_{k,n}$ состоятельна для параметра $\gamma = \alpha^{-1}$, в следующем смысле: существует последовательность k , $k \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$, такая что

$$H_{k,n} \xrightarrow{p} \gamma. \quad (3)$$

Таким образом, найдя оценку Хилла, можно оценить хвостовой индекс α . Однако на практике очень сложно подобрать значение k . Один из способов оценки γ состоит в построении графика $\{H_{k,n}(k) : k = 2, \dots, n/2\}$. На графике выделяется интервал, на котором функция $\{H_{k,n}(k)\}$ ведёт себя стабильно. И в качестве оценки EVI выбирается среднее значение всех значений $\{H_{k,n}(k)\}$ на данном интервале.

DPR МЕТОД

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n выборка наблюдений за α -устойчивой случайной величиной X , $n \in \mathbb{N}$. Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas [5] предложили рассматривать оценку, которая использует независимые отношения вторых наибольших порядковых статистик к наибольшим порядковым статистикам в подгруппах наблюдений.

Согласно этой оценке выборка делится на l групп V_1, \dots, V_l , каждая из которых содержит m случайных величин, т.е. $n = l \cdot m$. На практике выбирается m и $l = \lfloor n/m \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Пусть

$$M_{li}^{(1)} = \max_{j=1,m} \{X_j : X_j \in V_i\}, \quad i = \overline{1, l},$$

и $M_{li}^{(2)}$ - второй наибольший элемент в той же группе V_i . Обозначим

$$k_{li} = \frac{M_{li}^{(2)}}{M_{li}^{(1)}},$$

$$z_l = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l k_{li}.$$

Пусть функция распределения $F(x)$ удовлетворяет, при $x \rightarrow \infty$, следующему условию

$$1 - F(x) \sim Cx^{-\alpha},$$

с параметром $0 < \alpha < \infty$, $C = \text{const}$.

Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas в [5] доказали, что для $l=m=[\sqrt{n}]$

$$z_l \xrightarrow{\text{н.н.}} \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (4)$$

Тогда найдём оценку α как

$$\hat{\alpha} = \frac{z_l}{1 - z_l}. \quad (5)$$

Смоделируем устойчивые величины с различными параметрами α $X \sim S_{1,3}(0,1,0)$ и $X \sim S_{1,95}(0,1,0)$ и оценим параметр α описанными методами

Таблица 1

Оценка α для $X \sim S_{1,3}(0,1,0)$ DPR методом для различных n и m .

n \ m	10	20	30	40	70	80	90	100
400	1,24	1,30	0,94	0,95	1,17	0,85	0,68	0,63
900	0,94	1,24	1,30	1,04	1,05	1,13	1,42	1,14
1600	1,09	1,45	1,29	1,32	1,05	1,00	0,91	0,81
4900	1,05	1,18	1,35	1,35	1,31	1,15	1,38	1,31
6400	1,09	1,38	1,23	1,36	1,29	1,31	1,23	1,23

Таблица 2

Оценка α для $X \sim S_{1,95}(0,1,0)$ DPR методом для различных n и m .

n \ m	10	20	30	40	70	80	90	100
400	1,70	1,94	2,25	2,98	6,57	4,61	1,21	3,58
900	2,30	2,60	2,50	2,43	2,00	1,85	2,41	2,25
1600	2,01	2,67	3,31	2,80	3,28	3,77	3,72	3,43
4900	1,81	2,86	3,33	3,77	4,62	4,89	4,50	4,72
6400	1,85	3,12	3,56	3,96	3,61	3,78	3,70	3,78

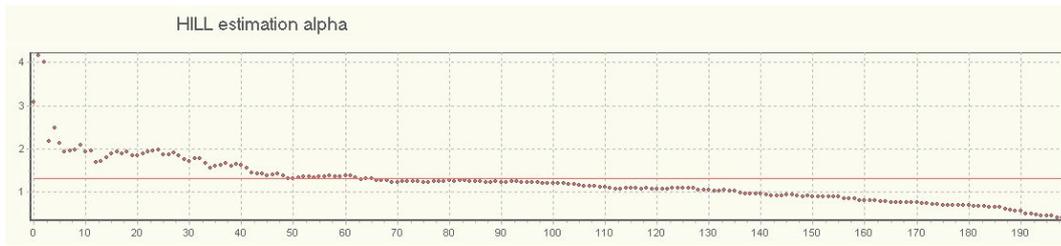


Рис 1. Поведение хвостового индекса для $X \sim S_{1,3}(0, 1, 0)$ при $n=400$

Из Рис 1. мы можем оценить параметр α , $\hat{\alpha} = 1,303$.

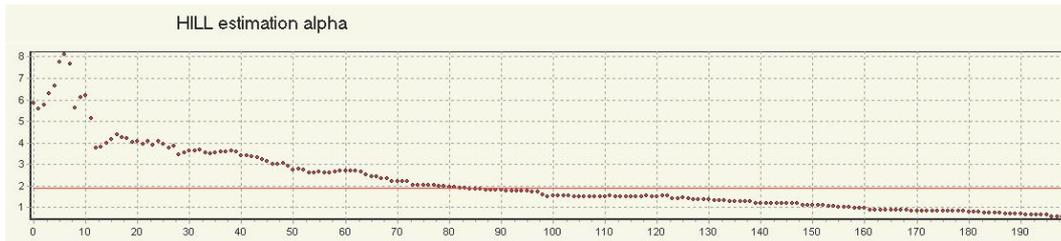


Рис 2. Поведение хвостового индекса для $X \sim S_{1,95}(0, 1, 0)$ при $n=400$

Из таблиц 1 и 2, а также Рис 1. и Рис 2. видно, что описанные методы хорошо применять для оценки хвостового индекса устойчивой случайной величины, в случае если $0 < \alpha < 1,5$. В случае если $1,5 < \alpha < 2$ оценивание истинного значения хвостового индекса α достаточно затруднительно.

Литература

1. Hill B.M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution.// The Annals of Statistics. V. 5. №3. 1975. P. 1011–1029.
2. Goldie C.M., Smith R.L. Slow variation with reainder: theory and applications.// Quart.J.Math. Oxford. 38. 1987. P. 45–71.
3. Berline A., Vajda I., van der Maulen E. C. About tne asymptotic accuracy of Barron density estemates.// IEEE Trans. Inf. Theory. № 44. 1998. P. 999–1009
4. Dekkers A.L.M., Einmahl J.H.J., de Haan L. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution.// Annals of Statistics 17 1989. P. 1833–1855.
5. Davydov Yu., Paulauskas V., Rackauskas A. More on P-stable convex sets in Banach spaces// J.Theoret. Probab. 13. no.1. P. 39–64. 2000.
6. Zolotarev V., Uchaikin V. Stable Distributions and their Applications. M.: 1999.
7. Шуряев А. Н. Вероятность // Наука М.. 1980. С. 576.

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. П. Кондратюк

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_{кр}\}$ рассмотрим смешанную задачу для полулинейного параболического уравнения с нелинейным источником $Q(u) = \lambda u^2$ квадратичного типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda u^2, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2, \quad |u'_0(x)| \leq c_0, \quad (3)$$

где k_1, k_2, λ – положительные постоянные.

Основной целью доклада является доказательство устойчивости линеаризованных разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу (1)–(3). Как известно [2, с. 319], [3, с. 276], анализ устойчивости в нелинейном случае основывается на предварительных оценках разностного решения в сильных нормах. В работе показывается, что условие

$$1 - \frac{\lambda l^{5/2}}{16k_1^{3/2}} \|u_0\|_A \geq 0, \quad (4)$$

является достаточным для глобальной (при $t \rightarrow \infty$) ограниченности и устойчивости разностного решения. Причем, если неравенство (4) выполняется строго, то решение затухает в равномерной норме по экспоненциальному закону.

При невыполнении условия на входные данные (4) решение может обращаться в ∞ за конечный промежуток времени. В этом случае соответствующие априорные оценки, полученные на основании использования сеточного аналога леммы Бихари, будут справедливы лишь до некоторого конечного момента времени.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

В прямоугольнике \bar{Q}_T введем равномерную сетку

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N} \quad hN = l\} = \omega_h \cup \{x_0 = 0; \quad x_N = l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = \overline{0, N_0} \quad \tau N_0 = T_{кр}\} = \omega_\tau \cup \{t_{N_0} = T_{кр}\},$$

с постоянными шагами h и τ соответственно по пространственной и временной переменным. Ниже будут использованы обычные обозначения теории разностных схем [4, с. 11].

На введенной сетке $\bar{\omega}$ дифференциальную задачу (1) – (3) заменим разностной:

$$y_t + A\hat{y} = \lambda\hat{y}y, \quad a = 0,5(ki-1+ki), \quad (5)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \hat{y}_0 = 0, \quad \hat{y}_N = 0. \quad (6)$$

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x. \quad (7)$$

Для исследования устойчивости разностной схемы рассмотрим соответствующую задачу с возмущенным начальным условием

$$\tilde{y}_t + A\hat{\tilde{y}} = \lambda\hat{\tilde{y}}\tilde{y}, \quad a = 0,5(ki-1+ki), \quad (8)$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \hat{\tilde{y}}_0 = 0, \quad \hat{\tilde{y}}_N = 0, \quad |\tilde{u}'_0| \leq \tilde{c}_0. \quad (9)$$

Вычитая из уравнений (8), (9) соответственно уравнения (5), (6), получим задачу для возмущения $\delta y = \tilde{y} - y$:

$$\delta y_t = A\delta\hat{y} + 0,5\lambda\delta\hat{y}(\tilde{y} + y) + 0,5\lambda\delta y(\hat{y} + \hat{\tilde{y}}) \quad (10)$$

$$\delta y_0^{n+1} = \delta y_N^{n+1} = 0, \quad \delta y(x, 0) = \delta u_0(x) = \tilde{u}_0(x) - u_0(x), \quad (11)$$

из которой видно, что прежде чем доказывать устойчивость, необходимо получить априорные оценки для y и \tilde{y} в равномерной норме.

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Теорема 1. Для решения разностных схем (5) – (7) и (8),(9) при выполнении условий:

$$1 - \lambda_1 \max \{ \|u_0\|_A, \|\tilde{u}_0\|_A \} \geq \lambda_2, \quad \lambda_1 = \lambda l^{5/2} / (16k_1^{3/2}), \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \tau \leq \tau_0, \\ \tau_0 = l^2 / (8k_1\lambda_2), \quad (12)$$

имеют место априорные оценки

$$\|y^n\|_A \leq e^{-c_1 t_n} \|y^0\|_A, \quad \|\tilde{y}^n\|_A \leq e^{-c_1 t_n} \|\tilde{y}^0\|_A, \quad c_1 = 4k_1\lambda_2 / l^2 \quad (13)$$

выражающие асимптотическое поведение решений y^n и \tilde{y}^n при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 и условия $\tau \leq \tau_{01}$, где

$$\tau_{01} = \frac{\sqrt{k_1}}{2\lambda\sqrt{l} \left(\|u^0\|_A + \|\tilde{u}^0\|_A \right)}, \quad \text{разностная схема (5) – (7) является } \rho\text{-}$$

устойчивой и для любого n имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^n - y^n\|_C \leq \rho^n \|\tilde{u}_0 - u_0\|_C, \quad \rho \leq e^{c_{3_n} t_n} \leq M_1, \quad (14)$$

где $c_{3_n} = 2\lambda(c_{2_n} + 5c_{2_{n+1}}/4)$, $c_{2_n} = \sqrt{l}/(2\sqrt{k_1})(e^{-c_1 t_n} \|\tilde{u}^0\|_A + e^{-c_1 t_n} \|u^0\|_A)$
 причем $M_1 = 1$ при $t_n \rightarrow \infty$.

4. СИЛЬНОЕ ИЛИ ГРУБОЕ РАЗРУШЕНИЕ [10, С. 257]

При невыполнении условий на входные данные (12) решение может неограниченно возрастать за конечный момент времени. В этом случае соответствующие априорные оценки, выражающие ограниченность решения и устойчивость могут быть доказаны лишь до некоторого конечного момента времени $t \leq T_{кр}$.

Для этого случая получена оценка: $\|y^n\|_A^2 \leq \|y^0\|_A^2 / (1 - t_n \lambda_3 \|y^0\|_A^2)$, справедливая для всех $t_n < T_{кр}$, где

$$T_{кр} = 1 / (\lambda_3 \|y^0\|_A^2). \quad (15)$$

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В прямоугольнике \bar{Q}_T с $l = \pi$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу с постоянным коэффициентом диффузии $k(x) = k = 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u^2,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = \sin x$$

Выберем $\lambda = 0,7$, когда выполняются условия теоремы 1. Вычислительный эксперимент показывает физический процесс остывания, что находится в полном соответствии с априорными оценками (13).

При небольшом изменении параметра $\lambda = 1,18$ условия (12) не выполняются и, как следствие, решение обращается в бесконечность за конечный промежуток времени $T_{кр} = 4,39$.

Интересно отметить, что критическое время существования и единственности решения дифференциальной задачи, вычисленное по формуле [1, с. 25] равно:

$$T_* = \int_{E_0}^{\infty} d\eta / (\lambda \eta^2 - \lambda_1 \eta) = \int_{\pi/2}^{\infty} d\eta / (1,18\eta^2 - 1 \cdot \eta) \approx 0,7754,$$

а время разрушения сеточного решения, вычисленное по формуле (15), равно 1,16.

Литература

1. Самарский, А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. // М. Наука. 1987.
2. Matus P. Stability of difference schemes for nonlinear time-depended problems // Comp. Meth. Appl. Math. Vol. 3. N. 2. 2003. P. 313–329.
3. Matus P., Lemeshevsky S. Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations // Comp. Meth. Appl. Math. 2009. Vol. 9. N. 3. P. 253–280.
4. Самарский, А. А. Теория разностных схем. // М. Наука. 1977.
5. Похожаев С.И. Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т 243. 2003. С. 257–288.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИСПЕРСИОННОГО ГАММА – ПРОЦЕССА

А. В. Кузьмина

Определение 1. Случайная величина \mathfrak{G} имеет дисперсионное гамма – распределение, если ее плотность распределения имеет вид

$$f_{\mathfrak{G}}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{y^{\frac{1}{v}-1} \exp\left(-\frac{g}{v}\right)}{v^{\frac{1}{v}} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)} dg, x \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma(x)$, $x > 0$ – гамма – функция, а $\sigma > 0, v > 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Случайную величину \mathfrak{G} с дисперсионным гамма – распределением будем обозначать $\mathfrak{G} \sim V(\sigma, v, \theta)$.

Определение 2. Случайный процесс $V = (V_t)_{t \geq 0}$ с параметрами $\sigma > 0, v > 0, \theta \in \mathbb{R}$, заданный на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) со значениями в \mathbb{R} , называется дисперсионным гамма – процессом, если выполнены следующие условия:

1. $V_0 = 0$ ^{н.н.}.
2. V имеет независимые приращения: для любого $n \geq 1$ и любого набора точек $t_j \in [0, \infty)$ $j = \overline{0, n}$ таких, что $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, величины $V_{t_0}, V_{t_1} - V_{t_0}, \dots, V_{t_n} - V_{t_{n-1}}$ являются независимыми.

3. для любых $s \geq 0, t \geq 0$ V имеет стационарные с дисперсионным гамма – распределением приращения с параметрами $\sigma\sqrt{t} > 0, \nu / t > 0, t\theta > 0$, то есть:

$$V_{t+s} - V_s \stackrel{d}{=} V_t - V_0 \sim V(\sigma\sqrt{t}, \nu / t, t\theta),$$

где $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство по распределению.

Дисперсионный гамма-процесс $V = (V_t)_{t \geq 0}$ можно определить двумя способами [3].

Первый состоит в использовании стандартного винеровского процесса $W = (W_t)_{t \geq 0}$ и гамма-процесса $G = (G_t)_{t \geq 0}$ с параметрами $a = 1 / \nu$ и $b = 1 / \nu$, а именно $V_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}$, где $W = (W_{G_t})_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени G_t , $G = (G_t)_{t \geq 0}$ – гамма-процесс, $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс дисперсионного гамма-процесса $V = (V_t)_{t \geq 0}$ с параметрами σ, ν, θ соответственно равны [3]

$$\begin{aligned} \theta t, (\sigma^2 + \nu\theta^2)t, \theta\nu(3\sigma^2 + 2\nu\theta^2) / t^{1/2} (\sigma^2 + \nu\theta^2)^{3/2}, \\ 3 \left(1 + 2\nu / t - \nu\theta^4 t (\sigma^2 + \nu\theta^2)^{-2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Второй способ определения дисперсионного гамма-процесса заключается в представлении $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$ как разности двух независимых гамма-процессов $G^1 = (G_t^1)_{t \geq 0}$ с параметрами a, b_1 и $G^2 = (G_t^2)_{t \geq 0}$ с параметрами a, b_2 , то есть $\bar{V}_t = G_t^1 - G_t^2$.

Теорема 1. Параметры a, b_1, b_2 дисперсионного гамма-процесса $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$ связаны с параметрами σ, ν, θ дисперсионного гамма-процесса $V = (V_t)_{t \geq 0}$ следующими соотношениями

$$a = 1 / \nu > 0, b_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\nu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\nu} + \frac{1}{2}\theta\nu \right)^{-1} > 0,$$

$$b_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2\nu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\nu} - \frac{1}{2}\theta\nu \right)^{-1} > 0. \quad (2)$$

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИСПЕРСИОННОГО ГАММА-ПРОЦЕССА

Способы моделирования дисперсионного гамма-процесса с использованием стандартного винеровского процесса и гамма-процесса как разности двух независимых гамма-процессов рассматриваются в [1], [4]. Дисперсионный гамма-процесса $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$ с параметрами a, b_1, b_2 и дисперсионный гамма-процесса $V = (V_t)_{t \geq 0}$ с параметрами σ, ν, θ моделируются в MATLAB® 7.6.0 (R2008a). На рисунках 1, 2 представлены траектории дисперсионных гамма-процессов $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$ и $V = (V_t)_{t \geq 0}$ соответственно.

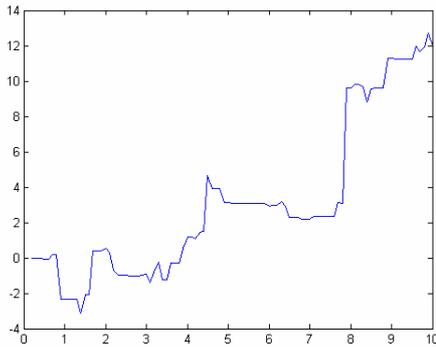


Рис. 1. Траектория дисперсионного гамма-процесса с параметрами $a = 1, b_1 = 0,5, b_2 = 1$

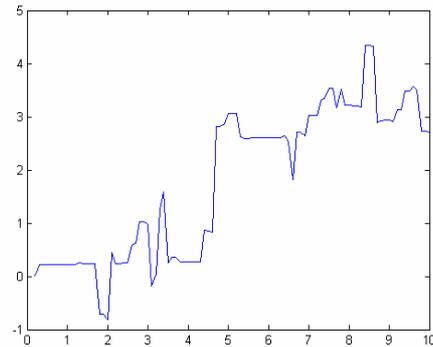


Рис. 2. Траектория дисперсионного гамма-процесса с параметрами $\sigma = 2, \nu = 1, \theta = 1$

Пусть случайная величина ϑ имеет математическое ожидание $m = M\vartheta$, дисперсию $d = D\vartheta$, асимметрию $s = S\vartheta$ и эксцесс $k = K\vartheta$, а $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ – выборка объема $n \geq 1$ за случайной величиной ϑ , тогда:

$$\begin{aligned} \hat{m}_n &= 1/n \sum_{j=1}^n \vartheta_j, & \hat{d}_n &= 1/(n-1) \sum_{j=1}^n (\vartheta_j - \hat{m}_n)^2, \\ \hat{s}_n &= \sqrt{n(n-1)/(n-2)} \mu_3 / \mu_2^{3/2}, \\ \hat{k}_n &= (n^2 - 1)/(n-2)(n-3) \left(\mu_4 / \mu_2^2 - 3 + 6/(n+1) \right), \end{aligned}$$

$\mu_k = 1/n \sum_{j=1}^n (\vartheta_j - \widehat{m}_n)^k$, $k = 2, 3, 4$ – несмещенные и состоятельные оценки

математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса соответственно [2].

В работе по наблюдениям за дисперсионным гамма-процессом строятся оценки математического ожидания, дисперсии, асимметрии, эксцесса и оценки параметров σ, ν, θ ; используя теорему 1 строятся оценки параметров a, b_1, b_2 .

Литература

1. *Cont R., Tankov P.* Financial modeling with jump processes. Chapman and Hall CRC Press. 2003. P. 192.
2. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир. 1975. С. 375–386.
3. *Madan D. B., Carr P.P., E.C. Chang E.C.* The variance gamma process and option pricing // *European Finance Preview* 2. 1998. P. 79–105.
4. *Schoutens W.* Levy processes in finance. Williams. 2003. P. 108–109.

ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРОЕКТА НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ С РАЗНЫМИ СКОРОСТЯМИ ПРОЦЕССОРОВ

Ю. С. Мазаник, В. М. Котов

ВВЕДЕНИЕ

В классической задаче минимизации времени завершения проекта на многопроцессорной системе рассматривается система из $m > 1$ машин M_1, \dots, M_m с соответствующими им скоростями s_1, \dots, s_m и N работ, с неотрицательными временами обработки $a_1, \dots, a_n > 0$. Требуется распределить все работы таким образом, чтобы время их обработки было минимальным.

В on-line версии данной задачи, все работы поступают последовательно, и каждую работу необходимо назначить на выполнение одной из машин сразу после поступления и, не имея никакой информации о последующих работах.

Поскольку последовательность работ заранее не известна, данная задаче не имеет оптимального решения. Существует несколько способов оценки эффективности построенного решения. Стандартной является оценка качества предложенного алгоритма, относительно offline задачи.

Такой коэффициент принято называть асимптотическим коэффициентом эффективности, а метод оценивания сравнительным анализом.

Обозначим через $opt(n)$ время работы оптимального алгоритма для решения offline задачи, а через $A(n)$ – время работы предлагаемого алгоритма решения online задачи, тогда формула для вычисления асимптотического коэффициента эффективности имеет вид $R(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{opt(n)}$. Гарантированная оценка времени работы вычисляется

по формуле $G(A) = \max_{\forall n} \frac{A(n)}{opt(n)}$.

Впервые данная проблема была исследована Грэмом (Graham) [1], который показал, что LS (list scheduling), алгоритм имеет асимптотическую оценку не менее $3 - \frac{4}{m+1}$.

В работе [2] была рассмотрена классическая задача, с дополнительным условием на время выпуска работ с машин.

Получена зависящая от количества машин оценка эффективности $\frac{1+z+\sqrt{4m-4+(1-z)^2}}{2}$, где $z = \frac{r_{\max}}{\max(r_{\max}, p_{\max})}$. (r_{\max} – максимальное время выпуска, p_{\max} – самая трудная работа).

В работе [3] был предложен алгоритм с оценкой 2.45 для рассматриваемой ниже задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И БАЗОВЫЕ ФОРМУЛЫ

В данной работе рассмотрен частный случай классической on-line задачи, когда $s_1 = \dots = s_{m-1} = 1$, $1 < s_m = s < 2$.

Введем некоторые стандартные обозначения:

LB_n – нижняя оценка времени работы оптимального алгоритма на шаге n ,

m – количество машин,

a_i – время выполнения i -ой работы,

a_{\max} – время выполнения максимальной из поступивших в данном шаге работ,

$a_{\max 2}$ – время выполнения второй по длительности среди поступивших работ,

$L(X_i, j)$ – суммарная загрузка i -ой машины на шаге j (сокращенно $L(X_i)$),

L_{jcc} – средняя загрузка машин на шаге j ,

LB_j – оценку можно вычислить по формуле:

$$LB_j = \left\{ \sum_{i=1}^j \frac{a_i}{m+s-1}, \frac{a_{\max}}{s}, a_{\max 2} \right\}.$$

Назовем работу обычной, если ее вес не превосходит $1.2LB_j$, в противном случае назовем работу большой.

АЛГОРИТМ НАЗНАЧЕНИЯ

Разобьем машины на группы по 6 в каждой. Быструю машину будем рассматривать отдельно. В случае, если количество машин не представимо в виде $6p$ или $6p+1$ оставшиеся машины будут образовывать неполную группу (без машины типа F)

$$\left(\begin{array}{cccccc} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_{\frac{M}{k}} & B_{\frac{M}{k}} & C_{\frac{M}{k}} & D_{\frac{M}{k}} & E_{\frac{M}{k}} & F_{\frac{M}{k}} \end{array} \right).$$

В каждой из групп на первые 5 машин будем назначать обычные работы пока загрузка машин не превышает $2.4LB_j$

$$L(X_i, j) + a_j < 2.4LB_j, \forall X \in \{A, B, C, D, E\}.$$

Быструю машину будем загружать большими работами пока ее загрузка не превышает $2.4LB_j$ – с нее будем начинать итерацию загрузки машин типа F . Как только загрузка быстрой машины на с текущей работой превысит $2.4LB_j$, будем загружать машину F , на каждом шаге выбирая меньше всего загруженную машину типа F . Когда каждая машина типа F будет загружена хотя бы по одному разу, будем говорить о том, что итерация завершена.

Теорема об асимптотической оценке. При указанной процедуре загрузки алгоритм дает гарантированную оценку 2.4.

Лемма 1. Любую обычную работу можно выполнить на машинах из групп ($A - E$), чтобы время завершения не превышало $2.4LB_j$.

Доказательство. Предположим, что на текущем шаге какая-то обычная работа не может выполняться на машинах типа ($A-E$) в пределах времени $2.4LB_j$. Тогда для каждой 5-и машин имеем:

$L_j(X) + a_j > 2.4LB_j$, откуда следует, что $L_j > 1.2LB_j, \forall X \in \{A, B, C, D, E\}$. Поэтому при любой загрузке машины F имеем: $L_j(A) + L_j(B) + L_j(C) + L_j(D) + L_j(E) > 1.2LB_j \cdot 5 = 6LB_j$. Тогда средняя загрузка больше LB_j , чего быть не может т.к. LB_j больше средней загрузки по построению. (Оставшиеся машины загружены больше $1.2LB_j$ каждая т.е. не влияют на оценку алгоритма).

Лемма 2. При H не меньше 7, где H это количество групп машин, загружая машины типа F в порядке увеличения их нагрузки, после завершения каждой из итераций загрузки больших машин, загрузка минимально загруженной машины типа F всегда будет меньше $0.4LB_j$.

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что машины упорядочены в порядке возрастания загрузки (т.е. первой идет наименее загруженная машина). В процессе загрузки не будем изменять порядок следования машин до конца текущей итерации. Для начала загрузки предположение верно, т.к. загрузка машины $F_1 = 0$. Рассмотрим поток больших работ, загружаемых на машины типа F . Обозначим данные работы как p_1, \dots, p_H , где H это количество наборов. Соответствующие им LB_j обозначим LB_1, \dots, LB_H .

Заметим, что если мы будем класть большую работу на машину загрузка, которой меньше $0.4LB_j$, то полученная загрузка не превысит $sLB_j + 0.4LB_j < (2 + 0.4)LB_j = 2.4LB_j$, а в случае быстрой машины ее загрузка при тех же начальных условиях будет $LB_j + 0.4LB_j < (1 + 0.4)LB_j = 1.4LB_j$. Т.е. в начале любой итерации мы будем 2 раза класть большие работы на машину со скоростью s .

Рассмотрим несколько первых шагов после загрузки быстрой машины: $p_3 > 1.2LB_3$. Предположим, что $p_3 \neq p_{\max}$. В этом случае получаем $p_3 \leq p_{\max 2} \leq LB_3$, что неверно, откуда следует, что $p_3 = p_{\max}$ (аналогично можно показать, что каждая последующая работа является максимальной для своего шага). Откуда $p_3 > 1.2LB_3 > 1.2LB_2$ и $p_4 > 1.2LB_4 > 1.2p_3 > 1.2^2 LB_3$.

Таким образом, получим $p_H > 1.2^{H-1} LB_1$. Для того, чтобы существовало нужное нам H , необходимо, чтобы выполнялось соотношение:

$$p_1 + 0.4LB_1 < 0.4LB_{H+1}$$

$$0.4LB_1 \geq 0.4p_H > 0.4 \cdot 1.2^{H-1} LB_1$$

$$p_1 + 0.4LB_1 \leq LB_1 + 0.4LB_1, \{p_1 = p_{\max} > sLB_1\}$$

Таким образом, H можно найти из формулы $1.4LB_1 < 0.4 \cdot 1.2^{H-1} LB_1$.

$$H \geq \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}{\ln(1.2)} \right\rceil + 1,$$

т.е. если $H \geq 7$ то машин больше чем 43 и предложенный алгоритм дает оценку 2.4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построен алгоритм, для задачи минимизации времени завершения проекта на многопроцессорной системе со скоростями процессоров 1 и s , и доказано, что представленный алгоритм дает асимптотическую оценку 2.4 для количества машин, большего, чем 43.

Литература

1. *R. L. Graham*. Bounds on multiprocessing timing anomalies. // *SIAM J. Appl. Math.* 17 1969. P. 263–269.
2. *Christos Loulamos, George J. Kyriaris*. «Makespan minimization on uniform parallel machines with release times». // *European Journal of Operational Research*. 2004.
3. *T. C. E. Cheng, C. T. Ng, Vladimir Kotov*. «A new algorithm for online uniform-machine scheduling to minimize the makespan». // *Information Processing Letters*. V 99. 2006.

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

М. В. Мальцев

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепи Маркова [1] используются для решения многих задач статистического анализа данных в генетике [2], экономике и других областях научной и практической деятельности. Общей моделью в таких исследованиях является цепь Маркова s -го порядка, $s \geq 1$. Однако число параметров данной модели возрастает экспоненциально при увеличении порядка s . Для статистического оценивания параметров требуется иметь реализацию последовательности далеко не всегда доступной на практике длительности. Поэтому актуальной является задача построения малопараметрических моделей цепи Маркова высокого порядка.

Примерами таких моделей являются цепь Маркова s -го порядка с r частичными связями [3], модель Рафтери [4], цепь Маркова переменного порядка [5]. В данной работе рассматривается специальный частный случай цепи Маркова переменного порядка – цепь Маркова с условной глубиной памяти.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Примем обозначения: $2 \leq N \leq \infty$, $A = \{0, 1, \dots, N-1\}$, – пространство состояний мощности N ; $x_t \in A$, $t \in \mathbf{N}$, – однородная цепь Маркова s -го порядка ($2 \leq s < \infty$), заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , с матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{J_1^{s+1}})$, $p_{J_1^{s+1}} = P\{x_{t+s} = j_{s+1} \mid x_{t+s-1} = j_s, \dots, x_t = j_1\}$, $\forall t \in \mathbf{N}$, где $J_1^{s+1} = (j_1, \dots, j_{s+1}) \in A^{s+1}$ – мультииндекс; $1 \leq B_* \leq s-1$; $K = N^{B_*} - 1$; $1 \leq M \leq K+1$, $Q^{(1)}, \dots, Q^{(M)}$ – M различных стохастических матриц порядка N : $Q^{(m)} = (q_{i,j}^{(m)})$, $i, j \in A$, $1 \leq m \leq M$; $\langle J_n^m \rangle = \sum_{k=n}^m N^{k-1} j_k$, $1 \leq n \leq m \leq s$; $\delta_{J_n^m, I_n^m} = \prod_{k=n}^m \delta_{j_k, i_k}$ – символ Кронекера для мультииндексов J_n^m, I_n^m .

Цепь Маркова s -го порядка $x_t \in A$ назовем цепью Маркова с условной глубиной памяти, если ее вероятности одношаговых переходов имеют следующий малопараметрический вид:

$$p_{J_1^{s+1}} = \begin{cases} q_{j_{b_0}, j_{s+1}}^{(m_0)}, & \text{если } \langle J_{s-B_*+1}^s \rangle = 0 \\ \dots \\ q_{j_{b_K}, j_{s+1}}^{(m_K)}, & \text{если } \langle J_{s-B_*+1}^s \rangle = K, \end{cases} = \sum_{k=0}^K \delta_{\langle J_{s-B_*+1}^s \rangle, k} q_{j_{b_k}, j_{s+1}}^{(m_k)}, \quad (1)$$

где $1 \leq m_k \leq M$, $1 \leq b_k \leq s - B_*$, $0 \leq k \leq K$, $\min_{0 \leq k \leq K} b_k = 1$.

Последовательность элементов $J_{s-B_*+1}^s$, определяющую условие в формуле (1), назовем базовым фрагментом памяти (БФП). Из (1) видно, что для данной модели состояние x_t процесса в момент времени t зависит не от всех s предыдущих состояний, а от $B_* + 1$ состояний $(j_{b_k}, J_{s-B_*+1}^s)$, причем значение БФП $J_{s-B_*+1}^s$ определяет не только состояние j_{b_k} , но и матрицу переходов $Q^{(m_k)}$. Матрица $P = (p_{J_1^{s+1}})$ вероятностей переходов для цепи Маркова с условной глубиной памяти определяется $D = 2(N^{B_*} + 1) + MN(N-1)$ независимыми параметрами.

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Вначале найдем условия, при которых цепь Маркова с условной глубиной памяти является эргодической.

Теорема 1. Цепь Маркова с условной глубиной памяти является эргодической тогда и только тогда, когда найдется натуральное число $m \in \mathbf{N}$, $s \leq m < \infty$, такое, что выполняется неравенство:

$$\min_{J_1^s, J_{1+m}^{s+m} \in A^s} \sum_{J_{s+1}^m \in A^{m-s}} \prod_{i=1}^m \sum_{k=0}^K \delta_{\langle J_{i+s-1}^{i+s-1}, J_{i+s} \rangle, k} q_{j_{b_k+i-1}, j_{i+s}}^{(m_k)} > 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v_{J_1^{s+1}}(n) &= \sum_{t=1}^{n-s} \delta_{X_t^{t+s}, J_1^{s+1}}, \quad v_{J_1^l}(n) = \sum_{I_1^{s+1} \in A^{s+1}(J_1^l)} v_{I_1^{s+1}}(n), \quad 1 \leq l \leq s, \\ v_{j_0, J_1^l}^{(l_0)}(n) &= \sum_{I_1^{1+l_0+l} \in A^{1+l_0+l}(j_0^l, J_1^l)} v_{I_1^{1+l_0+l}}(n), \\ \xi_{j_0, J_1^l}^{(l_0)}(n) &= \frac{v_{j_0, J_1^l}^{(l_0)}(n) - n/N^{l+1}}{\sqrt{n/N^{l+1}}}, \quad A^{s+1}(J_1^l) = \{I_1^{s+1} \in A^{s+1} \mid I_1^l = J_1^l\}, \\ &1 \leq l \leq s, \quad 0 \leq l_0 \leq s-l, \end{aligned} \quad (2)$$

$$A^{1+l_0+l}(j_0^l, J_1^l) = \{I_1^{1+l_0+l} \in A^{1+l_0+l} \mid i_1 = j_0, I_{2+l_0}^{1+l_0+l} = J_1^l\}.$$

Теорема 2. Если истинные значения длины БФП B_* , $\{b_k\}$ и $\{m_k\}$ известны, то оценки максимального правдоподобия (ОМП) для вероятностей одношаговых переходов $q_{u,v}^{(m_k)}$, $1 \leq m_k \leq M$, $u, v \in A$, имеют вид:

$$\begin{cases} \hat{q}_{u,v}^{(m_k)} = \sum_{w \in A^{B_*}} \delta_{\langle w \rangle, k} \frac{v_{u,wv}^{(l_k)}(n)}{v_{u,w}^{(l_k)}(n)}, & \text{если } v_{u,w}^{(l_k)}(n) > 0, \\ 1/N, & \text{если } v_{u,w}^{(l_k)}(n) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 3. Если цепь Маркова с условной глубиной памяти является стационарной, то при $n \rightarrow \infty$ оценки (3) являются состоятельными: $\hat{q}_{u,v}^{(m)} \xrightarrow{P} q_{u,v}^{(m)}$, $1 \leq m \leq M$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Если истинные значения длины БФП B_* и $\{m_k\}$ известны, то ОМП параметров $\{b_k\}$ имеют вид:

$$b_k = \arg \max_{1 \leq b \leq s-B_*} \sum_{i,j \in A} v_{i,wj}^{s-b-B_*}(n) \ln(\hat{q}_{i,wj}^{m_k}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Построим тест проверки гипотез: $H_0 : x_t \in A$ – равномерно распределенная случайная последовательность [6]: $q_{i,j}^{(m)} = 1/N, \forall i, j \in A, m = 1, 2, \dots, M$; $H_1 : x_t \in A$ – цепь Маркова с условной глубиной памяти с вероятностями одношаговых переходов

$$q_{i,j}^{(m)} = q_{i,j}^{(m)}(n) = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega_{i,j}^{(m)}(n)}{\sqrt{n}} \right) > 0, \quad \omega_{i,j}^{(m)}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega_{i,j}^{(m)},$$

$$\sum_{j \in A} \omega_{i,j}^{(m)} = 0, \quad \sum_{m=1}^M \sum_{j \in A} |\omega_{i,j}^{(m)}| \neq 0. \quad (5)$$

Введем в обозначение статистику:

$$\rho(n) = \sum_{\substack{w \in B_*, k=0 \\ u, v \in A}}^K \sum_{k=0}^K \delta_{\langle w \rangle, k} (\xi_{u, wv}^{(l_k)})^2 - \frac{1}{N} \sum_{\substack{w \in B_*, \\ u \in A}} \left(\sum_{v \in A} \sum_{k=0}^K \delta_{\langle w \rangle, k} \xi_{u, wv}^{(l_k)} \right)^2.$$

Теорема 5. Если справедлива гипотеза H_0 , то при $n \rightarrow \infty$ распределение вероятностей статистики $\rho(n)$ сходится к χ^2 -распределению с $U = N^{B_*+1}(N-1)$ степенями свободы.

С помощью полученного в теореме результата построен тест, основанный на статистике $\rho(n)$:

$$\begin{cases} H_0 : \rho(n) \leq \Delta, \\ H_1 : \rho(n) > \Delta, \end{cases}$$

где $\Delta = G_U^{-1}(1-\alpha)$ – квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного χ^2 -распределения с U степенями свободы, α – заданный уровень значимости.

Литература

1. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова // М. Наука. 1970.
2. Уотермен М. С. Математические методы для анализа последовательностей ДНК // М. Мир 1999.
3. Харин Ю. С., Петлицкий А. И. Цепь Маркова с частичными связями ЦМ(s, r) и статистические выводы о ее параметрах // Дискретная математика. 2007. Т. 19 В. 2. С. 109–130.
4. Raftery A. E. A Model for High-Order Markov Chains // J. Royal Statistical Society. 1985. Vol. B. 47. № 3. P. 528–539.
5. Buhlmann P., Wyner A. Variable Length Markov Chains // The Annals of Statistics. 1999. Vol. 27. № 2. P. 480–513.
6. Харин Ю.С. и др. Математические и компьютерные основы криптологии / Мн. Новое знание. 2003.