Анатолий Афанасьевич
ЛЕВАКОВ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Минск
БГУ
2009

УДК 519.2

Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения/ А. А. Леваков. — Минск: БГУ, 2009. — 231 с. —ISBN 978-985-518-250-5.

В монографии изложена теория стохастических дифференциальных уравнений, являющаяся одним из основных средств исследования случайных процессов. Рассмотрены три раздела теории стохастических дифференциальных уравнений: теоремы существования, теория устойчивости и методы интегрирования. Приведены факты из функционального анализа, теории многозначных отображений и случайных процессов, на которых основано изложение книги.

Для специалистов в области теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений и их приложений, а также преподавателей, аспирантов и студентов математических факультетов вузов.

Библиогр.: 171 назв.

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета

Рецензенты:
член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор *Л. А. Янович*;
доктор физико-математических наук, профессор *Н. В. Лазакович*

ISBN 978-985-518-250-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$B(x_0, r)$ — шар в метрическом пространстве (X, ρ) с центром в точке x_0 радиуса r, $\{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$

A^c — дополнение к множеству A

$B^\top$ — транспонированная матрица

$\beta(T)$ — борелевская σ-алгебра топологического пространства T

$\overline{\mathrm{co}}(A)$ — замыкание выпуклой оболочки множества A

$\mathrm{cl}\,(X)$ — семейство всех непустых замкнутых подмножеств множества X

$\mathrm{comp}(X)$ — семейство всех непустых компактных подмножеств множества X

$\mathrm{conv}(X)$ — семейство всех непустых компактных выпуклых подмножеств множества X

$C(R_+, X)$ — пространство непрерывных функций, определенных на R_+ со значениями в X, с метрикой $\rho(f_1, f_2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant k} \|f_1(t) - f_2(t)\| \wedge 1)$

$\beta_t(C(R_+, X))$ — под-σ-алгебра $\beta(C(R_+, X))$, порожденная $f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$

$E(x)$ — математическое ожидание случайной величины x

$F([x]_\delta)$ — замыкание объединения множеств $F(x_1)$ по всем x_1 таким, что $\rho(x, x_1) \leqslant \delta$

$[F(x)]^\delta = \overline{\mathrm{co}} F([x]_\delta)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $F([x]_\delta)$

$L_p(T, E)$ — пространство классов эквивалентности интегрируемых по Бохнеру функций $f : T \to E$ таких, что $\|f\|_p = \int_T \|f(t)\|^p d\tau < \infty$

$\mathcal{S}(X)$ — семейство всех подмножеств множества X

$\mathcal{S}_{cc}(X)$ — семейство всех замкнутых выпуклых подмножеств множества X

$E(x)$ — математическое ожидание случайной величины x

P^x — распределение вероятностей случайной величины x

N — множество натуральных чисел

R — множество действительных чисел

R_+	—	множество неотрицательных действительных чисел $[0, \infty[$
$R^{d\times r}$	—	пространство $(d \times r)$-матриц с элементами из R
δ_{ij}	—	символ Кронекера
$\delta_{(a)}$	—	единичная мера Дирака в точке a
$\mathrm{tr}(A)$	—	след матрицы A
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	—	вероятностное пространство
$1_A(x)$	—	индикаторная функция множества A, т. е. $1_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $1_A(x) = 0$, если $x \subsetneq A$
СДУ	—	стохастическое дифференциальное уравнение
СДВ	—	стохастическое дифференциальное включение
ССДУ	—	система стохастических дифференциальных уравнений
п. в.	—	почти всюду
п. н.	—	почти наверное
$a \wedge b = \min\{a, b\}$	—	меньшее из чисел a и b
$a \vee b = \max\{a, b\}$	—	большее из чисел a и b
$f * g$	—	свертка функций f и g
$\langle a, b\rangle$	—	скалярное произведение векторов $a, b \in R^d$, $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^d a_i b_i$
$\|a\|$	—	евклидова норма матрицы a
V'_x или $\dfrac{\partial V}{\partial x}$	—	строка $(V'_{x_1} \dots V'_{x_d})$, если $V : R^d \to R$
V''_{x^2} или $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$	—	$(d \times d)$-матрица с элементами $V''_{x_i x_j}$, если $V : R^d \to R$
c	—	универсальная постоянная
$C_b^2(R^d)$	—	множество всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $h : R^d \to R$, ограниченных вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно
$[A]_\varepsilon = \{x \in X \| \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$	—	ε-окрестность множества A
$\bar{\alpha}(A, B) = \sup(\rho(x, B) \| x \in A)$	—	полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B
$\alpha(A, B) = \max(\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A))$	—	отклонение по Хаусдорфу множеств A и B

ВВЕДЕНИЕ

Поведение реального объекта, функционирующего в условиях естественных шумов, характеризуется некоторой неопределенностью, кроме того, в системах управления сложными системами обычно участвуют люди, для которых характерна некоторая неопределенность поведения. Описание таких систем при помощи детерминистских подходов не всегда отражает действительную картину функционирования объекта. Если моделью процесса является дифференциальное уравнение $dx(t) = f(t, x(t))\,dt$, то для получения модели, учитывающей помехи типа белого шума, к правой части дифференциального уравнения прибавляют слагаемое вида $g(t, x(t))\,dW(t)$ и рассматривают стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))\,dt + g(t, x(t))\,dW(t)$$

или в интегральной форме —

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x(s))\,ds + \int\limits_0^t g(s, x(s))\,dW(s), \qquad (0.1)$$

где второй интеграл является интегралом Ито по броуновскому движению $W(t)$. Возникновение и развитие стохастических интегралов и стохастических дифференциальных уравнений восходит к С. Н. Бернштейну, К. Ито, И. И. Гихману. К настоящему времени имеется огромная литература, посвященная стохастическим дифференциальным уравнениям, теория которых продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время [8, 18, 85, 125, 133, 137, 146, 148, 149, 152, 156]. К. Ито первый показал, что для липшицевых функций f, g уравнение (0.1) имеет единственное сильное решение, но для приложений, особенно для теории управляемых случайных процессов, важно доказательство теорем существования и единственности при более слабых условиях на отображения f и g. А. В. Скороход ввел новое понятие решения — «слабое решение», допустив, что решение может быть определено на подходящем вероятностном пространстве с подходящим броуновским движением. Это позволило доказать теорему существования решений при условиях непрерывности коэффициентов уравнения. При доказательстве был использован аналог ломаных Эйлера, однако из получающейся при этом последовательности процессов выбрать сходящуюся подпоследовательность невозможно. А. В. Скороход с помощью перехода к другому вероятностному пространству и к другой последовательности процессов, но с теми же законами распределения построил последовательность процессов, сходящуюся к решению уравнения. В настоящее время при доказательстве большинства теорем существования используется именно такой подход. Следующий важный шаг — получение Н. В. Крыловым [38, 39] оценок для распределений стохастических интегралов и доказательство с их помощью теоремы существования слабых решений стохастического дифференциального уравнения (0.1) с измеримыми по Борелю ограниченными функциями f, g и невырожденной матрицей g $(\exists\nu,\ \forall\lambda,\ \lambda^\top gg^\top\lambda \geqslant \nu\|\lambda\|)$. Эта теорема показывает существенное отличие стохастических дифференциальных уравнений от обыкновенных систем. Уравнение $\dot{x} = f(t,x)$ с измеримой функцией f, вообще говоря, не имеет решений. В дальнейшем условие невырожденности матрицы g было ослаблено. Но чтобы теорема существования решений стохастических дифференциальных уравнений охватывала решения, аналогичные скользящим режимам для обыкновенных дифференциальных уравнений, например движения по поверхности, на которой коэффициент сноса f разрывен, а коэффициент диффузии g равен нулю, необходимо переходить, так же как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, к соответствующим стохастическим дифференциальным включениям. Так как получение именно скользящих режимов часто является целью управления, поскольку они слабо зависят от внешних воздействий, то доказательство теорем существования таких решений — важная задача. Вопросам существования решений различных типов стохастических дифференциальных уравнений уделено большое внимание в книге.

Слабые решения используются при изучении тех свойств уравнений, которые связаны с мерой в пространстве траекторий, таких, как устойчивость процессов, вероятностное представление решений и т. д. Но если необходимо рассматривать конкретное свойство траекторий, например в теории управления диффузионными процессами, в теории фильтрации, тогда рассматривают сильные решения. При доказательстве теорем существования сильных решений важную роль играет принцип Ямады — Ватанабэ: из существования слабых решений и потраекторной единственности следует сильное существование. Отметим, что принцип применим в различных ситуациях: для стохастических дифференциальных уравнений, для стохастических дифференциальных уравнений с отражением от границы, для стохастических дифференциальных включений. Проблему существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений можно описать следующим образом. Есть уравнения, у которых нет слабых решений. Существуют уравнения, у которых имеются слабые решения на некотором вероятностном пространстве с подходящим броуновским движением, в то время как на других вероятностных пространствах с другими броуновскими движениями решений может и не быть. Если имеет место потраекторная единственность и уравнение обладает свойством слабого существования, то на любом вероятностном пространстве с любым броуновским движением существует единственное решение, и оно является сильным.

В книге показывается, что любое уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t)$$

с измеримыми по Борелю локально ограниченными функциями f, g имеет слабое решение, но под слабым решением понимаем слабое решение стохастического включения

$$dx(t) \in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))dW(t),$$

где $F(t, x)$, $G(t, x)$ — некоторые многозначные отображения, соответствующие функциям f и g.

Мы рассматриваем лишь диффузионные уравнения марковского типа. Долгое время исследовались именно такие уравнения. Однако в теории фильтрации, в физике появляются стохастические уравнения с частными производными, которые, как правило, можно трактовать как стохастические уравнения в гильбертовом или банаховом пространстве. При изучении многих экономических проблем приходится рассматривать уравнения не по броуновскому движению, а по некоторым семимартингалам. В настоящее время теория стохастических уравнений по семимартингалам в банаховом пространстве успешно развивается, и несмотря на существенное усложнение ситуации, многие методы и идеи уравнений в конечномерных пространствах продолжают работать и в банаховом пространстве с соответствующими изменениями [12, 40, 80, 125, 137, 148, 152, 156].

Первая глава посвящена изложению сведений из функционального анализа, теории случайных процессов, теории динамических систем и дифференциальных включений, используемых в монографии. Книга предназначена в первую очередь для студентов факультета прикладной математики и информатики и механико-математического факультета Белорусского государственного университета, и предлагаемый вариант сведений продиктован теми курсами по фундаментальной математике, которые читаются на этих факультетах, а также потребностями теории стохастических дифференциальных уравнений. Конечно, набор сведений нельзя признать полным.

В параграфах 2.1—2.4, 2.7 второй главы доказываются теоремы существования слабых и сильных решений стохастических дифференциальных уравнений и включений, охватывающие и решения типа скользящего режима для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если уравнение рассматривается в некоторой области D, то при достижении траекториями границы D одна из возможностей их дальнейшего продолжения заключается в отражении от границы внутрь области. Воздействие на решение на границе представляют как своеобразный снос в стохастическом уравнении, т. е. рассматривают уравнение $dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + dK(t)$, где $K(t)$ — непрерывный процесс ограниченной вариации, возрастающий только на границе. Впервые диффузионные процессы с отражением от прямой исследовал А. В. Скороход [89, 90]. Исследованию проблемы Скорохода и ее приложениям к стохастическим дифференциальным уравнениям посвящены работы [147, 164, 167]. Наиболее общие условия, обеспечивающие существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с отражением от границы, даны в [162] (предложение 1.54). Различные аспекты проблемы рассматривались в работах [165, 166]. Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных включений с отражением от границы устанавливается в параграфе 2.6.

Решения, которые при всех $t \geqslant 0$, принадлежат заданному множеству K, называют жизнеспособными. Первые условия, обеспечивающие существование жизнеспособных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, были получены Н. Нагумо [153] еще в 40-х гг. XX в. Для стохастических дифференциальных уравнений (0.1) первая теорема существования жизнеспособных решений доказана Ж.-П. Обэном и Г. Да Прато [112] с липшицевыми функциями f и g и постоянным выпуклым множеством K. В дальнейшем эта теорема была усилена [113, 114, 124, 134]. М. Кизилевич [141] рассматривал проблему при условиях, обеспечивающих применение теоремы Фана о неподвижной точке для многозначных функций. В параграфе 2.5 приводится теорема об инвариантности множества для стохастических дифференциальных уравнений. Ее доказательство основано на связи, существующей между некоторым семейством обыкновенных дифференциальных уравнений и стохастическим дифференциальным уравнением. Здесь же доказана теорема существования слабых жизнеспособных решений для стохастических дифференциальных включений с измеримыми отображениями f, g и с отображением K, зависящим от переменных состояния.

В третьей главе книги исследуются асимптотические свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений. Асимптотические задачи стохастических дифференциальных уравнений возникали и решались одновременно с развитием самой теории стохастических уравнений. Один из основателей этой теории И. И. Гихман рассматривал эту задачу как первоочередную и сами уравнения отчасти строил для того, чтобы строго ставить и решать асимптотические проблемы [92]. Случайные возмущения могут не только количественно, но и качественно отражаться на свойствах дифференциальных систем, что хорошо продемонстрировано в монографиях [32, 34, 36, 39, 92, 103, 105]. Задача изучения малых случайных возмущений на динамические системы ставилась еще Л. С. Понтрягиным, А. А. Андроновым, Д. А. Виттом [84]. Для обыкновенных дифференциальных включений, правые части которых — выпуклые компактные множества, условия, обеспечивающие существование решений, влекут за собой и компактность множеств достижимости [97, 102]. Известно также, что обыкновенные автономные дифференциальные включения порождают полудинамические системы. Аналогичные утверждения верны и для стохастических дифференциальных уравнений и включений, если рассматривать множество законов распределения слабых решений в метрическом пространстве (P, d), где P — множество вероятностей на $(R^d, \beta(R^d))$, а d — метрика Леви — Прохорова. Эти утверждения устанавливаются в параграфе 3.1. Устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений по нелинейному приближению исследовалась Н. Н. Красовским [35], И. Г. Малкиным [74] и др. После представления В. М. Алексеевым [1] решения нелинейной системы через решения системы в вариациях во многих работах применялся метод интегральных неравенств с использованием формулы Алексеева [76]. В параграфе 3.3 получен аналог формулы Алексеева для стохастических дифференциальных систем и методом интегральных неравенств проведено исследование устойчивости ряда стохастических уравнений.

Н. Н. Красовский и И. Я. Кац [28], Дж. Э. Бертрам и П. Э. Сарачик [116] были первыми, кто использовал метод функций Ляпунова для исследования устойчивости стохастических систем. Первыми монографиями, посвященными этой теме, были книги Р. З. Хасьминского [103] и Г. Дж. Кушнера [36]. На стохастические системы были распространены наиболее глубокие результаты классической теории устойчивости детерминированных систем, а также установлен ряд свойств, присущих лишь стохастическим уравнениям [9, 20, 92]. Обобщенный прямой метод Ляпунова для стохастических уравнений Ито изложен в [107], где доказаны теоремы о локализации предельных множеств с помощью функций Ляпунова, как являющихся мартингалами, так и не являющихся таковыми.

Параграф 3.2 посвящен обобщению хорошо известных теорем [103] об устойчивости стохастических дифференциальных уравнений на стохастические дифференциальные уравнения более общего вида и доказательству аналога теоремы Барбашина — Красовского [3] для стохастических дифференциальных уравнений.

В работе [123] В. Коппель установил необходимые и достаточные условия существования по крайней мере одного ограниченного решения у обыкновенной дифференциальной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

с каждой непрерывной ограниченной на R_+ функцией $b(t)$, а также с каждой функцией $b \in L_1(R_+, R^n)$. В дальнейшем эти результаты были обобщены и усилены в работах Н. А. Изобова, Р. А. Прохоровой, Р. Конти. Обзор этих результатов дан в [26]. В параграфе 3.4 для линейных нестационарных стохастических систем получен критерий ограниченности в среднеквадратическом всех решений. В отличие от обыкновенных дифференциальных систем ограниченность решений обеспечивает другое соотношение между индексами пространств L_p. Для стационарных систем получены явные критерии ограниченности в среднеквадратическом решений системы.

Исследование асимптотических характеристик стохастических уравнений является более сложной задачей, чем изучение аналогичных свойств обыкновенных дифференциальных систем. Поэтому изучение возмущенной стохастической системы на основании свойств невозмущенной обыкновенной системы — важная и интересная задача. В параграфе 3.5 найдены условия, при которых для каждого решения возмущенной стохастической системы существует решение невозмущенного обыкновенного уравнения со случайным начальным условием такое, что среднеквадратическое отклонение указанных решений стремится к нулю при $t \to \infty$. Обыкновенные уравнения с аналогичным свойством называют асимптотически эквивалентными и рассмотрены в [19, 73].

Введенное А. М. Ляпуновым [72] понятие характеристического показателя линейной нестационарной линейной системы является ключевым в первом методе Ляпунова исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных систем. В последние несколько десятилетий этот метод интенсивно и успешно развивается в Беларуси под руководством академика НАН Беларуси Н. А. Изобова [24, 25].

В параграфе 3.6 вводится среднеквадратический характеристический показатель решения стохастической дифференциальной системы Ито и показывается, что, как и для обыкновенных систем, центральный показатель линейной невозмущенной системы является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя линейной возмущенной системы со случайными возмущениями, что позволяет использовать первый метод Ляпунова и для стохастических систем Ито, если вместо показателей решений обыкновенной дифференциальной системы применять среднеквадратические показатели стохастических уравнений.

В четвертой главе рассматриваются некоторые классы стохастических дифференциальных уравнений, решения которых могут быть построены через функции, входящие в уравнения, с помощью элементарных операций (параграф 4.1). Приводятся уравнения Колмогорова, которые являются уравнениями в частных производных второго порядка параболического типа и которые позволяют находить многие важные характеристики стохастических дифференциальных уравнений (параграф 4.2), что является свидетельством глубокой связи, существующей между стохастическими уравнениями и уравнениями в частных производных. Приводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют условные математические ожидания многих важных случайных процессов (параграф 4.3).

В монографии изложены лишь три раздела теории стохастических дифференциальных уравнений: теоремы существования, теория устойчивости и методы интегрирования. С другими разделами теории можно познакомиться по источникам, приведенным в книге. В список литературы внесены лишь работы, непосредственно касающиеся рассматриваемых проблем.

Автор выражает благодарность академику Н. А. Изобову, преподавателям кафедры высшей математики БГУ и участникам Минского городского семинара по дифференциальным уравнениям, под влиянием которых были получены результаты, вошедшие в книгу.

ГЛАВА 1
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Функциональный анализ

В этой главе мы приводим сведения из функционального анализа, теории случайных процессов, теории динамических систем и дифференциальных включений, которые используются в дальнейшем в книге. Эти сведения приведены лишь для облегчения читателю изучения содержания книги и не предназначены для изучения соответствующих разделов математики. Утверждения приведены без доказательств. С доказательствами можно ознакомиться в монографиях, которые указаны перед формулировками теорем.

Пусть задано некоторое множество X и система его подмножеств $\mathcal{G}$. Система $\mathcal{G}$ называется **топологией** на множестве X, если:

а) объединение любых подмножеств из $\mathcal{G}$ также является его подмножеством;

б) пересечение конечного числа подмножеств из $\mathcal{G}$ принадлежит $\mathcal{G}$;

в) X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат $\mathcal{G}$.

Элементы из $\mathcal{G}$ называются **открытыми** множествами, а множество X с топологией $\mathcal{G}$ называется **топологическим** пространством $(X, \mathcal{G})$. Подмножества из X, дополнения которых открыты, называются **замкнутыми**. Любое открытое множество, содержащее точку x, называется **окрестностью** x. Топологическое пространство, в котором любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности, называется хаусдорфовым.

Пусть $(X, \mathcal{G})$, $(Y, \mathcal{T})$ — два топологических пространства, $f : X \to Y$ — функция, определенная на X, со значениями в Y. Функция f называется **непрерывной** в точке x_0, если для каждой окрестности V точки $f(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \in V$. Последовательность (x_n) точек $x_n \in X$ называется **сходящейся** к $x \in X$, если каждая окрестность точки x содержит все элементы последовательности, за исключением конечного числа.

Пусть $(X, \mathcal{G})$ — топологическое пространство и S — подмножество X. Можно определить топологию на S, состоящую из множеств

$U \cap S$, $U \in \mathcal{G}$. Ее называют топологией на S, порожденной топологией $\mathcal{G}$. **Замыкание** $\bar{S}$ множества S — это пересечение всех замкнутых множеств из X, содержащих S. Множество S топологического пространства называется **плотным** в X, если $\bar{S} = X$. Топологическое пространство называется **сепарабельным**, если существует счетное плотное подмножество пространства X.

Семейство $\mathcal{F}$ открытых множеств из X называется открытым **покрытием** множества S, если каждая точка из S принадлежит хотя бы одному элементу из $\mathcal{F}$. Множество S называется **компактным**, если каждое открытое покрытие $\mathcal{F}$ множества S содержит конечное число подмножеств из $\mathcal{F}$, которое также покрывает S. Множество S называется **секвенциально компактным**, если каждая последовательность из S имеет подпоследовательность, которая сходится к некоторой точке из S. S — **относительно компактно**, если его замыкание $\bar{S}$ компактно. S — **относительно секвенциально компактно**, если каждая последовательность из S имеет подпоследовательность, сходящуюся к точке из X.

Пусть D — система подмножеств из X. Существует единственная топология $\mathcal{G}$ на X, которая содержит систему D и является слабейшей топологией на X с этим свойством. Ее называют топологией, порожденной системой D. Рассмотрим множество функций $f_\alpha : X \to Y$, X — некоторое множество, $(Y, \mathcal{F})$ — топологическое пространство, $\alpha \in A$. Слабейшая топология на X такая, что все функции f_α непрерывны, называется топологией, порожденной множеством функций f_α. Эта топология порождена системой множеств $D = \{f_\alpha^{-1}(\theta) \big| \theta \in \mathcal{F}, \alpha \in A\}$.

Другой полезный способ ввести топологию на множестве X — это определить метрику на X. Функция $\rho : X \times X \to R_+$ называется **метрикой** на X, если

i) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

ii) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$;

iii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

для всех $x, y, z \in X$. Множество X с метрикой ρ называется **метрическим пространством** (X, ρ).

Пусть $(X, \mathcal{G})$ — топологическое пространство и β — система подмножеств из X, удовлетворяющая условиям:

j) $\forall x \in X$, $\exists \beta_x \in \beta$ такое, что $x \in \beta_x$;

jj) если $x \in \beta_1 \cap \beta_2$, то существует β_3 такое, что $x \in \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$.

Множество всевозможных объединений элементов из β вместе с пустым множеством $\varnothing$ является топологией на X. Система β называется базисом этой топологии. Система β подмножеств метрического пространства (X, ρ), состоящая из открытых шаров $\{y \big| \rho(x,y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$, удовлетворяет условиям j), jj), и, следовательно, метрическое пространство (X, ρ) является топологическим пространством с топологией $\mathcal{G}$, базисом которой является система открытых шаров.

Последовательность x_n метрического пространства (X, ρ) называется **последовательностью Коши**, если выполняется $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n \geqslant N$, $\forall m \geqslant N$, выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$. Метрическое пространство **полное**, если каждая последовательность Коши сходится к некоторому элементу из этого пространства. Топологическое пространство называется **метризуемым**, если его топология может быть задана с помощью какой-либо метрики.

Пусть X — линейное пространство над полем действительных чисел R. Предположим, что X также и топологическое пространство. X называется **линейным топологическим пространством**, если отображения $X \times X \ni (x_1, x_2) \to x_1 + x_2 \in X$, $R \times X \ni (\alpha, x) \to \alpha x \in \in X$ непрерывны.

Функция $\|\cdot\|$, удовлетворяющая условиям

e) $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ee) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

eee) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, для всех $x, y \in X$, $\alpha \in R$, называется **нормой** на линейном пространстве X. Линейное пространство с нормой называется **линейным нормированным** пространством. Норму можно использовать для введения метрики $\rho(x,y) = \|x - y\|$ и соответствующей топологии на X. Полное линейное нормированное пространство называется **банаховым** пространством, а полное сепарабельное метрическое пространство называется **польским** пространством.

Если X и Y — два линейных нормированных пространства, то множество всех линейных непрерывных операторов $T : X \to Y$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляры тоже является линейным нормированным пространством с нормой $\|T\| = = \sup\{\|Tx\| \big| \|x\| \leqslant 1\}$. Его обозначают $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $Y = R$, то

$\mathcal{L}(X, R)$ называют пространством, **сопряженным** к X, и обозначают X^*. Последовательность (x_n) пространства X **сходится к** x **слабо**, если скалярная последовательность $x'(x_n - x)$ сходится к нулю для каждого фиксированного $x' \in X^*$. Элементы из X^* являются функциями, заданными на X, и их можно использовать для введения топологии на X. Слабейшую топологию в X, при которой все элементы x' из X^* непрерывны, называют **слабой топологией** в X и обозначают $\sigma(X, X^*)$. Говорят, что множество S **слабо компактно**, если оно компактно в $(X, \sigma(X, X^*))$. Множество S называется **слабо секвенциально компактным**, если из любой последовательности $x_n \in \in S$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к точке из S. Аналогично определяются слабая замкнутость, слабая относительная компактность, слабая относительная секвенциальная компактность множества S.

Предложение 1.1 (теорема Эберлейна — Шмульяна [139, p. 7]). *Пусть S — подмножество банахова пространства. Тогда следующие утверждения равносильны:*

k) S *— слабо относительно секвенциально компактно;*

kk) S *— слабо относительно компактно.*

Предложение 1.2 (теорема Шмульяна [139, p. 7]). *Если S — относительно слабо компактное подмножество банахова пространства X, то для каждого x, принадлежащего слабому замыканию S, существует последовательность элементов из S, слабо сходящаяся к x.*

Пусть X — линейное топологическое пространство и K — подмножество из X. K называется **выпуклым**, если $\forall x, y \in K$ множество $\alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, принадлежит K. **Выпуклой оболочкой** множества S называют пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S, обозначается $\mathrm{co}(S)$. Пересечение всех замкнутых выпуклых подмножеств из X, содержащих S, называют замкнутой выпуклой оболочкой S, обозначают $\bar{\mathrm{co}}(S)$. Для произвольных множеств A, B из линейного топологического пространства X имеем:

1) $\mathrm{co}(\alpha A) = \alpha \mathrm{co}(A)$, $\mathrm{co}(A + B) = \mathrm{co}(A) + \mathrm{co}(B)$;

2) $\bar{\mathrm{co}}(A) = \mathrm{co}(\bar{A})$;

3) $\bar{\mathrm{co}}(\alpha A) = \alpha \bar{\mathrm{co}}(A)$;

4) если $\bar{\mathrm{co}}(A)$ — компактно, то $\bar{\mathrm{co}}(A+B) = \bar{\mathrm{co}}(A) + \bar{\mathrm{co}}(B)$;

5) если $X = R^n$ и $A \subset R^n$, A — компактно, то $\mathrm{co}(A)$ тоже компактно.

Предложение 1.3 (теорема Каратеодори [139, p. 8]). *Пусть A — подмножество из R^n. Тогда каждая точка $x \in \mathrm{co}\,(A)$ является линейной комбинацией не более чем $n+1$ точек из A.*

Предложение 1.4 (теорема Крейна — Шмульяна [139, p. 8]). *Замкнутая выпуклая оболочка слабо компактного множества банахова пространства является слабо компактной.*

Предложение 1.5 (теорема Банаха — Мазура [139, p. 8]). *Если X — банахово пространство и (x_n) — слабо сходящаяся к x последовательность, то некоторая последовательность линейных комбинаций элементов из x_n сходится к x в топологии, порожденной нормой X.*

Пусть E, E_1 — банаховы пространства, $A : E \to E_1$ — линейный оператор. Говорят, что A замкнут, если из условий $x_n \in E$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $Ax = y$. Оператор A называется ограниченным, если существует постоянная K, что $\forall f \in E$

$$\|Af\| \leqslant K\|f\|.$$

Предложение 1.6 (теорема Банаха о замкнутом графике [33, с. 227–228]). *Если $A : E \to E_1$ — линейный замкнутый оператор, то A ограничен.*

Предложение 1.7 (теорема Хана — Банаха [109, с. 171]). *Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество в банаховом пространстве E и $x_0 \in E \backslash A$. Тогда существует такая непрерывная линейная форма f на E, что $f(x_0) > \sup\limits_{x \in A} f(x)$.*

Пусть T — некоторое множество. Говорят, что система $\mathcal{F}$ его подмножеств является **алгеброй**, если $T \in \mathcal{F}, A^c = T \setminus A \in \mathcal{F}, A \cup B \in \mathcal{F}$ $\forall A, B \in \mathcal{F}$. Алгебра называется **$\sigma$-алгеброй**, если с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots,$ принадлежащих $\mathcal{F}$, объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит $\mathcal{F}$. Множество T с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется **измеримым пространством** $(T, \mathcal{F})$. Если S — система подмножеств из T, то пересечение всех σ-алгебр, содержащих S, является

σ-алгеброй и называется σ-алгеброй, порожденной S. В частности, если T — топологическое пространство, то σ-алгебра, порожденная открытыми множествами из T, называется **борелевской σ-алгеброй** и обозначается $\beta(T)$.

Пусть заданы два измеримых пространства $(T_1, \mathcal{F}_1), (T_2, \mathcal{F}_2)$ и отображение $f : T_1 \to T_2$. Отображение f называется **$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-измеримым**, если $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1$ для каждого $E \in \mathcal{F}_2$. Если $(T, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, X — метрическое пространство и (f_n) — последовательность $(\mathcal{F}, \beta(X))$-измеримых функций таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для каждого $t \in T$, то функция f является $(\mathcal{F}, \beta(X))$-измеримой. Если $X = R$ и функции f_n, $n \geqslant 1$, f, g являются $(\mathcal{F}, \beta(X))$-измеримыми, то $(\mathcal{F}, \beta(X))$-измеримы и функции $\sup\limits_n f_n$; $\inf\limits_n f_n$; $f \times g$; $\dfrac{f}{g}$, если $g \neq 0$. Отображение f топологического пространства T_1 в топологическое пространство T_2 называется **измеримым по Борелю**, если оно является $(\beta(T_1), \beta(T_2))$-измеримым. Если $g : T_1 \to T_2$ — измеримое по Борелю отображение, $f : T \to T_1$ — $(\mathcal{F}, \beta(T_1))$-измеримое отображение, то $g \circ f$ является $(\mathcal{F}, \beta(T_2))$-измеримым. Предел последовательности измеримых по Борелю отображений $f_n : T_1 \to T_2$, где T_2 — метризуемое топологическое пространство, является измеримым по Борелю.

Пусть $(T, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Функция $\mu : \mathcal{F} \to R_+$, определенная на множествах A из σ-алгебры $\mathcal{F}$, называется **мерой**, если она обладает следующими свойствами: $\mu(A) \geqslant 0 \ \ \forall A \in \mathcal{F}$; $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, где $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Мера называется **конечной**, если $\mu(T) < \infty$.

Рассмотрим отображение $f : T \to R_+$, заданное на измеримом пространстве $(T, \mathcal{F}, \mu)$ с конечной мерой μ, которое является $(\mathcal{F}, \beta(R_+))$-измеримым. Предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n2^n} (i2^n \mu\{i2^{-n} < f \leqslant (i+1)2^{-n}\} + nP\{f > n\}),$$

где $\{i2^{-n} < f \leqslant (i+1)2^{-n}\}$ — множество точек $t \in T$, для которых $i2^{-n} < f(t) \leqslant (i+1)2^{-n}$, аналогично определяется множество $\{f > n\}$, называется **интегралом Лебега** и обозначается $\int_T f(t) d\mu$. В случае произвольной функции $f : T \to R$ и в случае конечности одного из интегралов $\int_T f^+(t)d\mu$, $\int_T f^-(t)d\mu$, где $f^+(t) = \max\{f(t),0\}$, $f^-(t) = \min\{f(t),0\}$, $\int_T f(t)d\mu$ полагают равным $\int_T f^+(t)d\mu - \int_T f^-(t)d\mu$. Функцию f называют **интегрируемой по Лебегу**, если $\int_T |f(t)|d\mu < \infty$.

Пусть $(T, \mathfrak{F}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой μ, X — банахово пространство. Функция $f : T \to X$ называется простой, если существуют $x_1, \dots, x_n \in X$ и $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{F}$ такие, что $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\cup_{i=1}^n E_i = T$, $f = \sum_{i=1}^n x_i 1_{E_i}$. Функция $f : T \to X$ называется μ-измеримой, если существует последовательность простых функций (f_n) с $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$ для μ-почти всех $t \in T$. Если последовательность (f_n) μ-измеримых функций $f_n : T \to X$ μ-почти всюду слабо сходится к f, то f также μ-измерима.

Функция (μ-измеримая) $f : T \to X$ называется **интегрируемой по Бохнеру**, если существует последовательность (f_n) простых функций $f_n : T \to X$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_T \|f_n - f\| d\mu = 0$. В этом случае **интеграл Бохнера** $\int_E f d\mu$ определяется для каждого $E \in \mathfrak{F}$ с помощью соотношения $\int_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, где $\int_E f_n d\mu$ — интеграл, определенный обычным образом $\sum_{i=1}^n x_i \mu(E_i \bigcap E)$.

Функция (μ-измеримая) $f : T \to X$ интегрируема по Бохнеру, если и только если функция $\|f\| : T \to R_+$ является $(\mathfrak{F}, \beta(R_+))$-измеримой и $\int_T \|f\| d\mu < \infty$.

Предложение 1.8 [139, p. 11]. *Если функция $f : T \to X$ — интегрируемая по Бохнеру, то*

1) $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E f d\mu = 0$;

2) $\| \int_E f d\mu \| \leqslant \int_E \|f\| d\mu$ *для каждого* $E \in \mathfrak{F}$;

3) *если (E_n) — последовательность попарно не пересекающихся множеств из $\mathfrak{F}$ и $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$.*

Предложение 1.9 ([139, p. 11]). *Пусть (f_n) — последовательность определенных на T интегрируемых по Бохнеру функций, сходящаяся для μ-почти всех $t \in T$ к функции $f : T \to X$. Если $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E \|f_n\| d\mu = 0$ равномерно по $n \in N$, то f — интегрируема по Бохнеру и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_B f_n d\mu = \int_B f d\mu$ для каждого $B \in \mathfrak{F}$.*

Если $1 \leqslant p < \infty$, то символом $L_p(T, \mathcal{F}, \mu, X)$ или кратко $L_p(T, X)$ обозначаем множество интегрируемых по Бохнеру функций $f : T \to X$ таких, что $\|f\| = (\int_T \|f\|^p d\mu)^{1/p} < \infty$. Множество функций $L_p(T, X)$ (точнее множество классов, состоящих из эквивалентных функций) с нормой $\|f\|$ является банаховым пространством. Символ $L_\infty(T, X)$ используем для обозначения банахова пространства μ-измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \|f\|$.

Предложение 1.10 (теорема Рисса [139, p. 13]). *Если $A : L_1(T, R) \to X$ — непрерывный линейный оператор, то существует функция $g \in L_\infty(T, X)$ такая, что $A(f) = \int_T fg d\mu$ для всех $f \in L_1(T, R)$.*

Рассмотрим векторную меру $\nu : \mathcal{F} \to X$. Если каждое множество нулевой μ меры имеет нулевую ν меру, то говорят, что ν является μ-непрерывной. Пусть $\nu : \mathcal{F} \to X$ определена равенством $\nu(E) = \int_E f d\mu$ для $E \in \mathcal{F}$, где $f : T \to X$ — интегрируемая по Бохнеру функция, тогда ν является μ-непрерывной и имеет ограниченную вариацию $|\nu|(E) = \int_E \|f\| d\mu$, $E \in \mathcal{F}$.

Предложение 1.11 (теорема Радона — Никодима [139, p. 13]). *Пусть $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой μ, X — конечномерное банахово пространство. Если $\nu : \mathcal{F} \to X$ — μ-непрерывная векторная мера ограниченной вариации, то существует единственная функция $g \in L_1(T, X)$ такая, что $\nu(E) = \int_E g d\mu$ для всех $E \in \mathcal{F}$.*

Функция $g \in L_1(T, X)$, определяемая теоремой Радона — Никодима, называется **производной Радона — Никодима** векторной меры ν относительно меры μ и обозначается $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Подмножество $K \in L_1(T, X)$ называется **равномерно интегрируемым**, если $\lim\limits_{\mu(E) \to 0} \int_E \|f\| d\mu = 0$ равномерно по $f \in K$ и $\sup\limits_{f \in K} \int_T \|f\| d\mu < \infty$.

Предложение 1.12 (теорема Данфорда [139, p. 12]). *Подмножество $K \in L_1(T, R)$ является относительно секвенциально слабо компактным, если и только если оно равномерно интегрируемо.*

Множество $K \subset L_1(T, X)$ называют интегрально ограниченным, если существует интегрируемая функция $\lambda : T \to R_+$ такая, что для каждой функции $v(\cdot) \in K$ для почти всех t $\quad \|v(t)\| \leqslant \lambda(t)$.

Предложение 1.13 (теорема Дистеля [126]). *Пусть: X — банахово пространство; T — измеримое пространство с конечной мерой μ; K — подмножество из $L_1(T, X)$. Предположим далее, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $T_\varepsilon \subset T$ и слабо компактное подмножество $Q_\varepsilon \subset X$ такие, что $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и для каждой функции $v(\cdot) \in K$ почти всюду на T_ε выполняется условие $v(t) \in Q_\varepsilon$. Тогда множество K относительно слабо компактно.*

Пусть $(T_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(T_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ — два измеримых пространства с конечными мерами. Тогда σ-алгебра подмножеств из $T_1 \times T_2$, порожденная множествами $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$, называется **произведением σ-алгебр** $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, обозначается $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Мера μ на $(T_1 \times T_2, \mathcal{F}_1 \times \times \mathcal{F}_2)$ такая, что $\mu(A \times B) = \mu(A) \times \mu(B)$, $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$, называется **произведением мер** μ_1 и μ_2, обозначается $\mu_1 \times \mu_2$.

Предложение 1.14 (теорема Фубини [108, с. 213–217]). *Пусть функция $f(t_1, t_2)$ является $(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \beta(R))$-измеримой и*

$$\int\limits_{T_1 \times T_2} |f(t_1, t_2)| d(\mu_1 \times \mu_2) < \infty.$$

Тогда интегралы $\int_{T_1} f(t_1, t_2) d\mu_1$ и $\int_{T_2} f(t_1, t_2) d\mu_2$ являются соответственно μ_2-измеримой, μ_1-измеримой функциями и справедливо равенство

$$\int\limits_{T_1 \times T_2} f(t_1, t_2) d(\mu_1 \times \mu_2) = \int\limits_{T_1} d\mu_1 \int\limits_{T_2} f(t_1, t_2) d\mu_2 = \int\limits_{T_2} d\mu_2 \int\limits_{T_1} f(t_1, t_2) d\mu_1.$$

Если $T \subset R^d$, то обычно будем считать, что в измеримом пространстве $(T, \mathcal{F}, \mu)$ σ-алгебра $\mathcal{F}$ состоит из измеримых по Лебегу подмножеств из T, а μ — мера Лебега. В этом случае $(\mathcal{F}, \beta(R^n))$-измеримая функция $f : T \to R^n$ называется измеримой по Лебегу, а для интеграла Лебега функции f используем обозначение $\int_T f dx$.

Предложение 1.15 (обобщенное неравенство Минковского [82, с. 302]). *Пусть* $D \subset R^n$, $G \subset R^m$ *и функция* $f : D \times G \to$ $\to R$ *такова, что для некоторого* $1 \leqslant p < \infty$ *выполнено условие* $\int_D (\int_G |f(x,y)|^p dx)^{1/p} dy < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_G \left(\int\limits_D f(x,y) dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leqslant \int\limits_D \left(\int\limits_G |f(x,y)|^p dx \right)^{1/p} dy < \infty.$$

Предложение 1.16 (теорема о монотонных классах [79, с. 18–19]). *Пусть* $\mathcal{H}$ *— векторное пространство ограниченных действительных функций, заданных на* Ω, *содержащее единицу, замкнутое относительно равномерной сходимости и такое, что для каждой возрастающей равномерно ограниченной последовательности неотрицательных функций* $f_n \in \mathcal{H}$ *предельная функция* $f = \lim f_n$ *принадлежит* $\mathcal{H}$. *Пусть* $\mathcal{E}$ *— подмножество* $\mathcal{H}$, *замкнутое относительно умножения. Тогда пространство* $\mathcal{H}$ *содержит все ограниченные функции, измеримые относительно* σ*-алгебры, порожденной элементами* $\mathcal{E}$.

Следующие условия также достаточны для справедливости теоремы о монотонных классах:

а) $\mathcal{H}$ — множество действительных функций, замкнутое относительно монотонной сходимости;

б) $\mathcal{E}$ — векторное пространство, замкнутое относительно операции $f \times g$, и $1 \in \mathcal{E}$.

Предложение 1.17 (лемма Цорна [29, с. 55]). *Пусть* P *— непустое частично упорядоченное множество со свойством: каждое упорядоченное подмножество из* P *имеет верхнюю грань в* P. *Тогда* P *содержит максимальный элемент.*

1.2. Случайные процессы

1. Вероятностное пространство.

Первоначальным объектом теории вероятности является **вероятностное пространство** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, состоящее из множества Ω и системы $\mathcal{F}$ его подмножеств, образующих σ-алгебру, а P — вероятностная мера (вероятность), определенная на множествах из $\mathcal{F}$, т. е. мера на $\mathcal{F}$ такая, что $P(\Omega) = 1$. Пусть

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $(E, \beta(E))$ — измеримое пространство, состоящее из топологического пространства E и борелевской σ-алгебры $\beta(E)$. Функция $\xi : \Omega \to E$ называется **случайной величиной**, если она $(\mathcal{F}, \beta(E))$-измерима.

Система множеств $\mathcal{F}^P$ называется **пополнением σ-алгебры** $\mathcal{F}$ по мере P, если $\mathcal{F}^P$ принадлежат все те множества $A \in \Omega$, для которых найдутся такие множества $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $P(A_2 \setminus A_1) = 0$. Система множеств $\mathcal{F}^P$ является σ-алгеброй, и мера P однозначно продолжается с $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^P$. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется полным, если $\mathcal{F}^P$ совпадает с $\mathcal{F}$.

Предложение 1.18 [8, с. 13–14]. *Пусть (S, ρ) — полное метрическое пространство. Тогда для каждого $B \in \beta(S)$ имеет место равенство*

$$P(B) = \sup_{(K \subset B,\ K \text{ — компактно})} P(K).$$

2. Условное математическое ожидание.

Математическим ожиданием случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в банаховом пространстве X называется интеграл Бохнера $\int_\Omega \xi(\omega) dP$ (обозначают $E(\xi)$).

Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ называется **интегрируемой**, если $\int_\Omega \|\xi\| dP < \infty$.

Пусть $\xi(\omega)$ — интегрируемая случайная величина со значениями в конечномерном банаховом пространстве и $\mathcal{J}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{F}$. Тогда формула $\mu(B) = \int\limits_B \xi(\omega) P(d\omega)$, $B \in \mathcal{J}$, определяет вероятностную меру на $(\Omega, \mathcal{J})$, которая является непрерывной относительно меры $\nu = P|\mathcal{J}$. Производная Радона — Никодима $d\mu/d\nu$ обозначается $E(\xi|\mathcal{J})$ и называется **условным математическим ожиданием** ξ относительно $\mathcal{J}$. Таким образом, $E(\xi|\mathcal{J})$ является $\mathcal{J}$-измеримой интегрируемой случайной величиной Y такой, что $\int_B Y(\omega) P(d\omega) = \int_B \xi(\omega) P(d\omega)$ для всех $B \in \mathcal{J}$.

Свойства условных математических ожиданий случайных величин со значениями в $\boldsymbol{R}$ [108, с. 232–236].

I) $E(aX + bY|\mathcal{J}) = aE(X|\mathcal{J}) + bE(Y|\mathcal{J})$;

II) если $X \geqslant 0$ п. н., то $E(X|\mathcal{J}) \geqslant 0$ п. н.;

III) $E(1|\mathcal{J}) = 1$ п. н.;

IV) если X — $\mathcal{J}$-измерима, то $E(X|\mathcal{J}) = X$ п. н. В общем случае, если XY интегрируема и X — $\mathcal{J}$-измерима, то $E(XY|\mathcal{J}) = XE(Y|\mathcal{J})$ п. н.;

V) если $\mathcal{H}$ — под-σ-алгебра σ-алгебры $\mathcal{J}$, то $E(E(X|\mathcal{J})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ п. н.,

VI) если $X_n \to X$ в $L_1(\Omega, R)$, то $E(X_n|\mathcal{J}) \to E(X|\mathcal{J})$ в $L_1(\Omega, R)$.

3. Последовательности случайных величин.

Пусть (ξ_n) — последовательность случайных величин, заданная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в метрическом пространстве (S, ρ). Последовательность называется сходящейся **по вероятности** к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{\rho(\xi_n, \xi) > \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Последовательность называется сходящейся **с вероятностью 1** (**почти наверное**) к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$), если

$$P\{\omega \mid \xi_n \to \xi\} = 1.$$

Последовательность случайных величин называется **сходящейся в среднем порядка** p, $0 < p < \infty$, к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$), если

$$E(\rho^p(\xi_n, \xi)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Последовательность случайных величин ξ_n, $n \geqslant 1$, со значениями в R называется **слабо сходящейся** к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{сл.}}} \xi$), если для любой ограниченной случайной величины η

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n \eta) = E(\xi\eta).$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi;$$

$$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad p > 0.$$

Обратные импликации, вообще говоря, несправедливы, но отметим, что если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то из последовательности ξ_n можно выбрать подпоследовательность ξ_{n_k}, сходящуюся с вероятностью 1.

Если $\xi : \Omega \to S$ — случайная величина, то равенство $P^{\xi}(B) = P(\xi(\omega) \in B)$, $B \in \beta(S)$ определяет вероятность на $(S, \beta(S))$. Мера P^{ξ} называется **законом распределения** случайной величины ξ.

Пусть $(S, \beta(S), \rho)$ — метрическое пространство S с метрикой ρ и σ-алгеброй борелевских подмножеств $\beta(S)$ и пусть $\mathcal{P}(S)$ — совокупность вероятностей на $(S, \beta(S))$, а (P_n) — последовательность вероятностей из $\mathcal{P}(S)$. Последовательность (P_n) называется **слабо сходящейся к вероятностной мере** P (обозначается $P_n \overset{\text{сл.}}{\to} P$), если

$$\int_S f(x) dP_n \to \int_S f(x) dP$$

для всех функций $f \in C^b(S)$, где $C^b(S)$ — множество непрерывных ограниченных на S функций.

Предложение 1.19 [8, с. 14–15]. *Следующие пять условий эквивалентны:*

1) $P_n \overset{\text{сл.}}{\to} P$;

2) $\int_S f(x) dP_n \to \int_S f(x) dP$ *для каждой равномерно непрерывной функции* $f \in C^b(S)$;

3) $\limsup\limits_{n\to\infty} P_n(F) \leqslant P(F)$ *для каждого замкнутого множества* F;

4) $\liminf\limits_{n\to\infty} P_n(G) \leqslant P(G)$ *для каждого открытого множества* G;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ *для каждого* $A \in \beta(S)$ *с* $P(\partial A) = 0$.

Последовательность ξ_n S-значных случайных величин, которые могут быть определены на разных вероятностных пространствах, называется **сходящейся по распределению** к случайной величине ξ (обозначается $\xi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \xi$), если $P^{\xi_n} \overset{\text{сл.}}{\to} P^{\xi}$.

Множество вероятностных мер $\{P_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, $p_\alpha \in \mathcal{P}(S)$, называется **относительно компактным**, если из любой последовательности мер из этого множества можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере из $\mathcal{P}(S)$.

Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ называется **плотным**, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset S$ такой, что

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha(S \setminus K) \leqslant \varepsilon.$$

Последовательность случайных величин $\xi_n : \Omega_n \to S$ называется плотной в S, если последовательность распределений P^{ξ_n} плотна.

Предложение 1.20 (теорема Прохорова [8, с. 16]). *Пусть* $\{P_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ *— семейство вероятностных мер, заданных на* $(S, \beta(S))$. *Если семейство* $\{P_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ *плотно, то оно относительно компактно. В случае, когда* S *полное метрическое пространство, справедливо и обратное утверждение.*

Слабую сходимость $P_n \overset{\text{сл.}}{\to} P$ можно «метризовать», т. е. вести такое расстояние $\nu(P, \bar{P})$ между двумя мерами P и $\bar{P}$, чтобы $P_n \overset{\text{сл.}}{\to} P$ было равносильно $\nu(P_n, P) \to 0$. Одной из такой метрик является метрика Леви — Прохорова. Положим $\sigma(P, \bar{P}) = \inf\{\epsilon > 0 \mid P(F) \leqslant \bar{P}([F]_\epsilon) + \epsilon$ для всех замкнутых $F \in S\}$, где $[F]_\epsilon$ — ϵ-окрестность множества F. Функция, определенная равенством $L(P, \bar{P}) = \max\{\sigma(P, \bar{P}), \sigma(\bar{P}, P)\}$, является метрикой на $\mathcal{P}(S)$ и называется **метрикой Леви — Прохорова**.

Предложение 1.21 [108, с. 375–377]. *Метрика Леви — Прохорова метризует слабую сходимость*:

$$L(P_n, P) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow P_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\to}} P.$$

Если $f : R^d \to R$ — измеримая по Борелю функция, $\xi : \Omega \to R^d$ — случайная величина, $E(f(\xi(\omega))) < \infty$, то

$$E(f(\xi(\omega))) = \int_\Omega f(\xi(\omega))dP = \int_{R^d} f(x)dP^\xi.$$

Случайные величины $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega')$, заданные на вероятностных пространствах $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ соответственно и со значениями в одном и том же пространстве S, называют **эквивалентными по распределению** (обозначают $P^X = P^Y$), если они имеют одинаковые законы распределения. Пусть $C(R_+, R^d)$ — множество всех непрерывных функций, определенных на R_+ со значениями в R^d. Определим метрику

$$\rho_c(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \max_{0\leqslant t\leqslant n} \|f_1(t) - f_2(t)\|).$$

Топология на $C(R_+, R^d)$, порожденная этой метрикой, называется **локально равномерной**. Последовательность (f_n) сходится к f в $(C(R_+, R^d), \rho_c)$ тогда и только тогда, когда (f_n) сходится к f равномерно на каждом компактном интервале из R_+.

Предложение 1.22 (теорема Асколи — Арцела [139, p. 15]). *Подмножество A из пространства $(C(R_+, R^d), \rho_c)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда для каждого $T \in R_+$ выполнены условия*

1) $\sup\limits_{f\in A} \max\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\| < \infty$,
2) $\lim\limits_{\theta\downarrow 0} \sup\limits_{f\in A} \sup\limits_{|s-t|\leqslant\theta, s,t\in[0,T]} \|f(s) - f(t)\| = 0$.

Пусть $D(R_+, R^d)$ — множество всех функций, непрерывных справа и имеющих конечный предел слева в каждой точке $t \in R_+$. Пусть

$$k_n(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant n, \\ n+1-t, & n < t < n+1, \\ 0, & t \geqslant n+1, \end{cases}$$

Λ — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $\lambda : R_+ \to R^d, \quad \lambda(0) = 0, \quad \lambda(t) \to +\infty,$

$$|||\lambda||| = \sup_{s<t} \ln \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}.$$

Определим метрику на $D(R_+, R^d)$

$$\rho_D(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \delta_n(f_1, f_2)),$$

где $\delta_n(f_1, f_2) = \inf\limits_{\lambda\in\Lambda}(|||\lambda||| + \rho_c(k_n(\lambda)f_1(\lambda), k_n f_2))$. Топология на $D(R_+, R^d)$, порожденная метрикой ρ_D, называется **топологией Скорохода**.

Пространства $(C(R_+, R^d), \rho_c)$, $(D(R_+, R^d), \rho_D)$ являются польскими.

Предложение 1.23 (теорема Скорохода [8, с. 18–20]). *Пусть (S, ρ) — полное сепарабельное метрическое пространство, P, P_n, $n \geqslant 1$, — вероятностные меры на $(S, \beta(S))$ и $P_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\to}} P$. Тогда найдутся такое вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$ и определенные на нем случайные величины X^*, $X_n^*, n \geqslant 1$, со значениями в S, что*

$$X_n^* \underset{n\to\infty}{\overset{\text{п. н.}}{\to}} X^*, \quad P^{X_n^*} = P_n, \quad P^{X^*} = P.$$

Приведем доказательство этого предложения, так как для дальнейшего важно не только само утверждение, но и его доказательство. Докажем предложение для $\tilde{\Omega} = [0,1)$, $\tilde{\mathfrak{F}} = \beta([0,1))$, $\tilde{P} = \mu$ — мера Лебега. Возьмем для каждого k шары $\sigma_m^{(k)}$, $m \geqslant 1$, с радиусами $\leqslant 2^{-(k+1)}$, покрывающие все пространство S и удовлетворяющие условиям $P_n(\partial\sigma_m^{(k)}) = 0$, $P(\partial\sigma_m^{(k)}) = 0$ для каждых n,k,m ($\partial\sigma$ — граница множества σ). Положим для каждого k $D_1^k = \sigma_1^{(k)}$, $D_2^k = \sigma_2^{(k)} \setminus \sigma_1^{(k)}, \ldots, D_n^k = \sigma_n^{(k)} \setminus (\sigma_1^{(k)} \bigcup \ldots \bigcup \sigma_{n-1}^{(k)}), \ldots$ и $S(i_1, i_2, \ldots, i_k) = D_{i_1}^1 \bigcap D_{i_2}^{(2)} \bigcap \ldots \bigcap D_{i_k}^k$. Система построенных множеств обладает следующими свойствами:

1) если $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, то $S(i_1, i_2, \ldots, i_k) \cap \cap S(j_1, j_2, \ldots, j_k) = \varnothing$;

2) $\bigcup_{j=1}^{\infty} S(j) = S$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} S(i_1, i_2, \ldots, i_k, j) = S(i_1, i_2, \ldots, i_k)$;

3) $\operatorname{diam} S(i_1, i_2, \ldots, i_k) \leqslant 2^{-k}$;

4) $P_n(\partial S(i_1, i_2, \ldots, i_k)) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $P(\partial S(i_1, i_2, \ldots, i_k)) = 0$.

Для фиксированного k упорядочим все $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ лексикографически. Определим интервалы $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $\Delta^{(n)}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ в $[0,1]$ следующим образом:

I) $|\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)| = P(S(i_1, i_2, \ldots, i_k))$, $|\Delta^{(n)}(i_1, i_2, \ldots, i_k)| = P_n(S(i_1, i_2, \ldots, i_k))$;

II) если $(i_1, i_2, \ldots, i_k) < (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, то интервал $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ($\Delta^{(n)}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$) расположен левее интервала $\Delta(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ (соответственно интервала $\Delta^{(n)}(j_1, j_2, \ldots, j_k)$);

III) $\bigcup\limits_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k) = [0,1)$, $\bigcup\limits_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} \Delta^{(n)}(i_1, i_2, \ldots, i_k) = [0,1)$ (здесь под интервалами понимаются множества вида $[a,b)$, $a \leqslant b$, а $|\Delta|$ обозначает длину интервала Δ).

Очевидно, что эти интервалы перечисленными свойствами определяются однозначно. Для каждого $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, если только $\mathring{S}(i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq \varnothing$, мы выберем точку $x_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} \subseteq \mathring{S}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ ($\mathring{S}$ —внутренность множества S). Для $\omega \in [0,1)$ положим $X_n^k(\omega) = x_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, если $\omega \in \Delta^{(n)}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, и $X^k(\omega) = x_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, если $\omega \in \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, для $k = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $\rho(X_n^k(\omega), X_n^{k+p}(\omega)) \leqslant 2^{-k}$, $\rho(X^k(\omega), X^{k+p}(\omega)) \leqslant 2^{-k}$, и поэтому существуют $X_n(\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} X_n^k(\omega)$ $X(\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} X^k(\omega)$ из-за полноты (S, ρ).

Так как $P_n(S(i_1,i_2,\dots,i_k)) = |\Delta^{(n)}(i_1,i_2,\dots,i_k)| \to |\Delta(i_1,i_2,\dots,i_k)| = P(S(i_1,i_2,\dots,i_k)$, то для $\omega \in \overset{\circ}{\Delta}(i_1,i_2,\dots,i_k)$ найдется такое n_k, что $\omega \in \overset{\circ}{\Delta}{}^{(n)}(i_1,i_2,\dots,i_k)$ для всех $n \geqslant n_k$. Тогда $X_n^k(\omega) = X^k(\omega)$ и, следовательно, $\rho(X_n(\omega),X(\omega)) \leqslant \rho(X^n(\omega),X_n^k(\omega)) + \rho(X_n^k(\omega),X^k(\omega)) + \rho(X^k(\omega),X(\omega)) \leqslant 2^{-(k-1)}$, если $n \geqslant n_k$. Поэтому если положим $\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{(i_1,i_2,\dots,i_k)} \overset{\circ}{\Delta}(i_1,i_2,\dots,i_k))$, то $X_n(\omega) \to X(\omega)$ для $\omega \in \Omega_0$ при $n \to \infty$ и, очевидно, $\tilde{P}(\Omega_0) = 1$.

Покажем, наконец, что $\tilde{P}^{X_n} = P_n$ и $\tilde{P}^X = P$. Так как $\tilde{P}\{\omega \mid X_n^{k+p}(\omega) \in \bar{S}(i_1,i_2,\dots,i_k)\} = \tilde{P}\{\omega \mid X_n^{k+p}(\omega) \in \overset{\circ}{S}(i_1,i_2,\dots,i_k)\}$ и каждое открытое множество в S представимо в виде счетного объединения непересекающихся множеств $S(i_1,i_2,\dots,i_k)$, то по лемме Фату имеем $\liminf\limits_{p\to\infty} \tilde{P}^{X_n^p}(O) \geqslant P_n(O)$ для каждого открытого множества O в S. Тогда, согласно предложению 1.19, $\tilde{P}^{X_n^p}$ слабо сходится к P_n при $p \to \infty$ и тем самым $\tilde{P}^{X_n} = P_n$. Аналогично $\tilde{P}^X = P$. Теорема доказана.

Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, $\xi_\alpha : \Omega \to R^d$, называется **равномерно интегрируемым**, если

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{\alpha\in\Lambda} \int\limits_{\|\xi_\alpha\|>x} \|\xi_\alpha\| dP = 0,$$

что равносильно следующим двум условиям:

$$\sup_\alpha E\|\xi_\alpha\| < \infty, \quad \lim_{P(A)\to 0} \sup_\alpha \int\limits_A \|\xi_\alpha\| dP = 0, \quad A \in \mathfrak{F}.$$

Предложение 1.24 (лемма Фату [71, с. 24]).

а) *Если последовательность действительных случайных величин* $\xi_n^+ = \xi_n \vee 0$, $n \geqslant 1$, *равномерно интегрируема и существует* $E(\limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n)$, *то имеет место неравенство*

$$E(\limsup_{n\to\infty} \xi_n | \mathfrak{I}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} E(\xi_n | \mathfrak{I}) \text{ п. н.} \tag{1.1}$$

В частности, если для последовательности ξ_n *существует интегрируемая случайная величина* ξ *такая, что* $\xi_n \leqslant \xi$, *то последовательность* ξ_n^+ *равномерно интегрируема и, следовательно, справедливо неравенство* (1.1).

b) *Если* $\xi_n \geqslant \xi$ *для всех* $n \geqslant 1$ *и* $E(\xi) > -\infty$, *то*

$$E(\liminf_{n\to\infty} \xi_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(\xi_n).$$

Предложение 1.25 [71, с. 25]. *Пусть выполнены условия* $0 \leqslant \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \xi$ *и* $E(\xi_n) < \infty$, $n \geqslant 1$. *Для сходимости*

$$E(\xi_n \mid \mathcal{J}) \xrightarrow{\text{п. н.}} E(\xi \mid \mathcal{J})$$

необходима и достаточна равномерная интегрируемость последовательности ξ_n.

Предложение 1.26 (теорема Лебега о мажорируемой сходимости [71, с. 25]). *Пусть* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \xi$ *и существует такая интегрируемая случайная величина* η, *что* $|\xi_n| \leqslant \eta$. *Тогда*

$$E(|\xi_n - \xi| \mid \mathcal{J}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0.$$

Сформулированное утверждение остается справедливым, если сходимость $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$ заменить на сходимость по вероятности $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$.

Пусть $\mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$ — неубывающая последовательность под-σ-алгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$. Минимальную σ-алгебру, содержащую алгебру $\bigcup_n \mathcal{F}_n$, обозначим через $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_n \mathcal{F}_n$.

Предложение 1.27 (теорема Леви [71, с. 25]). *Пусть* ξ *— действительная случайная величина с* $E(|\xi|) < \infty$. *Тогда с вероятностью* 1 *имеет место соотношение*

$$E(\xi \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\xi \mid \mathcal{F}_\infty).$$

Предложение 1.28 (критерий Валле — Пуссена [71, с. 26]). *Для равномерной интегрируемости последовательности* (ξ_n) *действительных интегрируемых случайных величин необходимо и достаточно существование такой положительной возрастающей выпуклой функции* $G(t)$, $t \geqslant 0$, *для которой*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, \qquad \sup_n E(G(\xi_n)) < \infty.$$

4. Основные неравенства для математических ожиданий действительных случайных величин [108, с. 206–209].

Неравенство Коши — Буняковского. Пусть ξ, η таковы, что $E(\xi^2) < \infty$, $E(\eta^2) < \infty$. Тогда $E(|\xi\eta|) < \infty$ и $E(|\xi\eta|) \leqslant \sqrt{E(\xi^2)E(\eta^2)}$.

Неравенство Чебышева. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина. Если $E(\xi) < \infty$, то для всякого $a > 0$ выполняется неравенство

$$P\{\xi > a\} \leqslant \frac{E(\xi)}{a}.$$

Для произвольной случайной величины ξ, $E(\xi^2) < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leqslant \frac{E(\xi^2)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Гёльдера. Если $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $E(|\xi|^p) < \infty$, $E(|\eta|^q) < \infty$, то

$$E(|\xi\eta|) \leqslant (E(|\xi|^p))^{1/p}(E(|\eta|^q))^{1/q}.$$

Неравенство Минковского. Если $1 \leqslant p < \infty$, $E(|\xi|)^p < \infty$, $E(|\eta|)^p < \infty$, то

$$E(|\xi + \eta|^p)^{1/p} \leqslant (E(|\xi|^p))^{1/p} + (E(|\eta|^p))^{1/p}.$$

Неравенство Иенсена. Пусть $f(x)$ — действительная непрерывная выпуклая функция и $E(|f(\xi)|) < \infty$. Тогда

$$f(E(\xi)) \leqslant Ef(\xi).$$

Неравенство Ляпунова. Если $0 < s < t$, $E(|\xi|^t < \infty)$, то

$$(E(|\xi|^s))^{1/s} \leqslant (E(|\xi|^t))^{1/t}.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность множеств из $\mathcal{F}$. Множества $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ называют соответственно верхним и нижним пределом последовательности (A_n).

Предложение 1.29 (лемма Бореля — Кантелли [71, с. 27]). *Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(A^*) = 0$. Если же $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ и $A_1, A_2, \ldots$ независимы, то $P(A^*) = 1$.*

5. Случайные процессы.

Рассмотрим пространство $(C(R_+, R^d), \rho_c)$. **Борелевским цилиндрическим множеством** в этом пространстве называют множество $B \in C(R_+, R^d)$ вида

$$B = \{h|(h(t_1), h(t_2), \ldots, h(t_n)) \in M\},$$

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \quad \text{и} \quad M \in \beta(R^{nd}).$$

Если обозначить через $\mathcal{G}$ совокупность всех борелевских цилиндрических множеств, то σ-алгебры $\sigma[\mathcal{G}]$ и $\beta(C(R_+, R^d))$ совпадают.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $T = R_+$ или $T = [0, a]$, $a > 0$. Семейство $X_t, t \in T$, случайных величин $X_t(\omega)$ со значениями в R^d, называется d-мерным **случайным процессом**. При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $t \to X_t(\omega)$ называется **траекторией** процесса. С каждым случайным процессом X_t связывают σ-алгебру $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s|s \leqslant t\}$, являющуюся наименьшей σ-алгеброй, относительно которой измеримы случайные величины $X_s, s \leqslant t$.

Случайный процесс X_t называется **измеримым**, если для любых борелевских множеств $B \in \beta(R)$ множество $\{(\omega, t) \mid X_t(\omega) \in B\}$ принадлежит $\mathcal{F} \times \beta(T)$.

Предложение 1.30 [71, с. 30].

Пусть X_t *— измеримый случайный процесс. Тогда*:

1) *почти все траектории являются измеримыми по Борелю функциями*;

2) *функция* $m(t) = E(X_t)$ *является измеримой, если для каждого* t *случайная величина* $||X_t||$ *интегрируема*;

3) *если* S *— измеримое множество из* T *и* $\int_S E(||X_t||)dt < \infty$, *то*

$$\int\limits_S E(X_t)dt = E\biggl(\int\limits_S X_t dt\biggr).$$

Пусть $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — возрастающее семейство под-σ-алгебр из $\mathcal{F}$, т. е. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, если $0 \leqslant t \leqslant s$. Семейство $(\mathcal{F}_t)$ называется непрерывным справа, если $\mathcal{F}_{t+0} \equiv \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t$ для каждого $t \in R_+$. В дальнейшем предполагается, что $(\mathcal{F}_t)$ непрерывно справа. Такое семейство $(\mathcal{F}_t)$ называется **потоком**.

Процесс X_t, $t \geqslant 0$, называется $(\mathcal{F}_t)$-**согласованным**, если случайная величина $X_t(\omega)$ $(\mathcal{F}_t)$-измерима при каждом t. Процесс X_t, $t \geqslant 0$, называется **прогрессивно измеримым**, если для каждого $t \in T$

$$\{(\omega, s \leqslant t) \mid X_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t \times \beta([0,t]),$$

где B — борелевское множество на R^d, а $\beta([0,t])$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[0,t]$.

Прогрессивно измеримый случайный процесс является измеримым и $(\mathcal{F}_t)$-согласованным.

Пусть X_t, $t \geqslant 0$, — измеримый случайный процесс на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $E(||X_t||) < \infty$ и пусть $(\mathcal{F}_t)$ поток под-σ-алгебр. Тогда условные математические ожидания $\eta_t = E(X_t|\mathcal{F}_t)$ могут быть выбраны таким образом, что процесс η_t будет измеримым [71, с. 32]. Случайные процессы X_t, Y_t, $t \in T$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называются **стохастически эквивалентными**, если $P(X_t \neq Y_t) = 1$ для всех $t \in T$. Процесс $Y(t)$, стохастически эквивалентный $X(t)$, называют модификацией процесса $X(t)$. Если X_t — измеримый $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс, то у него существует прогрессивно измеримая модификация.

Непрерывным (d-мерным) процессом X_t, заданным на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется случайная величина со значением в $C(R_+, R^d)$, т. е. $(\mathcal{F}, \beta(C(R_+, R^d))$-измеримое отображение $X : \Omega \to C(R_+, R^d)$. Случайная величина со значениями в $(D(R_+, R^d), \rho_D)$ называется **процессом Скорохода**. Наименьшую σ-алгебру на $R_+ \times \Omega$, относительно которой измеримы все $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы Скорохода, обозначим $\mathcal{G}$, а через $\Im$ — наименьшую σ-алгебру на $R_+ \times \Omega$, относительно которой измеримы все $(\mathcal{F}_t)$-согласованные непрерывные слева процессы. Процесс X_t называется **предсказуемым**, если отображение $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ $(\Im, \beta(R^d))$-измеримо. Процесс называется **вполне измеримым**, если отображение $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ $(\mathcal{G}, \beta(R^d))$-измеримо. Любой предсказуемый процесс вполне измерим.

Предложение 1.31 [8, с. 26]. *Пусть $X_n(t)$ — последовательность d-мерных процессов, определенных на вероятностных пространствах $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ и удовлетворяющих условиям:*

$$\lim_{N \to \infty} \sup_n P_n\{\|X_n(0)\| > N\} = 0; \tag{1.2}$$

для любых $t_1 > 0$, $\epsilon > 0$

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_n P_n\{\max_{(t,s)\in[0,t_1],|t-s|\leqslant h} \|X_n(t) - X_n(s)\| > \epsilon\} = 0. \qquad (1.3)$$

Тогда последовательность $(X_n(t))$ *плотна в* $C(R_+, R^d)$.

Предложение 1.32 [8, с. 27]. *Пусть* $X_n(t)$ *— последовательность* d*-мерных непрерывных процессов, определенных на вероятностных пространствах* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ *и удовлетворяющих условию: существуют положительные постоянные* α, β, M_k, $k = 1, 2, \ldots,$ *такие, что* $E_n\{\|X_n(t) - X_n(s)\|^\alpha\} \leqslant M_k|t - s|^{1+\beta}$ *для каждых* n *и* $t, s \in [0, k]$, $k \geqslant 1$. *Тогда последовательность* X_n *удовлетворяет условию* (1.3).

6. Моменты остановки.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и поток под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t$. Отображение $\sigma : \Omega \to [0, +\infty]$ называется **моментом остановки**, если для каждого $t \geqslant 0$ множество $\{\omega | \sigma(\omega) \leqslant t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. Для момента остановки σ мы полагаем:

$$\mathcal{F}_\sigma = \{A \in \mathcal{F} \big| \forall t \in [0, +\infty[, A \cap \{\sigma(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Ясно, что $\mathcal{F}_\sigma$ — под-σ-алгебра $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_t$ если $\sigma(\omega) = t$.

Если X_t — действительный непрерывный процесс, $\mathcal{F}_t$ — поток под-σ-алгебр, C — открытое множество, то момент первого достижения множества C

$$\sigma_C = \inf\{t \geqslant 0 \mid X_t \in C\}$$

является моментом остановки. Если C является замкнутым множеством, то σ_C является моментом остановки относительно $\mathcal{F}_t^X$.

Свойства моментов остановки [71, с. 34–39].

1. Если τ_1, τ_2 — моменты остановки, то $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 \vee \vee \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 + \tau_2$ тоже являются моментами остановки.

2. Пусть τ_n — последовательность моментов остановки, тогда $\sup \tau_n$, $\inf \tau_n$, $\limsup_n \tau_n$, $\liminf_n \tau_n$ также являются моментами остановки.

3. Пусть X_t — действительный прогрессивно измеримый процесс и τ — момент остановки такой, что $P(\tau < \infty) = 1$. Тогда функция $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ является $(\mathcal{F}_\tau)$-измеримой.

В дальнейшем множество $[0, +\infty]$ считаем метрическим пространством с метрикой

$$\rho(\tau, \tau^1) = \left| \frac{\tau}{1+\tau} - \frac{\tau^1}{1+\tau^1} \right|,$$

где $\tau/(1+\tau) = 1$, если $\tau = \infty$.

Предложение 1.33 [162, p. 297]. *Пусть*: D — *область в* R^d; P — *вероятность на* $\beta(C(R_+, R^d))$ *такая, что* $P\{x(t) \mid x(t) \in \overline{D}, t \in R_+\} = 1$; A — *непустое замкнутое подмножество в* $\overline{D}$; $\tau_x(\varepsilon) = \inf\{t \mid x(t) \in [A]_\varepsilon\} \in [0, \infty]$, $\varepsilon > 0$. *Тогда за исключением не более счетного множества значений* ε *для* P*-почти всех* $x \in C(R_+, R^d)$ *функция* $\varepsilon \to \tau_x(\varepsilon)$ *непрерывна.*

7. Мартингалы.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\mathcal{F}_t$ — поток под-σ-алгебр. Действительный случайный процесс X_t, $t \in \mathbf{T}$, где $\mathbf{T} = [0, \infty]$ или $\mathbf{T} = R_+$ или $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ называется **мартингалом (супермартингалом, субмартингалом)** относительно $\mathcal{F}_t$, если:

I) случайная величина X_t интегрируема для каждого $t \in \mathbf{T}$;

II) процесс X_t — $(\mathcal{F}_t)$-согласован;

III) $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ (соответственно $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$) п. н. для любых $t, s \in \mathbf{T}$ и $s < t$.

Свойства мартингалов.

1. Если X_t — субмартингал ($t \in R_+$), то с вероятностью 1 для каждого $t \geqslant 0$ существует предел $\hat{X}_t = \lim\limits_{s \downarrow t} X_s$ и процесс $\hat{X}_t$ является субмартингалом таким, что отображение $t \to \hat{X}_t$ непрерывно справа и имеет предел слева п. н.; $X_t \leqslant \hat{X}_t$ п. н. для всякого $t \in R_+$ [8, с. 41].

2. Если X_t — непрерывный справа мартингал с $E(|X_t|^p) < \infty$, то для каждого $t_1 > 0$ [8, с. 41]

$$P[\sup_{t \in [0, t_1]} |X_t| > \lambda] \leqslant \frac{E(|X_{t_1}|^p)}{\lambda^p} \quad (p \geqslant 1),$$

$$E(\sup_{t \in [0, t_1]} |X_t|^p) \leqslant (\frac{p}{p-1})^p E(|X_{t_1}|^p) \quad (p > 1).$$

3.(Теорема о преобразовании свободного выбора [8, с. 42]). Пусть X_t — непрерывный справа субмартингал относительно $\mathcal{F}_t$ и σ_t — семейство ограниченных моментов остановки со свойством $P\{\sigma_t \leqslant \sigma_s\} = 1$, если $t < s$. Пусть $\tilde{X}_t = X_{\sigma_t}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\sigma_t}$, $t \in R_+$. Тогда $\tilde{X}_t$ — субмартингал относительно $\tilde{\mathcal{F}}_t$.

4. Пусть X_t — субмартингал с непрерывными справа траекториями такой, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} E(X_t^+) < \infty$, где $X_t^+ = \max\{X_t, 0\}$. Тогда с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ и $E(X_\infty^+) < \infty$ [71, с. 68].

5. Пусть $X = (x_n)$ — неотрицательный супермартингал. Тогда с вероятностью единица и в $L_1(\Omega)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ и процесс X равномерно интегрируем [8, *с.* 40].

Действительный случайный процесс X_t на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется **локальным** $(\mathcal{F}_t)$-**мартингалом**, если он согласован с $\mathcal{F}_t$ и существует последовательность $(\mathcal{F}_t)$-моментов остановки σ_n с $\sigma_n < \infty$, $\sigma_n \uparrow \infty$ и $X_n = X_n(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-мартингал для каждого $n \geqslant 1$, где $X_n(t) = X(t \wedge \sigma_n)$. Если к тому же X_n — квадратично интегрируемый мартингал, то X называется **локально квадратично интегрируемым** $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Если X_t — непрерывный локальный мартингал и $E(\sup\limits_{t\geqslant 0}|X_t|) < \infty$, то X_t является мартингалом.

8. Броуновские движения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком $\mathcal{F}_t$. Непрерывный случайный процесс $W(t)$ называется r-мерным $(\mathcal{F}_t)$-**броуновским** движением, если

$$E(\exp(i\langle\xi, W(t) - W(s)\rangle)\big|\mathcal{F}_s) = \exp(-(t-s)\|\xi\|^2/2) \quad \text{п. н.}$$

для каждых $\xi \in R^r$ и $0 \leqslant s \leqslant t$. Пусть функция $p(t,x)$, $t > 0$, $x \in R^r$ определяется равенством

$$p(t,x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{||x||^2}{2t}\right).$$

Если $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_r(t))$ — $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение, то $W(t) - W(s)$ не зависит от $\mathcal{F}_s$, закон распределения разности $W(t) - W(s)$ является гауссовским с плотностью $p(t-s, x)$ и

$$E(W_i(t) - W_i(s)\big|\mathcal{F}_s) = 0 \ \text{ п. н.},$$

$$E((W_i(t) - W_i(s)(W_j(t) - W_j(s)\big|\mathcal{F}_s) = \delta_{ij}(t-s) \ \text{ п. н.}$$

Предложение 1.34 [8, с. 86]. *Пусть* $W(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$- *броуновское движение, а* σ — $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки с* $\sigma < \infty$ *п. н. Пусть* $W^*(t) = W(t+\sigma)$ *и* $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_{t+\sigma}$, $t \in [0, +\infty[$. *Тогда* $W^*(t)$ — $(\mathcal{F}_t^*)$*-броуновское движение. В частности,* $B^*(t) = W(t+\sigma) - W(\sigma)$ — *броуновское движение, которое не зависит от* $\mathcal{F}_0^* = \mathcal{F}_\sigma$.

Пусть $\eta_0(\omega), \eta_1(\omega), \dots$ — независимые нормально распределенные случайные величины и пусть

$$W_k(t) = \frac{1}{\pi^{1/2}} t\eta_0 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{m=1}^{N_k} \eta_m \frac{1}{m} \sin mt,$$

где $N_k \to \infty$ — подпоследовательность последовательности натуральных чисел. Тогда последовательность $W_k(t)$ сходится равномерно на $[0, \pi]$ п. н. к некоторому броуновскому движению.

9. Интеграл Ито.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство с потоком $(\mathcal{F}_t)$, причем при каждом $t \geqslant 0$ под-σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ содержит все P-нулевые множества, $B(t)$ — одномерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение.

Пусть $\mathcal{L}_2$ — пространство всех действительных измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных процессов $\Phi(t)$ таких, что для всякого $t_1 > 0$

$$||\Phi||_{2,t_1}^2 = E\left(\int_0^{t_1} \Phi^2(s)ds\right) < \infty.$$

Процессы Φ, $\Phi' \in \mathcal{L}_2$ отождествляем , если $\|\Phi - \Phi'\|_{2,t_1}^2 = 0$ для любого $t_1 > 0$ (пишем $\Phi \simeq \Phi'$). Так как для всякого $\Phi \in \mathcal{L}_2$ существует предсказуемый процесс $\Phi' \simeq \Phi$, то без ограничения общности можно считать, что Φ — предсказуемый процесс. Для $\Phi \in \mathcal{L}_2$ полагаем $||\Phi||_2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(||\Phi||_{2,n} \wedge 1)$.

Через $\mathcal{L}_0$ обозначаем подмножество $\mathcal{L}_2$ процессов $\Phi(t)$ со следующими свойствами: существует последовательность действительных чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty$ и такая последовательность случайных величин (f_i), что f_i являются $(\mathcal{F}_{t_i})$-измеримыми, $\sup\limits_i ||f_i||_\infty < \infty$ и

$$\Phi(t,\omega) = \begin{cases} f_0(\omega), & t = 0, \\ f_i(\omega), & t \in]t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Если $\Phi(t,\omega) \in \mathcal{L}_0$, то полагают

$$I(\Phi)(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)(B(t_{i+1},\omega) - B(t_i,\omega)) + f_n(\omega)(B(t,\omega) - B(t_n,\omega))$$

для $t_n < t \leqslant t_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\mathcal{M}_2 = \{X(t) \mid X$ — квадратично интегрируемый $(\mathcal{F}_t)$-мартингал$\}$, $\mathcal{M}_2^C = \{X \in \mathcal{M}_2 \mid t \to X(t)$ непрерывно п. н.$\}$. Множество $\mathcal{M}_2$ является полным метрическим пространством с метрикой

$$\rho(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\big(E\big((X(n) - Y(n))^2\big)^{1/2} \wedge 1\big).$$

Для любого процесса $\Phi \in \mathcal{L}_2$ найдется последовательность $\Phi_n \in \mathcal{L}_0$ с $||\Phi - \Phi_n||_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность $I(\Phi_n)$ является последовательностью Коши в $\mathcal{M}_2$ и, следовательно, сходится к единственному элементу $I(\Phi) \in \mathcal{M}_2^C$. Процесс $I(\Phi) \in \mathcal{M}_2^C$ называют стохастическим интегралом (или **интегралом Ито**) от $\Phi \in \mathcal{L}_2$ по броуновскому движению $B(t)$.

Определим семейство стохастических интегралов $I_{t,s}(\Phi)$ при $t \geqslant s \geqslant 0$, полагая $I_{t,s}(\Phi) = I(\Phi 1_{[s,t]})$. Для $I_{t,s}(\Phi)$ используется запись $\int_s^t \Phi(\tau,\omega)dW(\tau)$.

Свойства интеграла Ито [8, с. 56–60].

1. Для любых $0 \leqslant s \leqslant t$

$$E(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s) \mid \mathcal{F}_s) = 0 \text{ п. н.}$$

$$E((I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s))^2 \mid \mathcal{F}_s) = E\left(\int_s^t \Phi^2(s,\omega)ds \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) \text{ п. н.}$$

Более того, если σ и τ являются $(\mathcal{F}_t)$-моментами остановки и $\tau \geqslant \sigma$ п. н., то для любого $t > 0$

$$E((I(\Phi)(t\wedge\tau) - I(\Phi)(t\wedge\sigma))(I(\Psi)(t\wedge\tau) - I(\Psi(t\wedge\sigma))) \mid \mathcal{F}_\sigma) =$$

$$= E\left(\int_{t\wedge\sigma}^{t\wedge\tau} (\Phi\Psi)(s,\omega)ds \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right) \text{ п. н.}$$

2. Если σ — $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки, то

$$I(\Phi)(t \wedge \sigma) = I(\Phi')(t) \quad \text{для всякого} \quad t \geqslant 0,$$

где $\Phi'(t,s) = 1_{(\sigma(\omega)\leqslant t)}(\Phi(t,\omega))$.

Пусть $B(t) = (B_1(t),\ldots,B_r(t))$ — r-мерное броуновское движение и пусть $\Phi_1(t,\omega),\ldots,\Phi_r(t,\omega) \in \mathcal{L}_2$, тогда определены интегралы $\int_0^t \Phi_i(s)dB_i(s)$ и для $0 \leqslant s \leqslant t$

$$E\biggl(\int\limits_s^t \Phi_i(\tau)dB_i(\tau) \int\limits_s^t \Phi_j(\tau)dB_j(\tau) \biggm| \mathcal{F}_s \biggr) =$$

$$= \delta_{ij} E\biggl(\int\limits_s^t \Phi_i(\tau)\Phi_j(\tau)d\tau \biggm| \mathcal{F}_s \biggr), \quad i,j = 1,\ldots,r.$$

Пусть $\mathcal{M}_2^{\mathrm{loc}} = \{X_t \mid X$ — локально квадратично интегрируемый $(\mathcal{F}_t)$-мартингал с $X_0 = 0\}$, $\mathcal{M}_2^{c,\mathrm{loc}} = \{X_t \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{loc}} \mid t \to X_t$ непрерывно п. н.$\}$.

Стохастический интеграл был определен для элементов $\mathcal{L}_2$. Расширение его на более общий класс подынтегральных функций производится следующим образом. Пусть $\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}} = \{\Phi(t) \mid \Phi$ — $(\mathcal{F}_t)$-согласованный действительный измеримый процесс, что для всякого $t_1 > 0$ $\int_0^{t_1} \Phi^2(t,\omega)dt < \infty$ п. н.$\}$. Для $\Phi \in \mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$ определим последовательность моментов остановки $\sigma_n(\omega) = \inf\{t \mid \int_0^t \Phi^2(s,\omega)ds \geqslant n\} \wedge n$, $n = 1,2,\ldots$, $\sigma_n \uparrow \infty$ п. н. Положим $\Phi_n(s,\omega) = 1_{(\sigma_n(\omega)\leqslant s)}\Phi(s,\omega)$.

Определим $I(\Phi)$ посредством равенства $I(\Phi)(t) = I(\Phi_n)(t)$ для $t \leqslant \sigma_n$. Процесс $I(\Phi) \in \mathcal{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$ называется стохастическим интегралом от $\Phi \in \mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$ по броуновскому движению $B(t)$. Часто $I(\Phi)$ будет обозначаться $\int_0^t \Phi(s)dB(s)$ и называться интегралом Ито.

Пусть $B(t)$ — r-мерный $(\mathcal{F}_t)$-броуновский процесс; процессы $a : R_+ \times \Omega \to R^d$, $b : R_+ \times \Omega \to R^{d\times r}$ принадлежат соответственно пространствам $\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}$, где $\mathcal{L}_i^{\mathrm{loc}}$ — множество всех измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных процессов Ψ таких, что для каждого $t_1 \geqslant 0$ $\int_0^{t_1} \|\Psi(s,\omega)\|^i ds < \infty$ п. н.; $X(0,\omega)$ — $(\mathcal{F}_0)$-измеримая случайная величина, а $X(t,\omega)$ — d-мерный случайный процесс вида

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dB(s).$$

Формула Ито [71, с. 140–141]. Если функция $f : R_+ \times R^d \to \to R$ непрерывна вместе с производными $f'_t, f'_{x_i}, f''_{x_i x_j}$, $i, j = 1, \ldots, d$, а $X(t,\omega)$— процесс, определенный выше, то с вероятностью 1

$$f(t, X(t,\omega)) = f(0, X(0,\omega)) + \int\limits_0^t \Big(f'_t(\tau, X(\tau,\omega)) + f'_x(\tau, X(\tau,\omega)) a(\tau,\omega) +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathrm{tr}\Big(f''_{x^2}(\tau, X(\tau,\omega)) b(\tau,\omega) b^\top(\tau,\omega) \Big) \Big) d\tau + \int\limits_0^t f'_x(\tau, X(\tau,\omega)) b(\tau,\omega) dB(\tau).$$

Формула Ито справедлива и в том случае, когда функция f имеет вид $f(t,x,\omega) = \psi(t,\omega) f_1(x)$, где $f_1 : R^d \to R$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $\psi : R_+ \times \Omega \to R$ — ограниченный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс с непрерывно дифференцируемыми траекториями.

Непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $x(t)$ называется **возрастающим**, если для почти всех ω $x(\cdot,\omega)$ — возрастающая функция по t. Говорят, что процесс $x(t)$ является процессом **ограниченной вариации**, если его можно записать как разность двух возрастающих процессов. Процесс $x(t)$ называется **семимартингалом**, если его можно записать как сумму локального мартингала и процесса ограниченной вариации.

Пусть $\Delta = \{0 = t_0 < \cdots < t_l = T\}$ — разбиение отрезка $[0,T]$, $|\Delta| = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$. Если $f(t)$ — непрерывный семимартингал, то существует предел

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2} (f(t \wedge t_{k+1}) + f(t \wedge t_k))(B(t \wedge t_{k+1} - B(t \wedge t_k)))$$

в смысле сходимости по вероятности. Его называют **интегралом Стратоновича** и обозначают $\int_0^t f(s) \circ dB(s)$ [146, p. 60–61].

Пусть $M(t) \in \mathcal{M}_2$. Тогда найдется такой предсказуемый интегрируемый возрастающий процесс $A(t)$, что $M^2(t) - A(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом. Процесс $A(t)$ обозначается $\langle\langle M \rangle\rangle(t)$ и называется **квадратичной вариацией** $M(t)$. Пусть $M(t)$ и $N(t)$ два элемента $\mathcal{M}_2$. Тогда найдется такой процесс $D(t)$, который представим в виде разности двух предсказуемых интегрируемых возрастающих процессов и $M(t)N(t)-D(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом. Процесс $D(t)$ обозначается $\langle\langle M,N\rangle\rangle(t)$ и называется **квадратичной ковариацией** процессов M и N.

Если $\Phi,\Psi\in\mathcal{L}_2$, то

$$\left\langle\!\!\left\langle \int_0^t \Phi(\tau)dB(\tau), \int_0^t \Psi(\tau)dB(\tau) \right\rangle\!\!\right\rangle(t) = \int_0^t \Phi(\tau)\Psi(\tau)d\tau.$$

Для любого процесса $M\in\mathcal{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$ и любого $0<p<\infty$ существуют постоянные c_p, C_p такие, что $\forall t>0$ [8, с. 117–120]

$$c_p E(\max_{0\leqslant s\leqslant t}|M(s)|^{2p}) \leqslant E(\langle\langle M,M\rangle\rangle(t))^p \leqslant C_p E(\max_{0\leqslant s\leqslant t}|M(s)|^{2p}).$$

В частности, для $\Phi\in\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$ выполняется неравенство

$$c_p E\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s \Phi(\tau)dB(\tau)\right|^{2p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant E\left(\int_0^t \Phi^2(\tau)d\tau\right)^p \leqslant C_p E\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s \Phi(\tau)dB(\tau)\right|^{2p}\right).$$

Предложение 1.35 [71, с. 118]. *Пусть $f\in\mathcal{L}_2^{\mathrm{loc}}$. Тогда для любых $c_1>0, c_2>0, T\in R_+$ выполняется неравенство*

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f(s)dB(s)\right|>c_1\right\}\leqslant \frac{c_2}{c_1^2}+P\left\{\int_0^T f^2(s)ds>c_2\right\}.$$

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — вероятностное пространство с потоком $(\mathcal{F}_t)$. Пусть $(\Omega',\ \mathcal{F}',P')$ — другое вероятностное пространство и $\tilde{\Omega}=\Omega\times$ $\times\,\Omega'$, $\tilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\times\mathcal{F}'$, $\tilde{P}=P\times P'$. Если $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-поток на $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ такой, что $\mathcal{F}_t\times\mathcal{F}'\supset\tilde{\mathcal{F}}_t\supset\mathcal{F}_t\times\{\Omega',\varnothing\}$, то $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ называется **стандартным расширением** вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком $(\mathcal{F}_t)$.

Предложение 1.36 [8, с. 97]. *Пусть*: $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — *вероятностное пространство с потоком* $\mathcal{F}_t$; $M^i\in\mathcal{M}_2^{c,\mathrm{loc}}$, $i=1,2,\ldots,d$; Φ_{ij},

$i,j = 1,2,\ldots,d$ и Ψ_{ik}, $i = 1,2,\ldots,d$, $k = 1,2,\ldots,r$, — $(\mathcal{F}_t)$-предсказуемые процессы, принадлежащие соответственно $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}, \mathcal{L}_2^{\text{loc}}$;

$$\langle\langle M^i, M^k\rangle\rangle(t) = \int\limits_0^t \Phi_{ij}(s)ds, \quad \Phi_{ij}(s) = \sum_{k=1}^r \Psi_{ik}(s)\Psi_{jk}(s).$$

Тогда на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $\mathcal{F}_t$ существует такое r-мерное $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $W(t)$, что

$$M^i(t) = \sum_{k=1}^r \int\limits_0^t \Psi_{ik}(s)dW^k(s), \quad i = 1,\ldots,d.$$

Предложение 1.37 [8, с. 159]. *Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком $(\mathcal{F}_t)$; a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,d, a_k^i$, $i = 1,\ldots,d$, $k = 1,\ldots,r$, — вещественные $(\mathcal{F}_t)$-предсказуемые процессы, принадлежащие соответственно пространствам $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}$, $\mathcal{L}_2^{\text{loc}}$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^r a_k^i a_k^j$; $X(t)$ — d-мерный непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс; v_i, $i = 1,\ldots,d$, — измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы такие, что для любой функции $h \in C_b^2(R^d)$ процесс*

$$h(X(t)) - h(X(0)) - \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\tau)\frac{\partial^2 h(X(\tau))}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d v_i(\tau)\frac{\partial h(X(\tau))}{\partial x^i}\right)d\tau$$

принадлежит $\mathcal{M}_2^{c,\text{loc}}$. Тогда на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $\mathcal{F}_t$ можно определить r-мерное $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $W(t)$ такое, что

$$X_i(t) - X_i(0) - \int\limits_0^t v_i(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^r \int\limits_0^t a_k^i(\tau)dW_k(\tau), \quad i = 1,\ldots,d,$$

или в векторной форме

$$X(t) - X(0) - \int\limits_0^t v(\tau)d\tau = \int\limits_0^t L(\tau)dW(\tau),$$

где v — вектор с элементами v_i, L — матрица с элементами a_k^i.

Предложение 1.38 [8, с. 164]. *Пусть*: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *— вероятностное пространство с потоком* $\mathcal{F}_t$; $f : R_+ \times R^d \to R^d$, $g : R_+ \times \times R^d \to R^{d\times r}$ *— измеримые по Борелю локально ограниченные функции*; a_n *— бесконечно большая последовательность*; e *—* $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки*; $x = x(t)$ *— заданный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *процесс такой, что* $x(t)1_{[o,e)}$ *—* $(\mathcal{F}_t)$*-согласован, имеет непрерывные траектории при* $t < e$ *и* $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|x(t)\| = \infty$ *для* $e < \infty$; *для каждых* $h \in C_b^2(R^d)$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *процесс*

$$h(x(t \wedge \sigma_n)) - h(x(0)) -$$

$$-\int\limits_0^{t\wedge\sigma_n} \left(\frac{\partial h(x(s))}{\partial x} f(t, x(s)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial^2 h(x(s))}{\partial x^2} g(t, x(s)) g^\top(t, x(s)) \Big) \right) ds$$

является $(\mathcal{F}_t)$*-мартингалом, где* $\sigma_n = \inf\{t \mid \|x(t)\| \geqslant a_n\}$. *Тогда на расширении* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ *и* $\tilde{\mathcal{F}}_t$ *пространства* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с* $\mathcal{F}_t$ *можно определить* r*-мерное* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$*-броуновское движение* $W(t)$ *такое, что с вероятностью* 1 *для всех* $t \in [0, e(\omega))$ *выполняется равенство*

$$X(t) - X(0) = \int\limits_0^t f(s, x(s)) ds + \int\limits_0^t g(s, x(s)) dW(s).$$

Предложение 1.39 [71, с. 111]. *Пусть*: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *— вероятностное пространство с потоком* $\mathcal{F}_t$; σ *—* $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки*; $f(t)$, $f_n(t) \in \mathcal{L}_2$, $n = 1, 2, \ldots$; $W(t)$ *—* $(\mathcal{F}_t)$*-броуновское движение. Если*

$$E\left(\int\limits_0^{t\wedge\sigma} (f(s) - f_n(s))^2 ds \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то

$$E\left(\sup_{s \leqslant t\wedge\sigma} \left| \int\limits_0^s f_n(\tau) dW(\tau) - \int\limits_0^s f(\tau) dW(\tau) \right| \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Предложение 1.40 (теорема Альдуса [110]). *Пусть* $(X_n(t))$ *— последовательность* d*-мерных* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованных процессов, которые определены на вероятностных пространствах* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ *с потоками* $(\mathcal{F}_{nt})$. *Если выполнены условия*:

1) *для любых* $\varepsilon > 0$ *и последовательностей* $\delta_n \downarrow 0$, (τ_n) — $(\mathcal{F}_{nt})$-*моментов остановки имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\|X_n((t\wedge\tau_n)+\delta_n) - X_n(t\wedge\tau_n)\| > \varepsilon) = 0; \tag{1.4}$$

2) *для любых* $b > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют* n_0 *и* K *такие, что для любого* $n \geqslant n_0$ *выполняется соотношение*

$$P_n(\sup_{t\leqslant b}\|X_n(t)\| > K) \leqslant \varepsilon,$$

то последовательность $(X_n(t))$ *плотна в* $D(R_+, R^d)$.

1.3. Многозначные отображения и многозначные случайные процессы

1. Многозначные отображения.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $\mathcal{S}(X)$ — множество всех подмножеств из X, а $\mathrm{cl}\,(X)$, $\mathcal{S}_{cc}(X)$, $\mathcal{S}_{cb}(X)$, $\mathrm{comp}\,(X)$, $\mathrm{conv}\,(X)$ — соответственно семейство всех непустых замкнутых, непустых выпуклых замкнутых, непустых замкнутых ограниченных, непустых компактных, непустых компактных выпуклых подмножеств из X. Определим **отклонение и полуотклонение по Хаусдорфу** множеств $A, B \subset X : \bar\alpha(A,B) = \sup(\rho(a,B) : a \in A)$ — полуотклонение первого множества от второго, $\alpha(A,B) = \max(\bar\alpha(A,B), \bar\alpha(B,A))$ — отклонение множеств A и B. Функция $\alpha : \mathrm{cl}\,(X)\times\mathrm{cl}\,(X) \to R_+$ — метрика на $\mathrm{cl}\,(X)$. Пространство $(\mathrm{cl}\,(X), \alpha)$ является полным (сепарабельным) метрическим пространством, если таковым является X.

Пусть $(T,\mathcal{F})$ — измеримое пространство. **Многозначное отображение** $\Gamma : T \to \mathcal{S}(X)$ **называется измеримым**, если $\Gamma^{-1}(M) = \{\, t \in T \mid \Gamma(t) \bigcap M \neq \varnothing\} \subset \mathcal{F}$ для каждого открытого множества M. Если $\Gamma : T_1 \times T_2 \to \mathcal{S}(X)$, где $(T_1,\mathcal{F}_1), (T_2,\mathcal{F}_2)$ — два измеримых пространства, то измеримость отображения Γ понимается в терминах произведения σ-алгебр $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$. Отметим, что однозначная функция $f : T \to X$ измерима, если и только если она является $(\mathcal{F}, \beta(X))$-измеримой. Измеримое отображение $\gamma : T \to X$ называют **селектором** многозначного отображения $\Gamma : T \to \mathcal{S}(X)$, если $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ для всех $t \in T$.

Предложение 1.41 [117, теорема III.9, с. 67]. *Пусть* $X = E$ — *сепарабельное банахово пространство и* $\Gamma : T \to \mathrm{cl}\,(E)$ — *многозначное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) Γ *измеримо*;

2) *функция* $t \to \rho(x, \Gamma(t))$ *измерима для каждого* $x \in E$;

3) *существует последовательность селекторов* $\sigma_n(\cdot)$ *для* Γ *такая, что* $\Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}\,, \quad t \in T$.

Многозначное отображение $\Gamma : T \to \mathcal{S}(E)$ называется **интегрируемым по Ауману**, если существует последовательность интегрируемых по Бохнеру селекторов $(\sigma_n(\cdot))$ отображения Γ такая, что $\Gamma(t) \subset \subset \overline{\Gamma(t) \bigcap \{\sigma_n(t)\}}$ для почти всех t (черта означает замыкание в E; $\{\sigma_n(t)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(t)$). Через $\int_B \Gamma(t)dt = \{\int_B f(t)dt \mid f(\cdot)$ — интегрируемый по Бохнеру селектор для $\Gamma\}$ обозначаем **интеграл Аумана** для интегрируемого по Ауману многозначного отображения $\Gamma : T \to E$ по измеримому множеству $B \in \mathcal{F}$.

Будем говорить, что отображение $F : T \times E \to \mathrm{cl}\,(Y)$, Y — банахово пространство, удовлетворяет **условиям Каратеодори**, если оно непрерывно по x при почти всех $t \in T$ и измеримо по t при каждом $x \in E$. Пусть многозначное отображение $F : T \times E \to \mathrm{cl}\,(E)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а отображение $X : T \to \mathrm{cl}\,(E)$ непрерывно. Тогда функция $t \to F(t, X(t))$, $t \in T$, измерима.

Отображение $\Gamma : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times r})$ называется **измеримым по Борелю**, если оно $(\beta(R_+) \times \beta(R^d), \beta(R^{d\times r}))$-измеримо.

Отображение $\Gamma : X \to \mathcal{S}(Y)$, X, Y — топологические хаусдорфовы пространства, называется **полунепрерывным сверху** в точке $\bar{x} \in X$, если для каждой окрестности U для $\Gamma(\bar{x})$ существует окрестность V точки $\bar{x}$ такая, что $\Gamma(x) \subset U$ для всех $x \in V$. Γ называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$. Отображение $\Gamma : X \to \mathcal{S}(Y)$ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $B \in Y$ множество $\{x \in X \mid \Gamma(X) \subset B\}$ является замкнутым. Отображение $\Gamma : X \to \mathcal{S}(Y)$, X, Y — метрические пространства, является полунепрерывным сверху тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in \in R^d$, для любой последовательности (x_n), сходящейся к x, и любой последовательности $y_n \in \Gamma(x_n)$ существует сходящаяся подпоследовательность y_{n_k}, чей предел принадлежит $\Gamma(x)$. Если $\Gamma : R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$

ограничено, то Γ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in R^d$, для любой последовательности $x_n \to x$ выполняется $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_{n+i}} \subset \Gamma(x)$. Если Γ — полунепрерывно сверху, то полунепрерывно сверху и $\bar{\mathrm{co}}\Gamma$.

Отображение $\Gamma : X \to \mathcal{S}(Y)$, X, Y — топологические хаусдорфовы пространства, называется **полунепрерывным снизу** в точке $\bar{x} \in X$, если для каждого открытого множества U в Y с $F(\bar{x}) \bigcap U \neq \neq \varnothing$ существует окрестность V точки $\bar{x}$ такая, что $F(x) \bigcap U \neq \varnothing$ для каждой точки $x \in V$. Γ называется полунепрерывным снизу, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$. Отображение $\Gamma : X \to \to \mathcal{S}(Y)$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $B \in Y$ множество $\{x \in X \mid \Gamma(x) \subset B\}$ является открытым. Отображение $\Gamma : X \to \mathcal{S}(Y)$, X, Y — метрические пространства, является полунепрерывным снизу тогда и только тогда, когда для любой точки $\bar{x} \in R^d$ любой последовательности (x_n), сходящейся к $\bar{x}$, и любой точки $\bar{y} \in \Gamma(\bar{x})$ существует последовательность $y_n \in \Gamma(x_n)$, сходящаяся к $\bar{y}$ и такая, что $y_n \in \Gamma(x_n)$. Многозначное отображение называется непрерывным, если оно полунепрерывно сверху и снизу.

Предложение 1.42 [139, p. 48]. *Пусть*: X *— польское пространство*; Y *— метрическое пространство*; T *— измеримое пространство*; $f : T \times X \to Y$ *— функция, измеримая по* t *и непрерывная по* x; $\Gamma : T \to \mathrm{comp}\,(X)$ *— измеримая многозначная функция*; $g : T \to \to Y$ *— измеримая функция такая, что* $g(t) \in f(t, \Gamma(t))$ *для* $t \in T$. *Тогда существует селектор* $\gamma : T \to X$ *для* Γ *такой, что* $g(t) = = f(t, \gamma(t))$ $\forall t \in T$.

Предложение 1.43 [139, p. 49]. *Пусть* (X, ρ) *— польское пространство, а* $\Gamma : T \to \mathrm{comp}\,(X)$, $g : T \to X$ *— измеримые отображения. Тогда существует селектор* $\varphi : T \to X$ *для* Γ *такой, что* $\rho(g(t), \varphi(t)) = \rho(g(t), \Gamma(t))$ $\forall t \in T$.

Предложение 1.44 (теорема Майкла [139, p. 57–58]. *Пусть* X *— метрическое пространство,* Y *— банахово пространство и* $\Gamma : X \to \mathcal{S}_{cc}(Y)$ *— полунепрерывное снизу многозначное отображение. Тогда существует непрерывный селектор* $\gamma : X \to Y$ *для отображения* Γ.

Предложение 1.45 [111]. *Пусть*: $F : [a, b] \times R^d \to \mathrm{conv}\,(R^{d \times r})$ *— многозначное отображение, измеримое по* t *и непрерывное по* x; $z : [a, b] \to R^d$ *— измеримое отображение*; $w : [a, b] \to R^d$ *— селектор для* $F(t, z(t))$. *Тогда существует измеримый по* t *и непрерывный по* x *селектор* f *для отображения* F *такой, что* $w(t) = f(t, z(t))$ *п. в.* $t \in [a, b]$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Если существует постоянная $c > 0$ такая, что отображение $F : X \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ удовлетворяет неравенству $\alpha(F(x), F(y)) \leqslant c\rho(x, y) \quad \forall x, y \in R^d$, то отображение F называют c-**липшицевым**. Говорят, что отображение $F : [a, b] \times X \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ является $c(t)$**-липшицевым по** x, если оно $c(t)$-липшицево при каждом фиксированном t. Если функция $c(t)$ постоянна, то отображение $F : [a, b] \times X \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ называем просто липшицевым по x.

Предложение 1.46 [111]. *Пусть* $F : [a, b] \times X \to \mathrm{conv}\,(R^d)$ *— измеримое по Борелю* $c(t)$*-липшицевое по* x *отображение. Тогда существует постоянная* $k > 0$ *и измеримый по Борелю* $kc(t)$*-липшицевый по* x *селектор* f *для* F.

Пусть T — топологическое хаусдорфово пространство. Мера $\mu : \beta(T) \to R_+$ называется **мерой Радона**, если:

i) для каждой точки $t \in T$ существует окрестность конечной меры;

ii) для каждого множества $A \in \beta(T)$ $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathrm{comp}\,(A)\}$.

Пространство T называется локально компактным, если каждая точка имеет относительно компактную окрестность.

Предложение 1.47 (теорема Скорца — Драгони [139, p. 45]). *Пусть*: T *— локально компактное хаусдорфово топологическое пространство с положительной мерой Радона* μ; X *— польское пространство*; Y *— сепарабельное метрическое пространство*; (T, Σ^*, μ^*) *— расширение Лебега для* $(T, \beta(T), \mu)$; $F : T \times X \to Y$ *—* $(\Sigma^*, \beta(X))$*-измеримое по* t *и непрерывное по* x *отображение. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует замкнутое множество* $E_\varepsilon \subset T$ *с* $\mu(T \setminus E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *такое, что* F *непрерывно на* $E_\varepsilon \times X$.

Пусть u и v — две вещественные функции, заданные на R^d. Интеграл $\int_{R^d} u(y)v(x-y)dy = (u*v)(x)$ называется **сверткой** функций u и v. Пусть

$$J_1(t)=c_1 \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)1_{(-1,1)}, \quad J_2(x)=c_2 \exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right)1_{B(0,1)}, \quad x\in R^d,$$

где постоянные $c_1,\ c_2$ выбраны так, что $\int_R J_1(t)dt = 1 = \int_{R^d} J_2(x)dx$, и пусть $J(t,x) = J_1(t)J_2(x)$, $J_n(t,x) = n^{d+1}J_1(nt)J_2(nx)$. Если $f : R^+ \times \times R^d \to R$ — измеримая по Лебегу локально ограниченная функция, то отображения $f_n(t,x) = (f * J_n)(t,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно дифференцируемы и $f_n(t,x) \to f(t,x)$ для почти всех $(t,x) \in R_+ \times R^d$.

Предложение 1.48 (лемма Крылова [39, с. 80]). *Пусть*: $m > 0$; $C_m = \{(t,x)|t \in R, \|x\| \leqslant m\}$; $h \in L_{d+1}$, $h(t,x) \geqslant 0$, $h(t,x) = 0$ *при* $t \leqslant 0$, $h(t,x) = 0$ *при* $\|x\| \geqslant m$. *Тогда на* $(-\infty,+\infty) \times R^d$ *существует ограниченная функция* $z(t,x) \leqslant 0$, *равная нулю при* $t < 0$ *и такая, что для всех достаточно больших* n *и неотрицательно определенных симметрических матриц* $a = (a^{ij})$ *на цилиндре* C_m *выполняется неравенство*

$$N(d)(\det a)^{1/(d+1)}h_n \leqslant -\frac{\partial z_n}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^i \partial x^j},$$

в котором $N(d) > 0$, $h_n = h * J_n, z_n = z * J_n$. *Кроме того, если вектор* b *и число* c *таковы, что* $\|b\| \leqslant \frac{m}{2}c$, *то на том же множестве справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{d} b^i \frac{\partial z_n}{\partial x^i}\right| \geqslant \left|cz_n\right|$$

для достаточно больших n. *Наконец, при всех* $t \geqslant 0$ *и* $x \in R^d$ *имеет место неравенство*

$$|z(t,x)|^{d+1} \leqslant N(d,m) \int\limits_{B(0,m)} \int\limits_0^t h^{d+1}(s,y)\, ds\, dy.$$

2. Многозначные случайные процессы.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Отображение $Y : \Omega \to \mathrm{comp}\,(R^d)$ называют **многозначной случайной величиной**, если оно $(\mathcal{F}, \beta(R^d))$-измеримо. Семейство $Y(t)$, $t \geqslant 0$ многозначных случайных величин называют **многозначным случайным процессом**.

Многозначный случайный процесс измерим, если $\{(t, \omega) \mid Y(t, \omega) \bigcap B \neq \varnothing\} \in \beta(R_+) \times \mathcal{F}$ для любого $B \in \beta(R^d)$, если, кроме того, для любого $t \in R_+$ многозначная случайная величина $Y(t, \omega)$ является $(\mathcal{F}_t, \beta(R^d))$-измеримой, то говорят, что многозначный процесс согласован с $\mathcal{F}_t$.

Пусть $F : \Omega \to \mathrm{cl}\,(R^d)$, $X : \Omega \to R^d$ — случайные величины, тогда $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in F(\omega)\} \subset \mathcal{F}$ [27, с. 340].

Предложение 1.49. *Пусть*: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *— вероятностное пространство с потоком* $\mathcal{F}_t$; $b(t, \omega)$*-измеримый случайный процесс*; $\Gamma : R_+ \times \Omega \to \mathrm{conv}\,(R^d)$ *— многозначный измеримый* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованный процесс*; $b(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)$ *для* $(\mu \times P)$*-почти всех* $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$; $\tilde{b}(t) = E(b(t) \mid \mathcal{F}_t)$ *— условное математическое ожидание процесса* $b(t)$ *относительно потока* $\mathcal{F}_t$. *Тогда* $\tilde{b}(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)$ *для* $(\mu \times P)$*-почти всех* $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega)$.

Доказательство. Пусть K — множество тех $t \in R_+$, для которых $b(t, \omega) \notin \Gamma(t, \omega)$ на множестве δ_t положительной меры $P(\delta_t) > 0$. Тогда $\mu(K) = 0$. Возьмем $\bar{t} \in R_+ \setminus K$. Так как функция $\omega \to \tilde{b}(\bar{t}, \omega)$ и многозначное отображение $\omega \to \Gamma(\bar{t}, \omega)$ являются $(\mathcal{F}_{\bar{t}}, \beta(R^d))$-измеримыми, то множество $\Sigma = \{\omega \mid \tilde{b}(\bar{t}, \omega) \notin \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ принадлежит $\mathcal{F}_{\bar{t}}$. Предположим, что $P(\Sigma) > 0$. Для каждого $\omega \in \Sigma$ возьмем точку $\hat{r}(\omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)$ такую, что $\rho(\hat{r}(\omega), \tilde{b}(\bar{t}, \omega)) = \rho(\tilde{b}(\bar{t}, \omega), \Gamma(\bar{t}, \omega))$. Отображение $\omega \to \hat{r}(\omega)$ является $(\mathcal{F}_{\bar{t}}, \beta(R^d))$-измеримым. Следовательно, такими же будут отображения r и u, определенные следующим образом: $r : \Omega \to R^d$, $r(\omega) = \hat{r}(\omega)$, если $\omega \in \Sigma$; $r(\omega) = \tilde{b}(\bar{t}, \omega)$, если $\omega \in \Omega \setminus \Sigma$, $u(\omega) = \tilde{b}(\bar{t}, \omega) - r(\omega)$. Из построения $u(\omega)$ следует

$$u^\top(\omega)\tilde{b}(\bar{t}, \omega) > \sup_{a \in \Gamma(\bar{t}, \omega)} u^\top(\omega) a \quad \forall \omega \in \Sigma,$$

а из свойств условных математических ожиданий вытекает $E(u^\top(\omega)b(\bar{t},\omega)|\mathcal{F}_{\bar{t}}) = u^\top(\omega)\tilde{b}(\bar{t},\omega)$. Поэтому

$$\int\limits_{\Sigma} u^\top(\omega)b(\bar{t},\omega)d\omega = \int\limits_{\Sigma} u^\top(\omega)\tilde{b}(\bar{t},\omega)d\omega > \int\limits_{\Sigma} (\sup_{a\in\Gamma(\bar{t},\omega)} u^\top(\omega)a)d\omega,$$

что противоречит включению $b(\bar{t},\omega) \in \Gamma(\bar{t},\omega)$ п. н.

Предложение 1.50. *Если* $\Gamma : [0,t_1]\times\Omega \to \operatorname{conv}(R^d)$, $\gamma : [0,t_1]\times \times\,\Omega \to R^d$ — $(\beta([0,t_1]))\times\mathcal{F},\beta(R^d))$*-измеримые* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованные процессы, то существует измеримый* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованный процесс* φ*, удовлетворяющий соотношениям*

$$\varphi(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega),\ ||\varphi(t,\omega)-\gamma(t,\omega)|| =$$
$$= \rho((\gamma(t,\omega),\Gamma(t,\omega)) \quad \forall(t,\omega)\in[0,t_1]\times\Omega. \tag{1.5}$$

Доказательство. Существование измеримого процесса φ, удовлетворяющего соотношениям (1.5), следует из предложения 1.43. Взяв $\bar{t}\in[0,T]$ и применив предложение 1.43 к отображениям $\omega\to\Gamma(\bar{t},\omega)$, $\omega\to\gamma(\bar{t},\omega)$, получим, что существует $(\mathcal{F}_{\bar{t}},\beta(R^d))$-измеримая случайная величина $\tilde{\varphi}$ такая,что

$$\tilde{\varphi}(t,\omega)\in\Gamma(\bar{t},\omega),\quad \|\tilde{\varphi}(\omega)-\gamma(\bar{t},\omega)\| = \rho(\gamma(\bar{t},\omega),\Gamma(\bar{t},\omega)) \quad \forall\omega\in\Omega. \tag{1.6}$$

Так как множество $\Gamma(t,\omega)$ — непустое выпуклое компактное, то для каждой пары (t,ω) существует единственная точка $\varphi(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega)$, удовлетворяющая (1.5), и существует единственная точка $\tilde{\varphi}(\bar{t},\omega)\in \in\Gamma(\bar{t},\omega)$, удовлетворяющая (1.6), следовательно, $\tilde{\varphi}(\bar{t},\omega) = \varphi(\bar{t},\omega)$. Из $(\mathcal{F}_{\bar{t}},\beta(R^d))$-измеримости $\tilde{\varphi}$ следует $(\mathcal{F}_{\bar{t}})$-измеримость $\varphi(\bar{t},\omega)$.

Предложение 1.51. *Пусть последовательность* $b_n(t,\omega)$ *слабо сходится к* $b(t,\omega)$ *в* $L_1([0,t_1]\times\Omega,R^d)$*. Тогда имеет место включение*

$$b(t,\omega)\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\bigcup_{j=m}^{\infty} b_j(t,\omega) \tag{1.7}$$

для $(\mu\times P)$*-почти всех* $(t,\omega)\in[0,t_1]\times\Omega$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\Gamma_m(t,\omega) = \overline{\text{co}} \bigcup_{j=m}^{\infty} b_j(t,\omega)$ и через Σ_m обозначим множество всех селекторов для $\Gamma_m(t,\omega)$, принадлежащих $L_1([0,T]\times\Omega, R^d)$. Если последовательность $y_l \in \Sigma_m$, $l \geqslant 1$, сходится к y в $L_1([0,T]\times\Omega, R^d)$, то из нее можно выбрать подпоследовательность y_{l_i}, $i \geqslant 1$, сходящуюся почти всюду к y. Следовательно, Σ_m является замкнутым подмножеством пространства $L_1([0,T]\times\Omega, R^d)$, кроме того, очевидно, что множество Σ_m непустое и выпуклое. Поэтому множество Σ_m слабо замкнуто в $L_1([0,T]\times\Omega, R^d)$, значит, $b \in \Sigma_m$ для любого $m \geqslant 1$, т. е. b удовлетворяет (1.7).

Предложение 1.52. *Пусть $s : R_+ \times R^d \to R^{d\times r}$ — измеримое по Борелю локально ограниченное отображение, $S(t,x)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки отображения $s(t,x')$ при $x' \to x$. Тогда многозначное отображение $S : R_+ \times R^d \to \operatorname{conv}(R^{d\times r})$ измеримо по Борелю и полунепрерывно сверху по x.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in R^d$ и произвольную последовательность $x_n \to x$. Пусть $S_1(t,y)$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее все предельные точки $s(t,y')$ при $y' \to y$, и пусть $y_n \in S_1(t,x_n)$. Из последовательности y_n выбираем сходящуюся подпоследовательность $y_{n_i} \to y$. Считаем для простоты, что $y_n \to y$. Из определения S_1 следует, что $\forall n \in N$ существует последовательность $x_{n_k} \to x_n$, $k \to \infty$, такая, что $s(t,x_{n_k}) \to y_n$, $k \to \infty$. Отсюда следует, что $s(t,x_{n_n}) \to y$, $n \to \infty$, т. е. $y \in S_1(t,x)$. Таким образом, отображение S_1 полунепрерывно сверху по x, но тогда таким же является и отображение S. Множество $S_1(t,y)$ можно представить в виде

$$S_1(t,y) = \bigcap_{i=1}^{\infty} s(t,[x]_{1/i}),$$

где $s(t,[x]_{1/i})$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее все точки $s(t,x')$, $\|x'-x\| \leqslant 1/i$. Пусть U — открытое множество в $R^{d\times r}$, тогда $\{(t,x) | s(t,[x]_{1/i}) \bigcap U \neq \varnothing\} = \{(t,x) \mid \rho(x',x) \leqslant 1/i, s(t,x') \subset \subset U\} = B_i \subset \beta(R_+) \times \beta(R^d)$. Поэтому $\{(t,x) \mid \bigcap_{i=1}^{\infty} s(t,[x]_{1/i}) \bigcap U \neq \neq \varnothing\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subset \beta(R_+) \times \beta(R^d)$, что доказывает измеримость по

Борелю отображения S_1. Измеримость по Борелю отображения $S = \overline{\mathrm{co}}\, S_1$ вытекает из теоремы III.40 [117].

Предложение 1.53. *Пусть*: $R_s^{d\times d}$ *— множество неотрицательных симметрических матриц*; $a : R_+ \times R^d \to R_s^{d\times d}$ *— локально ограниченное отображение*; *для каждых* $(t,x) \in R_+ \times R^d$ *множество* $A(t,x)$ *является наименьшим выпуклым замкнутым множеством, содержащим точку* $a(t,x)$ *и все предельные точки отображения* $a(t,x')$ *при* $x' \to x$. *Тогда для любых* $(t,x) \in R_+ \times R^d$ *элементами множества* $A(t,x)$ *являются неотрицательные симметрические матрицы.*

Доказательство. Если матрица $b(t,x)$ является пределом для последовательности неотрицательных симметрических матриц $a(t,x_i)$, $x_i \to x$, то все миноры матрицы b являются пределами соответствующих миноров матрицы $a(t,x_i)$. Все угловые миноры матрицы $a(x,t_i)$ неотрицательны, следовательно, такими же являются и миноры матрицы b, поэтому b — неотрицательная симметрическая матрица. Любая точка в выпуклой оболочке ограниченного замкнутого множества B, согласно теореме Каратеодори, представима в виде

$$b = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i b_i, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1, \quad k \leqslant n, \quad b_i \in B.$$

Поэтому угловые миноры любой матрицы из выпуклой оболочки симметрических неотрицательных матриц являются линейной комбинацией неотрицательных миноров с неотрицательными коэффициентами и, следовательно, сами неотрицательны. Отсюда и из равенства $\mathrm{co}B = \overline{\mathrm{co}}B$, верного для всякого замкнутого ограниченного множества B, следует предложение 1.53.

Если $a \in R^{d\times d}$ — симметрическая неотрицательная матрица, то существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_{11},\dots,\lambda_{dd})$, $0 \leqslant \lambda_{11} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{dd}$ такие, что $a = T\Lambda T^{-1}$. Через $a^{1/2}$ обозначаем неотрицательную симметрическую матрицу $T\sqrt{\Lambda}T^{-1}$, где $\sqrt{\Lambda} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_{11}},\dots,\sqrt{\lambda_{dd}})$.

Пусть D — область в R^d, $N_x = \bigcup_{r>0} N_{x,r}$, $N_{x,\infty} = \bigcap_{r>0} N_{x,r}$, $N_{x,r} = \{n \in R^d | \|n\| = 1, B(x-rn,r) \bigcap D = \varnothing\}$, где $B(z,r) = \{y \in R^d | \|y-z\| < r\}$, $z \in R^d, r > 0$.

Условия Лионса — Шнитмана для области $\boldsymbol{D}$.

1) Существует $r_0 \in]0, +\infty[$ такое, что $N_x = N_{x,r_0} \neq \varnothing,\ \forall x \in \partial D$.

2) Существуют постоянные $\delta > 0, \beta \geqslant 1$ такие, что для каждого $x \in \partial D$ существует единичный вектор k_x со следующим свойством: $\langle k_x,\ n\rangle \geqslant 1/\beta\ \ \forall n \in \bigcup_{y \in B(x,\delta) \bigcap \partial D} N_y$.

Предложение 1.54 (теорема Рожкоша — Сломинского [162]). *Пусть*: $\sigma : R_+ \times \bar{D} \to R^{d\times r}$, $b : R_+ \times \bar{D} \to R^d$ *— измеримые функции*; *область* D *удовлетворяет условиям Лионса — Шнитмана*; $\|\sigma(t,x)\| + \|b(t,x)\| \leqslant C\ \ \forall (t,x) \in R_+ \times \bar{D}, C = \mathrm{const}$; *замыкание множества* V *принадлежит* E, *где* V *и* E *— следующие множества*: $V = (F \setminus F_1) \bigcap M \bigcup F_1 \bigcap M_1$, $F = \{(t,x) \in R_+ \times \bar{D} \mid \int_{(R_+\times\bar{D})\bigcap U(t,x)} \det a^{-1}(s,y)dsdy = \infty$ *для каждой открытой окрестности* $U(t,x)$ *точки* $(t,x)\}$, $a = \sigma\sigma^\top$, $F_1 = \{(t,x) \in F \mid \int_{(R_+\times\bar{D})\bigcap U(t,x)\setminus F} \det a^{-1}(s,y)dsdy = \infty$ *для каждой открытой окрестности* $U(t,x)$ *точки* $(t,x)\}$, $M = \{(t,x) \in R_+ \times \bar{D} \mid \ \sigma(t,\cdot)|_F$ *или* $b(t,\cdot)|_F$ *разрывна в* $x\}$, $M_1 = \{(t,x) \in R_+ \times \bar{D} \mid \ \sigma(t,\cdot)$ *или* $b(t,\cdot)$ *разрывна в* $x\}$, $E = \{(t,x) | \sigma(s,x) = 0$ *и* $b(s,x) = 0$ *для почти всех* $s \geqslant t\}$; $x_0 \in \bar{D}$.

Тогда существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с потоком* $\mathcal{F}_t$, $(\mathcal{F}_t)$*-броуновское движение* $W(t)$, *пара непрерывных* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованных процессов* $x(t), K(t)$, x *принимает значения в* $\bar{D}$, K *— процесс с ограниченной вариацией,* $K(0) = 0$ *и*

$$K(t) = \int_0^t n(s)d|K|_s,$$

$$|K|_t = \int_0^t 1_{\partial D}(x(s))d|K|_s, \quad t \in R_+,$$

где $|K|_t$ *— вариация отображения* K *на* $[0,t], n(s) \in N_{x(s)}$, *если* $x(s) \in \partial D$, *и таких, что выполняется соотношение*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(s,x(s))dW(s) + \int_0^t b(s,x(s))ds + K(t), \quad t \in R_+. \quad (1.8)$$

Процесс $x(t)$ называют слабым решением на D уравнения (1.8) с отражением от границы.

1.4. Полудинамические системы

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ. Предположим, что задано отображение $f: R_+ \times X \to \mathrm{comp}\,(X)$, ставящее в соответствие каждой точке $(t, x) \in R_+ \times X$ непустой компакт $f(t, x)$. Говорят, что на X задана полунепрерывная по x **полудинамическая система** $f(t, x)$ [87, с. 11], если отображение f удовлетворяет следующим аксиомам:

A$_1$) $f(0, x) = x \ \ \forall x \in X$;

A$_2$) $f(t_1 + t_2, x) = f(t_2, f(t_1, x)) \ \ \forall x \in X, \ \forall t_1, t_2 \in R_+$;

A$_3$) $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(f(t, x), f(t_0, x)) = 0 \ \ \forall x \in X, \ \forall t_0 \in R_+$; $\lim\limits_{x \to x_0} \bar{\alpha}(f(t, x), f(t, x_0)) = 0 \ \ \forall x_0 \in X, \ \forall t \in R_+$.

Отображение $\varphi_x: I_{\varphi_x} \to X$, где I_{φ_x} — множество вида $]-\infty, +\infty[$, $[c, +\infty[$ с $c \in]-\infty, 0]$ либо $]c, +\infty[$ с $c \in]-\infty, 0[$, называем движением полунепрерывной по x полудинамической системы $f(t, x)$, если $\varphi_x(0) = x$ и $\varphi_x(t_2) \in f(t_2 - t_1, \varphi_x(t_1)) \ \ \forall t_1, t_2 \in I_{\varphi_x}, \ t_2 > t_1$. Движение $\varphi_x(t)$ называется максимальным, если не существует другого движения $\psi_x(t)$, что $I_{\varphi_x} \subset I_{\psi_x}$ и $\psi_x|_{I_{\varphi_x}} = \varphi_x$. Каждое движение полунепрерывной по x полудинамической системы $f(t, x)$ можно продолжить до максимального движения [87, с. 36]. Движение φ_x называется полным, если $I_{\varphi_x} = \,]-\infty, +\infty[$. Полное движение обозначается φ_x^∞. Отображения $\varphi_x: \,]-\infty, 0] \cap I_{\varphi_x} \to X$, $\varphi_x: [0, +\infty[\to X$, $\varphi_x: [a, b] \to X$, $[a, b] \subset I_{\varphi_x}$, называются соответственно отрицательным полудвижением, положительным полудвижением и отрезком движения φ_x и обозначаются φ_x^-, φ_x^+, $\varphi|_{[a,b]}$. Отрицательное полудвижение полное, если $]-\infty, 0] \cap I_{\varphi_x} =]-\infty, 0]$.

Через $\Phi(f)$ обозначаем совокупность всех движений полунепрерывной по x полудинамической системы f, а через $\Phi(f, R_+)$ — совокупность всех ее положительных полудвижений, $R_+ = [0, +\infty[$.

Предложение 1.55 [87, с. 46—47]. *Множество* $\Phi(f, R_+)$ *обладает следующими свойствами*:

I) $\forall x \in X$ *существует* $\varphi \in \Phi(f, R_+)$ *такое, что* $\varphi(0) = x$;

II) *если* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(f, R_+)$ *таковы, что* $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$ *для неко-*

торых $t_1, t_2 \in R_+$, *то отображение*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \varphi_2(t + t_2 - t_1), & t > t_1, \end{cases}$$

принадлежит $\Phi(f, R_+)$;

III) *если* $\varphi \in \Phi(f, R_+)$ *и* $\varphi^\tau = \varphi(t+\tau)$, $t \in R_+$, *то* $\varphi^\tau \in \Phi(f, R_+)$ $\forall \tau \in R_+$;

IV) *если* $x_n \to x_0$, $\varphi_n \in \Phi(f, R_+)$, $\varphi_n(0) = x_n$, *то существует подпоследовательность* φ_{n_k}, *сходящаяся на* R_+ *к некоторому полудвижению* $\varphi \in \Phi(f, R_+)$;

V) *если* $t_n \to t_0$, $\varphi_n \in \Phi(f, R_+)$, $\varphi_n(0) = x_0$ $\forall n$, *то существует такое полудвижение* $\varphi \in \Phi(f, R_+)$, $\varphi(0) = x_0$, *что* $\varphi(t_0)$ *— предельная точка для* $\varphi_n(t_n)$.

Предложение 1.56 [87, с. 28, с. 47]. *Пусть* Φ *— некоторое подмножество из* $C(R_+, X) = \{h : R_+ \to X \mid h$ *непрерывна*$\}$. *Если для функций из* Φ *выполняются условия* I)—V), *то отображение* $f(t, x) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in \Phi,\ \varphi(0) = x\}$, $x \in X$, $t \in R_+$, *является полунепрерывной по* x *полудинамической системой на* X, *причем* $\Phi = \Phi(f, R_+)$. *Если* $\varphi|_{[a,b]}$ *— отрезок движения (движение* $\varphi_x(t)$*), то* $\forall t_1 \in I_{\varphi_x}$, $\eta(t) = \varphi(t + t_1)$, $t \in [a - t_1, b - t_1]$ $(\varphi_z(t) = \varphi_x(t + t_1)$, $z = \varphi_x(t_1)$, $t + t_1 \in I_{\varphi_x})$ *также является отрезком движения (движением) полунепрерывной по* x *полудинамической системы.*

Скажем, что полунепрерывная по x полудинамическая система $f(t, x)$ на X удовлетворяет свойству VI), если совокупность движений $\Phi(f)$ этой системы обладает свойством:

VI) существует $\omega > 0$ такое, что если последовательность движений $\varphi_n(t) \in \Phi(f)$ равномерно ограничена на некотором отрезке $[a - \omega, b]$, то из нее можно выбрать подпоследовательность φ_{n_k}, сходящуюся на $[a, b]$ к отрезку $\varphi|_{[a,b]}$ некоторого движения этой системы.

Полунепрерывную по x полудинамическую систему, для которой выполняется свойство VI), называем G-системой на X.

Дифференциальные включения, функционально-дифференциальные включения, эволюционные уравнения параболического типа при естественных условиях порождают G-системы на соответствующих метрических пространствах.

Одну из точек пространства X обозначим 0. Множество Ψ, состоящее из непрерывных функций $\psi: I_\psi \to X$, где I_ψ — множество вида $]-\infty,+\infty[$, или $[c,+\infty[$ с $c \in]-\infty,0]$, или $]c,+\infty[$ с $c \in]-\infty,0[$, называем Z-системой, если существует $d>0$ такое, что для любых $t_0 \in R_+$, $x \in X$, $\rho(x,0) \leqslant d$, существует функция $\psi \in \Psi$ со свойством $\psi(t_0)=x$.

Будем говорить, что Z-система Ψ (G-система $f(t,x)$) обладает свойством интегральной непрерывности в точке $x=0$, если функция $\psi(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, принадлежит Z-системе (является полудвижением G-системы) и $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t_0 \in R_+$, $\forall t_1 > t_0$, $\exists \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$, $\forall x_0$, $\rho(x_0,0) \leqslant \delta$, $\forall \psi \in \Psi$ ($\forall \psi \in \Phi(f)$), $\psi(t_0)=x_0$, $\forall t \in [t_0,t_1]$ выполняется неравенство $\rho(\psi(t),0) \leqslant \varepsilon$. Для Z-системы (G-системы), обладающей свойством интегральной непрерывности в точке $x=0$, используем обозначение Z_0-система (G_0-система).

Скажем, что Z-система Ψ приближается к G-системе $f(t,x)$ при $t \to +\infty$, если существуют постоянные $\delta > 0$, $L > 0$ такие, что любые две последовательности $t_n \to +\infty$, $\psi_n \in \Psi$, удовлетворяющие условию $\rho(z_n(t),0) \leqslant L$, $\forall t \in [a-\delta,b]$, $z_n(t) = \psi_n(t+t_n)$, обладают свойством: из последовательности z_n можно выбрать подпоследовательность z_{n_k}, сходящуюся на $[a,b]$ к отрезку $\varphi|_{[a,b]}$ некоторого движения G-системы.

Функция $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, называется устойчивой для Z-системы Ψ (для G-системы $f(t,x)$), если функция $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, принадлежит Z-системе (является положительным полудвижением G-системы) и для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 > 0$ существует $\delta(\varepsilon,t_0) > 0$, что для любых x_0, $\rho(x_0,0) \leqslant \delta$, $\psi \in \Psi$ ($\psi \in \Phi(f)$), $\psi(t_0) = x_0$, выполняется неравенство $\rho(\psi(t),0) \leqslant \varepsilon$ $\forall t \in [t_0,+\infty[$.

Функция $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, называется асимптотически устойчивой для Z-системы Ψ (G-системы $f(t,x)$), если она устойчива и для любого $t_0 \in R_+$ существует $\eta(t_0) > 0$ такая, что для любых x_0, $\rho(x_0,0) \leqslant \eta$, $\psi \in \Psi$ ($\psi \in \Phi(f)$), $\psi(t_0) = x_0$, имеем $\rho(\psi(t),0) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Множество $\varphi_x^\infty(R) = \{y \in X \mid y = \varphi_x^\infty(t),\ t \in R\}$ ($\varphi_x^-(]-\infty,0])$) называется полной траекторией (полной отрицательной полутраекторией) полного движения φ_x^∞ (полудвижения φ_x^-). Траектория (полутраектория) называется нетривиальной, если она отлична от точки

$x = 0$. Движение (полудвижение) называется нетривиальным, если его траектория (полутраектория) нетривиальна.

Теорема 1.1 [63]. *Функция* $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, *асимптотически устойчива для* G_0*-системы* f *тогда и только тогда, когда существует окрестность точки* $x = 0$, *в которой* G_0*-система* f *не имеет полных отрицательных нетривиальных полутраекторий.*

Теорема 1.2 [63]. *Если* Z_0*-система приближается к* G*-системе при* $t \to +\infty$ *и функция* $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, *асимптотически устойчива для* G*-системы, то функция* $x(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, *асимптотически устойчива и для* Z_0*-системы.*

В следующей теореме рассматриваем G-системы, для которых выполняется **условие I).** Существуют непрерывная функция $V: X \to \to [0, +\infty[$, $V(0) = 0$, и постоянная $\Delta > 0$ такие, что функция $t \to \to V(\varphi(t))$ не возрастает для каждого движения φ G-системы до тех пор, пока $\rho(\varphi(t), 0) \leqslant \Delta$.

Обозначим $m_V^\Delta = \{x \in X \mid V(x) = 0,\ \rho(x, 0) \leqslant \Delta\}$.

Теорема 1.3 [63]. *Функция* $x \equiv 0$, $t \geqslant 0$, *асимптотически устойчива для* G_0*-системы* f, *удовлетворяющей условию* I), *в том и только в том случае, когда существует постоянная* Δ_1, $0 < \Delta_1 \leqslant \Delta$, *такая, что* G_0*-система не имеет полных отрицательных нетривиальных полудвижений* φ^- *и полных нетривиальных движений* φ^∞, *удовлетворяющих условиям* $\varphi^-(t) \in m_V^{\Delta_1}$ $\forall t \leqslant 0$; $V(\varphi^\infty(t)) = V(\varphi(0))$, $\rho(\varphi^\infty(t), 0) \leqslant \Delta_1$ $\forall t \in R$.

1.5. Дифференциальные включения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad f: R_+ \times R^d \to R^d. \tag{1.9}$$

Под решением системы (1.9) понимают функцию $x(t)$, определенную на некотором промежутке $|a, b|$, которая дифференцируема на $|a, b|$ и удовлетворяет условию $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ $\forall t \in |a, b|$. Если отображение f непрерывно, то для любой точки $x_0 \in R^d$ существует решение уравнения (1.9) с начальным условием x_0, которое продолжимо на промежуток $[0, c[$, где либо $c = +\infty$, либо $\lim\limits_{t \to c-0} \|x(t)\| = +\infty$. Для дифференциальных уравнений с разрывной функцией f такое определение решения уже не является приемлемым, что показывает следующий пример: $\dot{x} = 1 - 2\operatorname{sign} x$. При $x < 0$ имеем $\dot{x} = 3$, $x(t) = 3t + c_1$; при $x > 0$ имеем $\dot{x} = -1$, $x(t) = -t + c_2$. При возрастании t каждое решение доходит до прямой $x = 0$, и далее поле направлений не позволяет решению сойти с нее. Продолжение же решения по этой прямой невозможно, так как на ней $\dot{x}(t) = 0$, а $1 - 2\operatorname{sign} x(t) = 1$. Для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью обычно используют следующее обобщение понятия решения, принадлежащее А. Ф. Филиппову [99, 100, 102]. Для каждой точки (t, x) строят множество $F(t, x)$, состоящее из одной точки $f(t, x)$, если функция f непрерывна в (t, x). Если же (t, x) — точка разрыва f, то множество $F(t, x)$ задается тем или иным способом. Обычно $F(t, x)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения отображения $f(t, x^*)$, когда $x^* \to x$. Решениями системы (1.9) называют решения включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0. \tag{1.10}$$

А под решением включения (1.10) понимают абсолютно непрерывную функцию, определенную на промежутке $[0, b|$, для которой $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ при почти всех $t \in [0, b|$. В рассмотренном выше примере $F(x) = 1 - 2\operatorname{sign} x, x \neq 0, F(x) = [-1, 3]$ при $x = 0$. Решения включения уже продолжимы по прямой $x = 0$ и после попадания на эту прямую.

Отображение $F : R_+ \times R^d \to \operatorname{comp}(R^d)$ называется **локально ограниченным**, если $\forall b > 0$, $\exists M_b > 0$, что $\alpha(F(t, x), 0) \leqslant M_b$ $\forall t \in [0, b]$, $\forall x, \|x\| \leqslant b$.

Пусть D — множество локально ограниченных многозначных отображений $F : R_+ \times R^d \to \operatorname{conv} R^d$, измеримых по t и полунепрерывных сверху по x.

Предложение 1.57 [102]. *Пусть $F \in D$. Тогда дифференциальное включение* (1.10) *обладает следующими свойствами:*

1) *для каждого $x_0 \in R^d$ существует решение $x(t)$ включения* (1.10)*, которое продолжимо на промежуток $[0, c[$, где либо $c = +\infty$, либо $\lim\limits_{t \to c-0} \|x(t\|) = +\infty$;*

2) *пусть все решения* $x(t)$ *включения* (1.10) *с начальными условиями* $x_0 \in M \in \mathrm{comp}\,(R^d)$ *определены на отрезке* $[0,b]$ *и пусть* $H_F(M)$ *— множество всех этих решений, тогда* $H_F(M)$ *является компактным подмножеством в* $C([0,b],R^d)$;

3) *пусть все решения* $x(t)$ *включения* (1.10) *с начальным условием* x_0 *определены на отрезке* $[0,b]$, *тогда* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x_0^*$, $\|x_0^* - x_0)\| \leqslant \delta$, $\forall F^* \in D$, $F^*(t,x) \subset [\mathrm{co} F(t_{[\delta]}, [x]_\delta)]_\delta$, *каждое решение* $x^*(t)$ *задачи* $\dot{x}^* \in F^*(t,x^*)$, $\quad x^*(0) = x_0^*$, *продолжимо на* $[0,b]$ *и найдется решение* $x(t)$ *включения* (1.10), *удовлетворяющее неравенству* $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant b} \|x(t) - x^*(t)\| \leqslant \varepsilon$.

ГЛАВА 2
ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВКЛЮЧЕНИЙ

2.1. Теорема существования решений стохастических дифференциальных уравнений

Мы начинаем изучение стохастических дифференциальных уравнений с доказательства теоремы существования решений уравнений, правые части которых могут зависеть от ω. В параграфе 2.4 введенные решения для уравнений с правыми частями, независящими от ω, будут названы сильными решениями, а также там же будет доказана более сильная теорема существования.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, d-мерное $(\mathcal{F}_t)-$ броуновское движение $W(t)$ и функции $f : R_+ \times R^d \times \times \Omega \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times r}$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t,\omega) = f(t, x(t,\omega), \omega)dt + g(t, x(t,\omega), \omega)dW(t,\omega). \tag{2.1}$$

Определение 2.1. *Под решением* $x(t,\omega)$ *уравнения* (2.1) *с начальным условием* $\eta(\omega)$ *понимаем* d*-мерный непрерывный* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованный случайный процесс* $x(t,\omega)$, *определенный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с потоком* $\mathcal{F}_t$, *такой, что для каждого* $t \geqslant 0$ $\int\limits_0^t \|f(s, x(s,\omega), \omega)\|ds < \infty$, $\int\limits_0^t \|g(s, x(s,\omega), \omega)\|^2 ds < \infty$ *п. н. и для каждого* $t \in R_+$ *с вероятностью* 1 *имеет место равенство*

$$x(t,\omega) = \eta(\omega) + \int\limits_0^t f(s, x(s,\omega), \omega)ds + \int\limits_0^t g(s, x(s,\omega), \omega)dW(s,\omega).$$

Будем говорить, что отображения f и g удовлетворяют **условию A)**, если:

A_1) при каждом фиксированном x процессы $f(\cdot, x, \cdot)$ и $g(\cdot, x, \cdot)$ измеримы и $(\mathcal{F}_t)$-согласованы; при каждых фиксированных (t, ω) отображения $f(t, \cdot, \omega)$ и $g(t, \cdot, \omega)$ непрерывны по x; при всех $a \in R_+$ и $T \in R_+$ выполняется неравенство

$$E\Big(\int\limits_0^T (\alpha_1(t, a, \omega) + \alpha_2(t, a, \omega))dt\Big) < \infty,$$

где

$$\alpha_1(t, a, \omega) = \sup_{\|x\| \leqslant a} \|f(t, x, \omega)\|, \quad \alpha_2(t, a, \omega) = \sup_{\|x\| \leqslant a} \|g(t, x, \omega)\|^2;$$

A_2) существует вещественная функция $V(x)$, определенная на R^d непрерывная вместе с производными $V'''_{x_i x_j x_l}$, $i, j, l = 1, \ldots, d$, $V(x) >$ > 0 $\forall x \neq 0$, $V(0) = 0$, такая, что при всех $a \in R_+, t \in R_+, z \in$ $\in R^d, y \in R^d$, $\|z\| \leqslant a, \|y\| \leqslant a, \omega \in \Omega$ имеет место соотношение

$$V'_x(y - z)(f(t, y, \omega) - f(t, z, \omega)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(V''_{x^2}(y - z)(g(t, y, \omega) -$$

$$-g(t, z, \omega))(g(t, y, \omega) - g(t, z, \omega))^\top\Big) \leqslant k(t, a, \omega)V(y - z), \qquad (2.2)$$

где при каждом $a \in R_+$ $k(t, a, \omega)$ — непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс, удовлетворяющий для любых $T \in R_+$, $a \in R_+$ неравенству

$$E\Big(\int\limits_0^T k(t, a, \omega)dt\Big) < \infty.$$

Будем говорить, что отображения f и g удовлетворяют **условию B)**, если существует вещественная неотрицательная функция $Q(x)$, определенная на R^d непрерывная вместе с производными $Q'''_{x_i x_j x_l}$ $i, j, l = 1, \ldots, d$, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} Q(x) = \infty$, такая, что при всех $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$Q'_x(x)f(t, x, \omega) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(Q''_{x^2}(x)g(t, x, \omega)g^\top(t, x, \omega)\Big) \leqslant k_1(t, \omega)(1 + Q(x)), \qquad (2.3)$$

где $k_1(t,\omega)$ — непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс, удовлетворяющий при каждом $T \in R_+$ условию

$$E(\int\limits_0^T k_1(t,\omega)dt) < \infty.$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\xi(t)$ — *непрерывный* $(\mathcal{F}_t)$-*согласованный неотрицательный процесс,* σ — *ограниченный момент остановки,* $b \in R_+$, *и пусть для любого момента остановки* $\tau \leqslant \sigma$ *имеем* $E(\xi(\tau)) \leqslant b$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant\sigma} \xi(t) \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{b}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Возьмем $\tau = \sigma \wedge \inf\{t \geqslant 0 \big| \xi(t) \geqslant \varepsilon\}$. Тогда $\{\omega \big| \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\sigma} \xi(t) \geqslant \varepsilon\} = \{\omega \big| \xi(\tau) \geqslant \varepsilon\}$. Теперь требуемое неравенство вытекает из неравенства Чебышева.

Лемма 2.2. *Пусть*: *отображения* f *и* g *удовлетворяют условиям* A) *и* B); $(x_n(t,\omega), p_n(t,\omega))$ — *последовательности непрерывных* $(\mathcal{F}_t)$-*согласованных процессов таких, что для каждого* $t \geqslant 0$ *с вероятностью* 1 *имеет место равенство*

$$x_n(t,\omega) = \eta(\omega) + \int\limits_0^t f(\tau, x_n(\tau,\omega) + p_n(\tau,\omega),\omega)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t g(\tau, x_n(\tau,\omega) + p_n(\tau,\omega),\omega)dW(\tau); \tag{2.4}$$

$\tau_n(a,\omega) = \inf\{t \big| \|x_n(t,\omega)\| > \frac{a}{6}\}$; $\|p_n(t,\omega)\| \leqslant \frac{a}{3}$ *при* $0 \leqslant t \leqslant \tau_n$; *при всех* $a \in R_+$, $T \in R_+$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} E(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n(a,\omega)} \|p_n(t,\omega)\|dt) = 0. \tag{2.5}$$

Тогда для каждого $T \in R_+$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x_n(t,\omega) - x_m(t,\omega)\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{P} 0.$$

Доказательство. Пусть

$$h(t,a,\omega)=\sup_{1\leqslant i,j,l\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\Bigg(\Big|V'_{x_i}(x)\Big|k(t,a,\omega)+$$

$$+\Big|V''_{x_ix_j}(x)\Big|\alpha_1(t,a,\omega)+\Big|V'''_{x_ix_jx_l}(x)\Big|\alpha_2(t,a,\omega)\Bigg).$$

Из условий леммы следует, что при всех $a\in R_+,\ T\in R_+$ выполняется неравенство

$$E\bigg(\int_0^T h(t,a,\omega)dt\bigg)=M(a,T)<\infty. \tag{2.6}$$

Покажем, что при всех $a\in R_+,\ T\in R_+$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}E\bigg(\int_0^{T\wedge\tau_n(a,\omega)}\|p_n(t,\omega)\|h(t,a,\omega)dt\bigg)=0. \tag{2.7}$$

Представим выражение под знаком предела в (2.7) в виде

$$E\bigg(\int_0^{T\wedge\tau_n(a,\omega)}\|p_n(t,\omega)\|h(t,a,\omega)dt\bigg)=E\bigg(\int_0^{T\wedge\tau_n(a,\omega)}\|p_n(t,\omega)\|h(t,a,\omega)\times$$

$$\times 1_{B_1}(t,\omega)dt\bigg)+E\bigg(\int_0^{T\wedge\tau_n(a,\omega)}\|p_n(t,\omega)\|h(t,a,\omega)1_{B_2}(t,\omega)dt\bigg), \tag{2.8}$$

где $B_1=\{(t,\omega)|h(t,a,\omega)>i\}$, $B_2=\{(t,\omega)|h(t,a,\omega)\leqslant i\}$. Из (2.6) имеем

$$\lim_{i\to\infty}(\mu\times P)\big\{(t,\omega)\in[0,\tau_n(a,\omega)]\times\Omega\big|h(t,a,\omega)>i\big\}=0.$$

Отсюда и из предложения 1.8 следует, что для произвольного $\varepsilon>$ >0 можно выбрать i таким образом, что первое слагаемое в (2.8) оказалось бы меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем такое i, а затем, используя (2.5), выберем номер N_ε так, что второе слагаемое в (2.8) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при $n\geqslant N_\varepsilon$, отсюда и из равенства (2.8) следует неравенство (2.7). Далее, фиксируем на время n,m,a и полагаем

$$z(t)=x_n(t,\omega),\quad y(t)=x_m(t,\omega),\quad p(t)=p_n(t,\omega),\quad q(t)=p_m(t,\omega),$$

$$\alpha(t,a,\omega)=\int\limits_0^t k(s,a,\omega)ds,\quad \psi(t)=\exp(-\alpha(t,a,\omega)),\quad \gamma_{n,m}=\tau_n\wedge\tau_m.$$

Используя формулу Ито, для любого $T\in R_+$ имеем

$$\psi(t\wedge T\wedge\gamma_{n,m})V(z(t\wedge T\wedge\gamma_{n,m})-y(t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}))=$$

$$=\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}\psi(s)\big[-k(s,a,\omega)V(z(s)-y(s))+$$

$$+V_x^{'}(z(s)-y(s))(f(s,z(s)+p(s),\omega)-f(s,y(s)+q(s),\omega))+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(V_{x^2}^{''}(z(s)-y(s))(g(s,z(s)+p(s),\omega)-g(s,y(s)+q(s),\omega))\times$$

$$\times(g(s,z(s)+p(s),\omega)-g(s,y(s)+q(s),\omega))^{\top}\big)\big]ds+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}\psi(s)V_x^{'}(z(s)-y(s))(g(s,z(s)+p(s),\omega)-g(s,y(s)+q(s),\omega))dW(s).$$

Отсюда с помощью условия $A_2)$ получаем

$$\psi(t\wedge T\wedge\gamma_{n,m})V(z(t\wedge T\wedge\gamma_{n,m})-y(t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}))\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}\psi(s)\big[k(s,a,\omega)(V(z(s)+p(s)-y(s)-q(s))-$$

$$-V(z(s)-y(s)))+(V_x^{'}(z(s)-y(s))-V_x^{'}(z(s)+p(s)-y(s)-q(s)))\times$$

$$\times(f(s,z(s)+p(s),\omega)-f(s,y(s)+q(s),\omega))+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\big(V_{x^2}^{''}(z(s)-y(s))-V_{x^2}^{''}(z(s)+p(s)-y(s)-q(s))\big)\times$$

$$\times(g(s,z(s)+p(s),\omega)-g(s,y(s)+q(s),\omega))(g(s,z(s)+p(s),\omega)-$$

$$-g(s,y(s)+q(s),\omega))^{\top}\big)\big]ds+\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}\psi(s)V_x^{'}(z(s)-y(s))\times$$

$$\times(g(s,z(s)+p(s),\omega)-g(s,y(s)+q(s),\omega))dW(s)\leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}} \sup_{1\leqslant i,j,l\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\Big(\big|V'_{x_i}(x)\big|k(t,a,\omega)+$$

$$+\big|V''_{x_ix_j}(x)\big|\alpha_1(t,a,\omega)+\big|V'''_{x_ix_jx_l}(x)\big|\alpha_2(t,a,\omega)\Big)(\|p(s)\|+\|q(s)\|)ds+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}\psi(s)V'_x(z(s)-y(s))(g(s,z(s)+p(s),\omega)-$$

$$-g(s,y(s)+q(s),\omega))dW(s)=c\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}h(s,a,\omega)(\|p(s)\|+\|q(s)\|)ds+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\gamma_{n,m}}V'_x(z(s)-y(s))(g(s,z(s)+p(s),\omega)-g(s,y(s)+q(s),\omega))dW(s).$$

Возвращаясь к предыдущим обозначениям, из последнего неравенства для любого $a\in R_+$ и для любого $(\mathcal{F}_t)$-момента остановки τ, $0\leqslant\tau\leqslant$ $\leqslant T\wedge\gamma_{n,m}$, имеем неравенство

$$E(\exp(-\alpha(\tau,a,\omega)V(x_n(\tau,\omega)-x_m(\tau,\omega))))\leqslant$$

$$\leqslant c\,E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n}h(s,a,\omega)\|p_n(s,\omega)\|ds+\int\limits_0^{T\wedge\tau_m}h(s,a,\omega)\|p_m(s,\omega)\|ds\Bigg).$$

По лемме 2.1

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T\wedge\gamma_{n,m}}\exp(-\alpha(t,a,\omega))V(x_n(t,\omega)-x_m(t,\omega))\xrightarrow[n,m\to\infty]{P}0.$$

Множитель $\exp(-\alpha(t,a,\omega))$ можно опустить, так как он не зависит от n,m. Отсюда и из свойств функции V следует соотношение

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T\wedge\gamma_{n,m}}\|x_n(t,\omega)-x_m(t,\omega)\|\xrightarrow[n,m\to\infty]{P}0. \tag{2.9}$$

Если мы покажем, что для любого $T\in R_+$ выполняется равенство

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\{\tau_n(a,\omega)\leqslant T\}=0, \tag{2.10}$$

то лемма вытекает из соотношения (2.9). Опять временно положим

$$z(t) = x_n(t,\omega), \quad \psi(t) = \exp(-\alpha_3(t,\omega) - Q(\eta(\omega))),$$

$$\alpha_3(t,\omega) = \int\limits_0^t k_1(s,\omega)ds, \quad p(t) = p_n(t,\omega).$$

Используя формулу Ито и условие B), имеем

$$\psi_1(t\wedge\tau_n)(1+Q(z(t\wedge\tau_n))) \leqslant \exp(-Q(\eta))(1+Q(\eta))+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\psi_1(s)\big[k_1(s,\omega)(Q(z(s)+p(s))-Q(z(s)))+$$

$$+(Q_x^{'}(z(s))-Q_x^{'}(z(s)+p(s)))f(s,z(s)+p(s),\omega)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big((Q_{x^2}^{''}(z(s))-Q_{x^2}^{''}(z(s)+p(s)))g(s,z(s),\omega)g^\top(s,z(s),\omega)\big)\big]ds+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\psi_1(s)Q_x^{'}(z(s))g(s,z(s,\omega),\omega)dW(s) \leqslant c_1(\exp(-Q(\eta))(1+Q(\eta))+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\Bigg(\sup_{1\leqslant i\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\big|Q_{x_i}^{'}(x)\big|k_1(s,\omega)+\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\big|Q_{x_ix_j}^{''}(x)\big|\alpha_1(s,a,\omega))+$$

$$+\sup_{1\leqslant i,j,l\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\big|Q_{x_ix_jx_l}^{'''}(x)\big|\alpha_2(s,a,\omega))\Bigg)\|p(s)\|ds+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\psi_1(s)Q_x^{'}(z(s))g(s,z(s,\omega),\omega)dW(s)) = c_1(\exp(-Q(\eta))(1+Q(\eta))+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}h_1(s,\omega)\|p(s)\|ds+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\psi_1(s)Q_x^{'}(z(s))g(s,z(s,\omega),\omega)dW(s)),$$

где

$$h_1(t,\omega) = \sup_{1\leqslant i\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\big|Q_{x_i}^{'}(x)\big|k_1(s,\omega)+$$

$$+\sup_{1\leqslant i,j\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\big|Q_{x_ix_j}^{''}(x)\big|\alpha_1(s,a,\omega)+\sup_{1\leqslant i,j,l\leqslant d}\sup_{\|x\|\leqslant a}\big|Q_{x_ix_jx_l}^{'''}(x)\big|\alpha_2(s,a,\omega).$$

Для любого момента остановки $\tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T \wedge \tau_n,$ из последнего неравенства следует, что

$$E(\psi_1(\tau)(Q(x_n((\tau,\omega)))) + 1) \leqslant c_1 c_2 + c_1 E(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} h_1(s,\omega)\|p_n(s)\|ds) \leqslant c_1 c_2 + 1$$

для всех достаточно больших $n,$ где

$$c_2 = \sup_{y\in[0,\infty[} \exp(-Q(y))(1+Q(y)).$$

Соотношение (2.7) справедливо и после замены процесса h на $h_1,$ т. е.

$$\lim_{n\to\infty} E(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} h_1(s,\omega)\|p_n(s,\omega)\|ds) = 0.$$

Для всех достаточно больших n и для любого $b > 0,$ согласно лемме 2.1, имеем неравенство

$$P\Big\{\sup_{t\leqslant T\wedge\tau_n} \psi_1(t)Q((x_n(t,\omega)) \geqslant b\Big\} \leqslant \frac{c_1c_2+1}{b}.$$

Пусть $r(a) = \inf\limits_{\|x\|\geqslant \frac{a}{10}} Q(x).$ Тогда

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\Big\{\sup_{t\leqslant T\wedge\tau_n} \psi_1(t)Q(x_n(t,\omega)) \geqslant r(a)\Big\} = 0.$$

Множитель $\psi_1(t)$ не зависит от $a,$ поэтому

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\Big\{\sup_{t\leqslant T\wedge\tau_n} Q(x_n(t,\omega)) \geqslant r(a)\Big\} = 0. \qquad (2.11)$$

Так как $\{\omega|\tau_n \leqslant T\} \subset \big\{\omega\big| \sup\limits_{t\leqslant T\wedge\tau_n} Q(x_n(t,\omega)) \geqslant r(a)\big\},$ то теперь требуемое соотношение (2.10) вытекает из (2.11). Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.1. *Если отображения* f *и* g *удовлетворяют условиям* A) *и* B), *то для любого* $(\mathcal{F}_0)$ *-измеримого вектора* $\eta(\omega)$ *уравнение* (2.1) *имеет решение с начальным условием* $\eta.$

Доказательство. Определим процессы $x_n(t,\omega): x_n(0,\omega)=\eta(\omega)$,

$$dx_n(t,\omega)=f(t,x_n(\frac{k}{n},\omega),\omega)dt+g(t,x_n(\frac{k}{n},\omega),\omega)dW(t,\omega)$$

при $t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$, которые, легко видеть, удовлетворяют уравнениям

$$dx_n(t,\omega)=f(t,x_n(t,\omega)+p_n(t,\omega),\omega)dt+g(t,x_n(t,\omega)+$$
$$+p_n(t,\omega),\omega)dW(t,\omega), \tag{2.12}$$

где $p_n(t,\omega)=x_n(\kappa_n(t),\omega)-x_n(t,\omega)$, $\quad\kappa_n(t)=\frac{[tn]}{n}$, ($[tn]$ — целая часть числа tn). Определим τ_n^a как момент первого выхода $x_n(t,\omega)$ из шара $\|x\|\leqslant\frac{a}{6}$, тогда $\|p_n(t,\omega)\|\leqslant\frac{a}{3}$ при $0\leqslant t\leqslant\tau_n^a$. Из определения процесса $p_n(t,\omega)$ следует, что его можно представить в виде

$$-p_n(t,\omega)=\int\limits_{\kappa_n(t)}^{t} f(s,x_n(\kappa_n(s)),\omega)ds+\int\limits_{\kappa_n(t)}^{t} g(s,x_n(\kappa_n(s)),\omega)dW(s,\omega).$$

Пусть $v_n(t,\omega)=\|p_n(t,\omega)1_A(t,\omega)\|$, где $A=\{(t,\omega)|0\leqslant t\leqslant\tau_n^a\}$. Для любых $\varepsilon>0,\delta>0$, используя предложение 1.35, имеем неравенство

$$P\Big\{v_n(t,\omega)\geqslant 2\varepsilon\Big\}\leqslant P\Bigg\{\int\limits_{\kappa_n(t)}^{t}\sup_{\|x\|\leqslant a}\|f(s,x,\omega)\|ds\geqslant\varepsilon\Bigg\}+$$
$$+P\Bigg\{\int\limits_{\kappa_n(t)}^{t}\sup_{\|x\|\leqslant a}\|g(s,x,\omega)\|^2ds\geqslant\delta\Bigg\}+\frac{\delta}{\varepsilon^2}. \tag{2.13}$$

Неравенство (2.13) совместно с условием A_1) показывает, что для любого $t\in R_+$ выполняется соотношение

$$v_n(t,\omega)\underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}}0. \tag{2.14}$$

Так как $v_n(t,\omega)\leqslant\frac{a}{3}$, то из (2.14), используя теорему Фубини и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что для любых $a\in R_+$, $T\in R_+$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n^a}\|p_n(t,\omega)\|dt\Bigg)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T E(v_n(t,\omega))dt=0,$$

т. е. условие (2.5) леммы 2.2 выполняется. Из леммы 2.2 вытекает существование непрерывного процесса $x(t,\omega)$ такого, что для любого $T \in R_+$

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|x_n(t,\omega) - x(t,\omega)\|) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0.$$

Ясно, что также

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|x_n(\kappa_n(t),\omega) - x(t,\omega)\|) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0. \tag{2.15}$$

Процесс $x(t,\omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$-согласованным, так как этим свойством обладают процессы $x_n(t,\omega)$. Пусть $b \in R_+$, $\tau(b,\omega) = \inf\{t | \|x(t,\omega)\| > b\}$. Зафиксируем $t \in R_+$ и выберем подпоследовательность $x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s),\omega)$ последовательности $x_n(\kappa_n(s),\omega)$, сходящуюся равномерно по $s \in [0,t]$ п. н. Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, имеем

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\left\| \int\limits_0^{t\wedge\tau(b,\omega)} (g(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s),\omega),\omega) - g(s, x(s,\omega),\omega))dW(s)\right\|^2\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau(b,\omega)} \|g(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s),\omega),\omega) - g(s, x(s,\omega),\omega)\|^2 ds\right) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \| \int\limits_0^{t\wedge\tau(b,\omega)} (f(s, x_{n_k}(\kappa_{n_k}(s),\omega),\omega) - f(s, x(s,\omega),\omega))ds\| = 0 \quad \text{п. н.} \tag{2.16}$$

Для некоторой подпоследовательности $x_{n_{k_i}}(\kappa_{n_{k_i}}(s),\omega)$ выполняется равенство [предложение 1.39]

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{t\wedge\tau(b,\omega)} g(s, x_{n_{k_i}}(\kappa_{n_{k_i}}(s),\omega),\omega)dW(s) =$$

$$= \int\limits_0^{t\wedge\tau(b,\omega)} g(s, x(s,\omega),\omega)dW(s) \quad \text{п. н.} \tag{2.17}$$

Из соотношений (2.12), (2.16), (2.17) для любой последовательности $b_l \underset{l\to\infty}{\to} \infty$ имеем

$$x(t\wedge\tau(b_l,\omega),\omega) = \eta(\omega) + \int\limits_0^{t\wedge\tau(b_l,\omega)} f(s,x(s,\omega),\omega)ds +$$

$$+ \int\limits_0^{t\wedge\tau(b_l,\omega)} g(s,x(s,\omega),\omega)dW(s) \quad \text{п. н.} \tag{2.18}$$

Из (2.10), (2.15) следует

$$\lim_{l\to\infty}(\tau(b_l,\omega)\wedge t) = t \quad \text{п. н.}$$

Переходя к пределу в (2.18) при $l\to\infty$, убеждаемся, что $x(t,\omega)$ — решение уравнения (2.1). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если $V(x)=\|x\|^2,\ Q(x)=\|x\|^2$, то неравенства (2.2), (2.3) имеют вид

$$2(y-z)^\top(f(t,y,\omega)-f(t,z,\omega)) + \mathrm{tr}\big((g(t,y,\omega)-g(t,z,\omega))\times$$

$$\times(g(t,y,\omega)-g(t,z,\omega))^\top\big) \leqslant k(t,a,\omega)\|y-z\|^2, \tag{2.19}$$

$$2x^\top f(t,x,\omega) + \mathrm{tr}(g(t,x,\omega)g^\top(t,x,\omega)) \leqslant k_1(t,\omega)(1+\|x\|^2). \tag{2.20}$$

Говорят, что отображения f и g удовлетворяют **локальному условию Липшица по** x, если для любого $a\in R_+$ существует непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $k(t,a,\omega)$, что при всех $t\in$ $\in R_+, \omega\in\Omega,\ x,y\in R^d,\ \|x\|\leqslant a, \|y\|\leqslant a$

$$\|f(t,x,\omega)-f(t,y,\omega)\| + \|g(t,x,\omega)-g(t,y,\omega)\| \leqslant k(t,a,\omega)\|x-y\|$$

и для любого $T\in R_+$ $\quad E\big(\int\limits_0^T k^2(t,a,\omega)dt\big) < \infty.$

Говорят, что отображения f и g имеют **линейный порядок роста по** x, если при всех $\omega\in\Omega,\ t\in R_+,\ x\in R^d$

$$\|f(t,x,\omega)\| + \|g(t,x,\omega)\| \leqslant k_1(t,\omega)(1+\|x\|),$$

где $k_1(t,\omega)$ — непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс такой, что при каждом $T\in R_+$ $\quad E\Big(\int\limits_0^T k_1^2(t,\omega)dt\Big)<\infty.$

Ясно, что отображения f и g, удовлетворяющие локальному условию Липшица по x, удовлетворяют также неравенству (2.19), а отображения f,g, имеющие линейный порядок роста по x, удовлетворяют неравенству (2.20) с функциями k,k_1 такими, как в условиях А), В). Приведем пример отображений f и g, которые удовлетворяют условию А), но не удовлетворяют неравенству (2.19): $g(t,x,\omega)\equiv 0$, $x = (x_1,x_2)\in R^2$, $f(t,x,\omega) = (-x_1^{\frac13}\quad \frac12 x_1^{\frac13})^\top$. Если $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, то

$$V_x'(y-z)(f(t,y,\omega)-f(t,z,\omega)) = -\frac{3}{2}(y_1^{\frac13}-z_1^{\frac13})^2(y_1^{\frac23}+y_1^{\frac13}z_1^{\frac13}+z_1^{\frac23})\leqslant 0,$$

в то время как

$$(y-z)(f(t,y,\omega)-f(t,z,\omega)) = (y_1-z_1)^{\frac43}+(y_2-z_2)^{\frac43}.$$

2.2. Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений

В этом параграфе доказывается теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений

$$dX(t) = f(t,X(t))\,dt + g(t,X(t))\,dW(t),\quad X\in R^d, \tag{2.21}$$

с измеримыми по Борелю функциями $f:\ R_+\times R^d\to R^d$, $g:\ R_+\times R^d\to R^{d\times d}$.

Первая теорема существования слабых решений получена А. В. Скороходом [88] при предположениях, что функции f и g непрерывны и ограничены. Далее, Н. В. Крылов [39] показал, что для существования слабых решений достаточно измеримости, ограниченности функций f, g и невырожденности матрицы g $(\lambda^\top gg^\top\lambda\geqslant\nu\|\lambda\|^2$, $\nu>0$, $\forall\lambda\in R^d)$. Затем условие невырожденности матрицы g было ослаблено. А. Ю. Веретенников [11] установил, что для системы

$$dx(t) = f^{(1)}(t, x(t), y(t))\,dt + g^{(1)}(t, x(t), y(t))\,dW(t),$$
$$dy(t) = f^{(2)}(t, x(t), y(t))\,dt + g^{(2)}(t, x(t), y(t))\,dW(t), \tag{2.22}$$

$x \in R^l$, $y \in R^{d-l}$, слабые решения существуют при следующих предположениях: функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ измеримы по Борелю, ограничены и непрерывны по y, матрица $g^{(1)}$ не вырождена. Аналогичная теорема установлена в работе [154]. В работе [162] показано, что для существования слабых решений уравнения (2.21) достаточно, чтобы функции f и g являлись измеримыми, имели линейный порядок роста при $\|X\| \to \infty$ и замыкание пересечения множества слабой вырожденности отображения g, т. е. множества $\{(t, X) |\ \int_{U_{(t,X)}} (\det gg^\top(\tau, y))^{-1}\,d\tau\,dy = \infty$ для каждой открытой окрестности $U_{(t,X)}$ точки $(t, X)\}$ и множества точек разрыва функции f или g содержалось во множестве нулей отображений f и g.

В этом параграфе мы доказываем теорему существования слабых решений, обобщающую перечисленные выше результаты.

Определение 2.2. *Если существует процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, удовлетворяющий условиям:*

1) *существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки e, что процесс $X(t)1_{[0,e)}(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-согласованным, имеет непрерывные траектории при $t < e$ п. н. и $\limsup\limits_{t \uparrow e} \|X(t)\| = \infty$, если $e < \infty$;*

2) *существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;*

3) *процессы $f(t, X(t))$, $g(t, X(t))$ принадлежат соответственно пространствам L_1^{loc}, L_2^{loc}, где L_1^{loc}, L_2^{loc} – множество всех измеримых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных соответственно процессов $\psi : R_+ \times \Omega \to R^d$, $\varphi : R_+ \times \Omega \to R^{d\times d}$ таких, что для каждого момента остановки σ, $0 \leqslant \sigma < e$, выполняются условие $\int_0^\sigma \|\psi(s, \omega)\|\,ds < \infty$ п. н. для L_1^{loc} и условие $\int_0^\sigma \|\varphi(s, \omega)\|^2\,ds < \infty$ п. н. для L_2^{loc};*

4) *с вероятностью 1 для всех $t \in [0, e)$ имеет место равенство*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(\tau, X(\tau))\,d\tau + \int_0^t g(\tau, X(\tau))\,dW(\tau),$$

то набор $(X(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W(t), e)$ (или короче $X(t)$) называют слабым решением уравнения (2.21).

Стохастический интеграл в последнем равенстве определяется следующим образом: если $\sigma_n(\omega) = \inf\{t | \|X(t)\| \geqslant n\}$, то для каждого $t \in \in [0, \infty)$ определен интеграл

$$\int\limits_0^t g(\tau, X(\tau)) 1_{[0,\sigma_n(\omega))}\, dW(\tau) = \int\limits_0^{t\wedge\sigma_n(\omega)} g(\tau, X(\tau))\, dW(\tau),$$

который позволяет для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определить отображение $t \in [0, \sigma_n) \to \int_0^t g(\tau, X(\tau))\, dW(\tau)$, и поэтому оно определено на $[0, e(\omega))$, так как $e(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(\omega)$ п. н.

Если процесс $X(t)$ удовлетворяет всем условиям определения 2.2, кроме $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|X(t)\| = \infty$, если $e < \infty$, то его будем называть слабым решением на промежутке $[0, e|$.

Матрица $\sigma(t, X) = g(t, X) g^\top(t, X)$ является симметрической неотрицательной. Существуют измеримые по Борелю ортогональная T и диагональная $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ матрицы такие, что $\sigma = T\Lambda T^\top$. Пусть $g^* = T\, \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d})$. Без ограничения общности будем считать, что в системе (2.21) $g = g^*$ [8, с. 97–98].

Выберем строки матрицы g с номерами $\beta_1, \ldots, \beta_l$, $\beta_1 < \cdots < < \beta_l$, и пусть $\beta_{l+1} < \cdots < \beta_d$ — номера оставшихся строк. Построим матрицу

$$\sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d) = \begin{pmatrix} g_{\beta_1} g_{\beta_1}^\top & \cdots & g_{\beta_1} g_{\beta_l}^\top \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\beta_l} g_{\beta_1}^\top & \cdots & g_{\beta_l} g_{\beta_l}^\top \end{pmatrix},$$

где g_{β_j} – строка с номером β_j матрицы g, а также построим множества H_1, H_2; $H_1(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \big\{(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})|$ для любой открытой окрестности $U_{(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})}$ точки $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ существует число $a > 0$ такое, что интеграл

$$\int\limits_{U_{(t,x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_l})}} \sup_{(x_{\beta_{l+1}},\ldots,x_{\beta_d}) \in D_2(0,a)} (\det \sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d))^{-1}\, dt\, dx_{\beta_1} \ldots dx_{\beta_l}$$

либо не определен, либо равен $\infty\big\}$, где $D_2(0, a) = \{(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d})| (x_{\beta_{l+1}}^2 + \ldots + x_{\beta_d}^2)^{1/2} \leqslant a\}$; $H_2(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \big\{(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) \in \in H_1^c(\beta_1, \ldots, \beta_l)|$ для любой открытой окрестности $U_{(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})}$

точки $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ существует число $a > 0$ такое, что функция $\sup\limits_{(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d}) \in D_2(0,a)} (\det \sigma_{\beta_1, \ldots, \beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d))^{-1} : U \to [0, \infty]$ не является измеримой по Борелю$\}$ (под дополнением H_1^c множества H_1 понимаем дополнение в пространстве переменных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$, а под открытой окрестностью — окрестность, открытую в пространстве тех же переменных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$). Пусть $\hat{H}(\beta_1, \ldots, \beta_l) = H_1(\beta_1, \ldots, \beta_l) \bigcup H_2(\beta_1, \ldots, \beta_l)$.

Будем говорить, что вещественная функция $h(t, X) = h(t, x_1, \ldots, x_d)$ удовлетворяет **условию C),** если существуют индексы $\beta_1, \ldots, \beta_l$, $\beta_1 < \cdots < \beta_l \leqslant d$, такие, что: 1) функция h при каждых фиксированных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ непрерывна по оставшимся компонентам $(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d})$ вектора X; 2) в пространстве переменных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ найдется замкнутое множество H со свойствами: а) $H \supset \hat{H}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$; б) множество $\{(t, x_1, \ldots, x_d) | \ (t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) \in H\}$ принадлежит множеству точек непрерывности отображения h; в) функция $\sigma_{\beta_1, \ldots, \beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d)$ при каждых фиксированных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) \in H^c$ непрерывна по переменным $(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d})$.

Функция $h : R_+ \times R^d \to R^{d \times r}$ называется **локально ограниченной,** если для любого $b > 0$ существует постоянная $N(b)$ такая, что $\|h(t, X)\| \leqslant N(b)$ для всех $t \in [0, b]$, $X \in B(0, b)$.

Пусть: $g^{(1)}$ – $(l \times d)$-матрица, составленная из первых l строк матрицы g; $g^{(2)}$ – $((d - l) \times d)$-матрица, составленная из оставшихся строк матрицы g; $f^{(1)}$ – вектор, состоящий из первых l компонент вектора f; $f^{(2)}$ – вектор, составленный из оставшихся компонент вектора f; $X = (x, y)$, $x \in R^l$, $y \in R^{d-l}$; $\sigma^{(1)} = g^{(1)} g^{(1)\top}$; $B_1(0, a) = \{x \in R^l | \ \|x\| \leqslant a\}$, $B_2(0, a) = \{y \in R^{d-l} | \ \|y\| \leqslant a\}$; $H_1 = \{(t, x) \in R_+ \times R^l |$ для любой открытой в $R_+ \times R^l$ окрестности $U_{(t,x)}$ точки (t, x) существует такое число $a > 0$, что интеграл

$$\int\limits_{U_{(t,x)}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(\tau, z, y))^{-1} \, d\tau \, dz$$

либо не определен, либо равен $\infty\}$; $H_2 = \{(t, x) \in H_1^c |$ для любой открытой окрестности $U_{(t,x)}$ точки (t, x) существует $a > 0$ такое, что функция $(t, x) \to \sup\limits_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y))^{-1}$, $(t, x) \in U$, не является измеримой по Борелю}; $\hat{H} = H_1 \cup H_2$. Если $H \subset R_+ \times R^l$, то

$$H^c = (R_+ \times R^l) \backslash H, \quad (H)_\gamma = \{(t,x) \in R_+ \times R^l | \inf_{(s,y)\in H} (|t-s| + \|x-y\|) \leqslant \gamma\},$$

$$(H)^c_\gamma = (R_+ \times R^l) \setminus (H)_\gamma, \quad (H)_\gamma = \emptyset, \text{если} \quad H = \emptyset.$$

Теперь будем рассматривать систему вида (2.22) с построенными выше функциями $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$.

Лемма 2.3. *Пусть: функции* $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$ *и* $g^{(2)}$ *— измеримы по Борелю и локально ограничены;* $(\Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, W(t), x(t), y(t), t \in \in R_+)$ *– слабое решение системы* (2.22); $\psi(t,x,y)$ *— неотрицательная измеримая по Борелю функция такая, что при любом* $b > 0$ *отображение* $(t,x) \to \sup\limits_{y \in B_2(0,b)} \psi(t,x,y)$ *измеримо по Борелю. Тогда для любых* $a \in R_+$ *и* $T \in R_+$ *выполняется неравенство*

$$E\left(\int_0^{T\wedge\tau^a} (\det \sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} \psi(t,x(t),y(t))\,dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant c(a,T,l,d) \left(\int_{[0,T]\times B_1(0,a)} \sup_{y \in B_2(0,a)} \psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx \right)^{1/(l+1)}, \qquad (2.23)$$

где $\tau^a = \inf\{t | \|x(t)\| \vee \|y(t)\| > a\}$, $c(a,T,l,d)$ *— постоянная, зависящая лишь от* a,T,l,d.

Доказательство. Возьмем произвольные $T > 0$, $a > 0$. Пусть функция $q: \ R_+ \times R^l \to R_+$ непрерывна и ограничена. Положим $q(t,x) = 0$ для $t < 0$. По лемме Крылова (предложение 1.48) существует ограниченная функция $z(t,x) \leqslant 0$, равная нулю при $t < 0$ и такая, что для всех достаточно больших n и для всех $(t,x) \in R_+ \times \times B_1(0,a)$ выполняются следующие условия:

1) $c_1(a,l)(\det \sigma^{(1)}(T - t,x,y))^{1/(l+1)} q_n(t,x) \leqslant -\dfrac{\partial z_n(t,x)}{\partial t} + + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{l} \sigma^{(1)ij}(T - t,x,y) \dfrac{\partial^2 z_n(t,x)}{\partial x^i \partial x^j}$, где $c_1(a,l)$ – положительная постоянная, $\sigma^{(1)ij}$ – компоненты матрицы $\sigma^{(1)}$,

$$\sigma^{(1)ij}(T-t,x,y) = 0 \quad \text{при} \quad t > T,$$

$z_n(t,x)$ – свертка функций $z(t,x)$, $J_n(t,x)$, т. е.

$$z_n(t,x)=z(t,x)*J_n(t,x)=\int\limits_{|t-\tau|\leqslant 1/n,\ \|x-\eta\|\leqslant 1/n} z(\tau,\eta)J_n(t-\tau,x-\eta)\,d\tau\,d\eta,$$

$$q_n(t,x)=q(t,x)*J_n(t,x)$$

(функции $J_n(t,x)$ определены перед формулировкой предложения 1.48);

2) если $b\in R^l$, $c>0$ таковы, что $\|b\|\leqslant ac/2$, то

$$\Big|\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial z_n(t,x)}{\partial x^i}b_i\Big|\leqslant c|z_n(t,x)|$$

для всех $(t,x)\in R_+\times B_1(0,a)$;

3) существует постоянная $c_2(a,l)$ такая, что

$$|z(t,x)|\leqslant c_2(a,l)\Bigg(\int\limits_{[0,t]\times B_1(0,a)} q^{l+1}(s,x)\,ds\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}$$

для всех $(t,x)\in R_+\times R^l$.

Обозначим

$$I(q_n)=\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}(\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)}q_n(T-t,x(t))\,dt.$$

Используя формулу Ито и соотношения 1)—3), имеем

$$E(I(q_n))\leqslant\frac{1}{c_1}E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}\Bigg(-\frac{\partial z_n(T-t,x(t))}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\sigma^{(1)ij}(t,x(t),y(t))\times$$

$$\times\frac{\partial^2 z_n(T-t,x(t))}{\partial x^i\partial x^j}\Bigg)dt\Bigg)=\frac{1}{c_1}E\Big(z_n(T-(T\wedge\tau^a),x(T\wedge\tau^a))-z_n(T,x(0))-$$

$$-\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial z_n(T-t,x(t))}{\partial x^i}\,g^{(1)ij}(t,x(t),y(t))dW^j(t)-$$

$$- \int\limits_0^{T\wedge\tau^a} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial z_n(T-t,x(t))}{\partial x^i} f^{(1)i}(t,x(t),y(t))\,dt\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant c_3(a,T,l,d) \sup_{0\leqslant t\leqslant T,\ x\in B_1(0,a)} |z_n(t,x)| \leqslant c_3(a,T,l,d) \sup_{0\leqslant t\leqslant T,\ x\in B_1(0,a)} |z(t,x)| \leqslant$$

$$\leqslant c_4(a,T,l,d)\Bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} q^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}. \qquad (2.24)$$

Пусть $q_n(T-t,x) = r_n(t,x)$, $q(T-t,x) = r(t,x)$. Применяя неравенство (2.24) и лемму Фату, получаем соотношения

$$c_4\Bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)} =$$

$$= c_4\Bigg(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)} q^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)} \geqslant$$

$$\geqslant E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} \liminf_{n\to\infty} q_n(T-t,x(t))\,dt\Bigg) \geqslant$$

$$\geqslant E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} q(T-t,x(t))\,dt\Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a} (\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)} r(t,x(t))\,dt\Bigg). \qquad (2.25)$$

Последнее соотношение выполняется для всех неотрицательных непрерывных ограниченных функций $r(t,x)$. Используя теорему о монотонных классах (предложение 1.16), заключаем, что неравенство (2.25) верно и для неотрицательных измеримых по Борелю ограниченных функций $r(t,x)$. Приближая функцию $r(t,x)$ последовательностью функций $r\wedge n$, $n \geqslant 1$, получаем неравенство (2.25) для измеримой по Борелю неотрицательной функции $r(t,x)$.

Пусть $\psi(t,x,y)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям леммы 2.3, тогда, применяя уже доказанное утверждение к функции $r(t,x)=\sup\limits_{y\in B_2(0,a)}\psi(t,x,y)$, получаем неравенство

$$E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}(\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)}\psi(t,x(t),y(t))\,dt\biggr)\leqslant$$

$$\leqslant E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}(\det\sigma^{(1)}(t,x(t),y(t)))^{1/(l+1)}\sup_{y\in B_2(0,a)}\psi(t,x(t),y)\,dt\biggr)\leqslant$$

$$\leqslant c(a,T,l,d)\biggl(\int\limits_{[0,T]\times B_1(0,a)}\sup_{y\in B_2(0,a)}\psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\biggr)^{1/(l+1)}.$$

Лемма 2.3 доказана.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.3 и пусть $\psi(t,x,y)$ — неотрицательная измеримая по Борелю непрерывная по y при каждых фиксированных $(t,x)\in R_+\times R^l$ функция. Тогда для любых $T\in R_+$ и $a\in R_+$ существует постоянная $c(a,T,l,d)$ такая, что для любого $\epsilon>0$ и для любого замкнутого множества $H\supset\hat H$ справедливо неравенство*

$$E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\tau^a}1_{(H)^c_\epsilon}(t,x(t))\psi(t,x(t),y(t))\,dt\biggr)\leqslant c(a,T,l,d)\times$$

$$\times\biggl(\int\limits_{\mathcal A}\sup_{y\in B_2(0,a)}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\sup_{y\in B_2(0,a)}\psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\biggr)^{1/(l+1)},$$

где $\tau^a=\inf\{t|\ \|x(t)\|\vee\|y(t)\|>a\}$, $\mathcal A=([0,T]\times B_1(0,a))\cap(H)^c_\epsilon$.

Действительно, измеримость по Борелю функции $(t,x)\to$ $\to 1_{(H)^c_\epsilon}(t,x)\sup\limits_{y\in B_2(0,a)}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1/(l+1)}$, $(t,x)\in[0,T]\times B_1(0,a)$, вытекает из определения множества $\hat H$. Теперь для доказательства следствия 2.1 достаточно применить лемму 2.3 к функции

$\psi_1(t,x,y) = 1_{(H)^c_\epsilon}(t,x)(\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1/(l+1)} \sup\limits_{y\in B_2(0,a)} \psi(t,x,y)$ (считаем, что $\psi_1(t,x,y)=0$, если $1_{(H)^c_\epsilon}(t,x)=0$).

Для каждого $n\in N$ построим матрицы f_n, $\sigma_n = T\Lambda_n T^\top$, где

$$f_n(t,X) = \mathrm{col}(f_n^1(t,X),\dots,f_n^d(t,X)), \quad f_n^i(t,X) = (f^i(t,X)\vee(-n))\wedge n,$$

$$\Lambda_n = \mathrm{diag}((\lambda_1+1/n)\wedge n,\dots,(\lambda_d+1/n)\wedge n),$$

$$g_n = T\,\mathrm{diag}(((\lambda_1+1/n)\wedge n)^{1/2},\dots,((\lambda_d+1/n)\wedge n)^{1/2}).$$

Матрицы g_n и f_n разобьем на подматрицы $g_n^{(1)}$, $g_n^{(2)}$, $f_n^{(1)}$, $f_n^{(2)}$ так же, как матрицы g и f были разбиты на подматрицы $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$. Для каждого натурального n существует постоянная $\alpha_n>0$ такая, что $\det g_n g_n^\top = \det\sigma_n \geqslant \alpha_n$, $\det g_n^{(1)} {g_n^{(1)}}^\top = \det\sigma_n^{(1)}\geqslant\alpha_n$ для всех $(t,X)\in R_+\times R^d$, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t,X) = f(t,X)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(t,X)=\sigma(t,X)$ в каждой точке $(t,X)\in R_+\times R^d$.

Следствие 2.2. *Пусть:* $a\in R_+$, $T\in R_+$; f *и* g *— измеримые по Борелю локально ограниченные функции;* H *— некоторое замкнутое множество, содержащее множество* $\hat H$; *функция* $\sigma^{(1)}(t,x,y)$ *непрерывна по* y *при каждых фиксированных* $(t,x)\in H^c$; $X_n(t) = (x_n(t),y_n(t))$ *– последовательность слабых решений систем*

$$dx(t) = f_n^{(1)}(t,x(t),y(t))dt + g_n^{(1)}(t,x(t),y(t))dW(t),$$

$$dy(t) = f_n^{(2)}(t,x(t),y(t))dt + g_n^{(2)}(t,x(t),y(t))dW(t);$$

$(\hat X_n(t))$, $n\geqslant 1$, *– последовательность непрерывных процессов, удовлетворяющих условиям:* $P^{(\hat X_n,\hat\tau_n^a)} = P^{(X_n,\tau_n^a)}$ *и* $\hat X_n(s)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\hat X(s) = (\hat x(s),\hat y(s))$ *равномерно на каждом отрезке из* R_+ *п. н.;* $\hat\tau_n^a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\hat\tau^a$ *п. н., где* $\hat\tau_n^a$, $\hat\tau^a$, τ_n^a *– моменты остановки такие, что*

$$\|x_n(t)\|\vee\|y_n(t)\|\leqslant a \quad \forall t\leqslant\tau_n^a, \quad \|\hat x_n(t)\|\vee\|\hat y_n(t)\|\leqslant a \quad \forall t\leqslant\hat\tau_n^a,$$

$$\|\hat x(t)\|\vee\|\hat y(t)\|\leqslant a \quad \forall t\leqslant\hat\tau^a.$$

Тогда для любого $\epsilon>0$ *и любой неотрицательной измеримой по Борелю непрерывной по* y *функции* $\psi(t,x,y)$ *выполняется неравенство*

$$E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\hat\tau^a} 1_{(H)^c_\epsilon}(t,\hat x(t))\psi(t,\hat x(t),\hat y(t))dt\Bigg)\leqslant c(a,T,l,d)\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathcal{B}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y\in B_2(0,a)} \psi^{l+1}(t,x,y)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}, \qquad (2.26)$$

где постоянная $c(a,T,l,d)$ *такая же, как в лемме* 2.3, $\mathcal{B} = ([0,T]\times \times B_1(0,a)) \cap (H)^c_{\epsilon/2}$.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. Используя непрерывность по y функций $\det \sigma_n^{(1)}(t,x,y)$ при каждых фиксированных $(t,x) \in H^c$ и соотношение $\det\sigma_n^{(1)}(t,x,y) \geqslant \det\sigma^{(1)}(t,x,y)$, справедливое при всех $(t,x,y) \in [0,T]\times B_1(0,a)\times B_2(0,a)$ и при всех достаточно больших n, из следствия 2.1 для любой неотрицательной непрерывной ограниченной функции $r(t,x)$ имеем неравенство

$$E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n^a} 1_{(H)^c_{\epsilon/2}}(t,x_n(t))r(t,x_n(t))\,dt\Bigg) \leqslant c(a,T,l,d)\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathcal{B}} (\sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma_n^{(1)}(t,x,y))^{-1}) r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}. \qquad (2.27)$$

Применяя неравенство (2.27), лемму Фату, неравенство $1_{(H)^c_{\epsilon/2}}(t,\hat{x}_n(t)) \geqslant 1_{(H)^c_{\epsilon}}(t,\hat{x}(t))$, которое выполняется для всех n, начиная с некоторого номера, и всех $t\in[0,T]$, имеем

$$c(a,T,l,d)\Bigg(\int\limits_{\mathcal{B}} (\sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}) r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{n\to\infty} c(a,T,l,d)\Bigg(\int\limits_{\mathcal{B}} (\sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma_n^{(1)}(t,x,y))^{-1}) r^{l+1}(t,x)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n^a} 1_{(H)^c_{\epsilon/2}}(t,x_n(t))r(t,x_n(t))\,dt\Bigg) =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_0^{T\wedge\hat{\tau}_n^a} 1_{(H)^c_{\epsilon/2}}(t,\hat{x}_n(t))r(t,\hat{x}_n(t))\,dt\Bigg) \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{n\to\infty} E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat\tau^a} 1_{(H)^c_\epsilon}(t,\hat x(t)) r(t,\hat x_n(t))\,dt \biggr) \geqslant$$

$$\geqslant E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat\tau^a} 1_{(H)^c_\epsilon}(t,\hat x(t)) \liminf_{n\to\infty} r(t,\hat x_n(t))\,dt \biggr) =$$

$$= E\biggl(\int\limits_0^{T\wedge\hat\tau^a} 1_{(H)^c_\epsilon}(t,\hat x(t)) r(t,\hat x(t))\,dt \biggr).$$

Из теоремы о монотонных классах следует, что последнее неравенство верно для произвольных измеримых по Борелю неотрицательных функций $r(t,x)$. Применяя это неравенство к функции $r(t,x) = \sup\limits_{y\in B_2(0,a)} \psi(t,x,y)$, так же как и при доказательстве леммы 2.3, получаем требуемое неравенство (2.26).

Лемма 2.4. *Пусть* $f(t,x,y)$ *– вещественная измеримая по Борелю непрерывная по* y *локально ограниченная функция;* $f_n(t,x,y) = f(t,x,y) * J_n(t,x)$, $n \geqslant 1$. *Тогда для любых* $a \in R_+$, $T \in R_+$, $\gamma > 0$ *и любого замкнутого множества* $H \supset \hat H$ *имеет место сходимость*

$$\int\limits_{([0,T]\times B_1(0,a))\bigcap (H)^c_\gamma} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \times$$

$$\times \sup_{y\in B_2(0,a)} |f_n(t,x,y) - f(t,x,y)|^{l+1}\,dt\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Возьмем $\epsilon > 0$, $a \in R_+$, $T \in R_+$. Пусть $\tilde D = ([0,T]\times B_1(0,a))\bigcap (H)^c_\gamma$, $D_1 = ([-1,T+1]\times B_1(0,a+1))\bigcap (H)^c_\gamma$, тогда $\int_{D_1} \sup\limits_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\,dt\,dx < \infty$. Существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что для любого множества $E \subset D_1$, $\mu(E) \leqslant \delta(\epsilon)$ (μ – мера Лебега) выполняется неравенство

$$\int\limits_E \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\,dt\,dx \leqslant \epsilon^{l+1}. \qquad (2.28)$$

По теореме Скорца — Драгони (предложение 1.47) существует замкнутое множество

$$K(a, T, \delta(\epsilon)) \subset [-1, T+1] \times B_1(0, a+1)$$

такое, что сужение функции f на $K \times B_2(0, a+1)$ непрерывно и

$$\mu(([-1, T+1] \times B_1(0, a+1)) \setminus K) \leqslant \delta(\epsilon).$$

По теореме Кантора найдется $\nu = \nu(\epsilon, a, T)$ такое, что для любых

$$(t_1, x_1, y_1), (t_2, x_2, y_2) \in K \times B_2(0, a+1), \quad |t_2 - t_1| \leqslant \nu,$$

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \nu, \quad \|y_2 - y_1\| \leqslant \nu,$$

выполняется неравенство $|f(t_1, x_1, y_1) - f(t_2, x_2, y_2)| \leqslant \epsilon$. Отсюда для любых фиксированных τ, z, $|\tau| \leqslant 1$, $\|z\| \leqslant 1$, для любых

$$(t, x) \in K_1 = \{(t, x) | t = t_1 + \tau, x = x_1 + z, (t_1, x_1) \in K\}$$

справедливо неравенство

$$\sup_{y_1, y_2 \in B_2(0,a),\ \|y_1 - y_2\| \leqslant \nu} |f(t-\tau, x-z, y_1) - f(t-\tau, x-z, y_2)| \leqslant \epsilon. \quad (2.29)$$

Теперь из (2.28), (2.29) вытекает, что для всех τ, z, $|\tau| \leqslant 1$, $\|z\| \leqslant 1$,

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y))^{-1} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B_2(0,a) \\ \|y_1 - y_2\| \leqslant \nu}} |f(t-\tau, x-z, y_1) -$$

$$- f(t-\tau, x-z, y_2)|^{l+1} \, dt \, dx = \int\limits_{\tilde{D} \bigcap K_1} \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y))^{-1} \times$$

$$\times \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B_2(0,a) \\ \|y_1 - y_2\| \leqslant \nu}} |f(t-\tau, x-z, y_1) - f(t-\tau, x-z, y_2)|^{l+1} \, dt \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{D} \bigcap K_1^c} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in B_2(0,a) \\ \|y_1 - y_2\| \leqslant \nu}} |f(t-\tau, x-z, y_1) - f(t-\tau, x-z, y_2)|^{l+1} \times$$

$$\times \sup_{y \in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y))^{-1} \, dt \, dx \leqslant C \epsilon^{l+1}, \quad (2.30)$$

где C — постоянная, независящая от (τ, z). Используя неравенство (2.30) и обобщенное неравенство Минковского (предложение 1.15), имеем

$$\Bigg(\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\times$$

$$\times \sup_{\substack{y_1,y_2\in B_2(0,a)\\ \|y_1-y_2\|\leqslant\nu}} |f_n(t,x,y_1)-f_n(t,x,y_2)|^{l+1}\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\Bigg(\int\limits_{\tilde{D}} dt\,dx\Bigg(\int\limits_{\substack{|\tau|\leqslant 1/n\\ \|z\|\leqslant 1/n}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1/(l+1)}\times$$

$$\times \sup_{\substack{y_1,y_2\in B_2(0,a)\\ \|y_1-y_2\|\leqslant\nu}} |f(t-\tau,x-z,y_1)-f(t-\tau,x-z,y_2)|J_n(\tau,z)\,d\tau\,dz\Bigg)^{l+1}\Bigg)^{1/(l+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\substack{|\tau|\leqslant 1/n\\ \|z\|\leqslant 1/n}} d\tau\,dz\Bigg(\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\times$$

$$\times \sup_{\substack{y_1,y_2\in B_2(0,a)\\ \|y_1-y_2\|\leqslant\nu}} |f(t-\tau,x-z,y_1)-f(t-\tau,x-z,y_2)|^{l+1}J_n^{l+1}(\tau,z)\,dt\,dx\Bigg)^{1/(l+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\substack{|\tau|\leqslant 1/n\\ \|z\|\leqslant 1/n}} C^{1/(l+1)}\epsilon J_n(\tau,z)\,d\tau\,dz\leqslant C_1\epsilon. \tag{2.31}$$

Для каждого $y\in B_2(0,a)$ имеет место соотношение

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}|f_n(t,x,y)-f(t,x,y)|^{l+1}\,dt\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Пусть $Y=\{y_k\}$ – конечная $\nu(\epsilon,a,T)$-сеть для $B_2(0,a)$. Существует $n_0(\epsilon)$ такое, что для всех $n\geqslant n_0(\epsilon)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det\sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1}\sup_{y_k\in Y}|f_n(t,x,y_k)-f(t,x,y_k)|^{l+1}\,dt\,dx\leqslant\epsilon^{l+1}. \tag{2.32}$$

Используя неравенства (2.30)—(2.32) для всех $n \geqslant n_0(\epsilon)$, получаем соотношения

$$\int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y\in B_2(0,a)} |f_n(t,x,y) - f(t,x,y)|^{l+1}\, dt\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y\in B_2(0,a)\\ y_k\in Y\\ \|y-y_k\|\leqslant\nu}} |f_n(t,x,y) - f_n(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{y_k\in Y} |f_n(t,x,y_k) - f(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{D}} \sup_{y\in B_2(0,a)} (\det \sigma^{(1)}(t,x,y))^{-1} \sup_{\substack{y\in B_2(0,a)\\ y_k\in Y\\ \|y-y_k\|\leqslant\nu}} |f(t,x,y) - f(t,x,y_k)|^{l+1}\, dt\, dx \leqslant$$

$\leqslant C_2\epsilon^{l+1}$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5 (теорема Крылова [39]). *Пусть функции $f(t,X)$ и $g(t,X)$ — измеримы по Борелю и ограничены; существует постоянная $\alpha > 0$, что $\det(g(t,X)g^\top(t,X)) \geqslant \alpha$ при всех $(t,X) \in R_+ \times R^d$. Тогда для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ уравнение (2.21) имеет слабое решение с начальным распределением ν.*

Доказательство. Пусть $f_k(t,X) = f(t,X) * J_k(t,X)$, $g_k(t,X) = g(t,X) * J_k(t,X)$, $k \in N$. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ возьмем $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$ и d-мерный $(\mathcal{F}_0)$-измеримый случайный вектор η с $P(\eta \in A) = \nu(A)$ $\forall A \in \beta(R^d)$. При каждом $k \in N$ функции f_k и g_k бесконечно дифференцируемы и ограничены, следовательно, при каждом $k \in N$ по теореме 2.1 ССДУ

$$X(t) = \eta + \int\limits_0^t f_k(s, X(s))ds + \int\limits_0^t g_k(s, X(s))dW(s), \tag{2.33}$$

имеет решение $X_k(t), t \in R_+$. Из предложения 1.18 следует, что $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_k P\{\|X_k(0)\| > N\} = 0$. Так как $\sup_k E(\|X_k(t) - X_k(s)\|^4) \leqslant$

$\leqslant c|t-s|^2$, то согласно предложениям 1.31, 1.32 последовательность $X_k(t)$ плотна в $C([0,\infty[, R^d)$. Применив теорему Скорохода (предложение 1.23), получаем подпоследовательность k_l, вероятностное пространство $(\hat\Omega, \hat{\mathfrak{F}}, \hat P)$ и непрерывные процессы $\hat X, \hat X_{k_l}, l \geqslant 1$, такие, что $P^{\hat X_{k_l}} = P^{X_{k_l}}$ и $\hat X_{k_l}$ сходится к $\hat X(t)$ равномерно на каждом отрезке из $[0,\infty[$ при $l\to\infty$ п. н. (для простоты k_l снова обозначаем через k).

Возьмем произвольным образом: $s,t\in R_+$, $s\leqslant t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h: R^d\to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(C(R_+,R^d)))$-измеримую функцию $q: C(R_+,R^d)\to R$. Применяя формулу Ито, из (2.33) имеем

$$E\Bigg(\Bigg(h(X_k(t))-h(X_k(s))-\int\limits_s^t\Bigg(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 h(X_k(\tau))}{\partial X^2}g_k(\tau,X_k(\tau))g_k^\top(\tau,X_k(\tau)))+$$

$$+\frac{\partial h(X_k(\tau))}{\partial X}f_k(\tau,X_k(\tau))\Bigg)d\tau\Bigg)q(X_k)\Bigg)=0. \qquad (2.34)$$

Используя следствие 2.1 и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, видим, что

$$E\Bigg(\Bigg\|\Big(\int\limits_s^t\frac{\partial h(\hat X_k(\tau))}{\partial X}\big(f_k(\tau,\hat X_k(\tau))-f(\tau,\hat X_k(\tau))\big)d\tau\Big)q(\hat X_k)\Bigg\|\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_{[0,T]\times B(0,a)}\|f_k(\tau,X)-f(\tau,X)\|d\tau dX\Bigg)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (2.35)$$

Аналогично,

$$E\Bigg(\Bigg\|\Big(\int\limits_s^t\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial^2 h(\hat X_k(\tau))}{\partial X^2}(g_k(\tau,\hat X_k(\tau))g_k^\top(\tau,\hat X_k(\tau))-$$

$$-g(\tau,\hat X_k(\tau))g^\top(\tau,\hat X_k(\tau)))\Big)d\tau\Big)q(\hat X_k)\Bigg\|\Bigg)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (2.36)$$

Из соотношений (2.34)—(2.36) вытекает, что процесс

$$h(\hat X(t))-h(\hat X(0))-\int\limits_0^t\Big(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(h''_{X^2}(\tau,\hat X(\tau))gg^\top\big)+h'_X(\tau,\hat X(\tau))f(\tau,\hat X(\tau))\Big)d\tau$$

является $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$-мартингалом, где $\hat{\mathfrak{F}}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \sigma(\hat{X}(\tau) | \tau \leqslant t+\varepsilon)$. Согласно предложению 1.37 $\hat{X}(t)$ — слабое решение уравнения (2.21).

Теорема 2.2 (о существовании слабых решений). *Пусть функции $f(t,X)$ и $g(t,X)$ — измеримы по Борелю и локально ограничены; компоненты функций $f(t,X)$, $\sigma(t,X) = g(t,X)g^\top(t,X)$ удовлетворяют условию* C). *Тогда для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ уравнение* (2.21) *имеет слабое решение с начальным распределением ν.*

Доказательство. По теореме Крылова (лемма 2.5) для любого $n \in N$ уравнение

$$X_n(t) = X_n(0) + \int\limits_0^t f_n(\tau, X_n(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t g_n(\tau, X_n(\tau))\, dW_n(\tau), \qquad (2.37)$$

где f_n, g_n — функции, построенные перед следствием 2.2, имеет слабое решение $(\Omega_n,\ \mathfrak{F}_n,\ P_n,\ \mathfrak{F}_{nt},\ W_n(t),\ X_n(t),\ t \in R_+)$ с начальным распределением ν.

Возьмем последовательность $a'_m \underset{m\to\infty}{\uparrow} \infty$, определим $\tau_n^m = \inf\{t |\ \|X_n(t)\| > a'_m\}$, $X_n^m(t) = X_n(t \wedge \tau_n^m)$ и рассмотрим двойную последовательность

$$\begin{pmatrix} (X_1^1, \tau_1^1) & (X_1^2, \tau_1^2) & \dots & (X_1^m, \tau_1^m) & \dots \\ (X_2^1, \tau_2^1) & (X_2^2, \tau_2^2) & \dots & (X_2^m, \tau_2^m) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (X_n^1, \tau_n^1) & (X_n^2, \tau_n^2) & \dots & (X_n^m, \tau_n^m) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Psi_k = ((X_k^1, \tau_k^1), (X_k^2, \tau_k^2), \dots, (X_k^m, \tau_k^m), \dots)$, $k \geqslant 1$.

Введем метрику ρ_1 в $(C([0,+\infty), R^d), [0,+\infty])$ и метрику ρ_2 в

$$((C([0,+\infty), R^d), [0,+\infty]) \times \dots \times (C([0,+\infty), R^d), [0,+\infty]) \times \dots)$$

следующим образом:

$$\rho_1((z,\tau),(z_1,\tau_1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\sup_{0\leqslant t\leqslant n} \|z(t) - z_1(t)\| \wedge 1) + \left| \frac{\tau}{1+\tau} - \frac{\tau_1}{1+\tau_1} \right|,$$

$$\rho_2(((z^1,\tau^1),\ldots,(z^m,\tau^m),\ldots),((z_1^1,\tau_1^1),\ldots,(z_1^m,\tau_1^m),\ldots)) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}\rho_1((z^m,\tau^m),(z_1^m,\tau_1^m))$$

(считаем $\frac{\tau}{1+\tau}=1$, если $\tau=\infty$).

Для любого $T>0$ и любого фиксированного $m\in N$ существует постоянная $M(m,T)$ такая, что выполняется неравенство $\sup\limits_n E(\|X_n^m(t)-X_n^m(s)\|^4)\leqslant M(m,T)|t-s|^2$ для любых $s,t\in[0,T]$. Кроме того, из предложения 1.18 следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n P\{\|x_n(0)\|>N\}=0. \tag{2.38}$$

Согласно предложениям 1.31, 1.32, последовательность (X_n^m,τ_n^m), $n\geqslant 1$, плотна в $((C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty]),\rho_1)$ при каждом $m\in N$. Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.6. *Последовательность* Ψ_n, $n\geqslant 1$, *плотна в пространстве*

$$(((C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\ldots\times(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\ldots),\rho_2).$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon>0$. Для любого натурального m существует компакт $K_m\in(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])$ такой, что $P^{(X_n^m,\tau_n^m)}(K_m)\geqslant 1-\epsilon/2^m$ $\forall n\in N$. Пусть $K=K_1\times\ldots\times K_m\times\ldots$ Докажем, что K – компакт в пространстве

$$((C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\ldots\times(C([0,+\infty),R^d),[0,+\infty])\times\ldots).$$

Для любого $\delta>0$ возьмем $m=m(\delta)$ такое, что $1/2^m<\delta/2$. Для каждого K_j, $j=1,\ldots,m$, существует конечная $(\delta/2)$-сеть $\{s_1^j,\ldots,s_{n_j}^j\}$. Для K_j, $j\geqslant m+1$, выберем произвольный элемент $s^j\in K_j$.

Пусть $S=\{(s_{k_1}^1,\ldots,s_{k_m}^m,s^{m+1},s^{m+2},\ldots)|\ k_1\in\in\{1,\ldots,n_1\},\ \ldots,\ k_m\in\{1,\ldots,n_m\}\}$. Для любого $\tilde{k}\in K$ существует $\tilde{s}\in S$ такое, что

$$\rho_2(\tilde{k},\tilde{s})\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\frac{\delta}{2}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

Следовательно, S является конечной δ-сетью для K. Множество K, очевидно, замкнуто. Таким образом, K – компакт. Так как

$$P^{\Psi_n}(K) \geqslant 1 - \epsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1 - \epsilon,$$

то лемма 2.6 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.2. По теореме Прохорова (предложение 1.20) из последовательности P^{Ψ_k}, $k \geqslant 1$, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначаем P^{Ψ_k}. Для последовательности P^{Ψ_k}, $k \geqslant 1$, выполнены условия теоремы Скорохода (предложение 1.23). Из ее доказательства следует, что можно выбрать подпоследовательность k_n последовательности k (для упрощения обозначений вместо k_n будем писать n) и можно построить процессы $\varepsilon_n = ((z_n^1, \varrho_n^1), \ldots, (z_n^m, \varrho_n^m), \ldots)$ и $\varepsilon = ((z^1, \varrho^1), \ldots, (z^m, \varrho^m), \ldots)$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ так, что процессы $z_n^m(t)$, $z^m(t)$ являются непрерывными, $P^{\varepsilon_n} = P^{\Psi_n}$, $z_n^m(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z^m(t)$ равномерно на каждом компакте из R_+ п. н. и $\varrho_n^m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varrho^m$ п. н. Кроме того, $z^m(t) = z^{m+1}(t)$ при $t < \varrho^m$, $\varrho^m \leqslant \varrho^{m+1}$, $z^m(\varrho^m) \in \partial B(0, a_m)$ п. н. Пусть $e = \lim\limits_{m\to\infty} \varrho^m$. Определим процесс $z(t)$ следующим образом: $z(t) = z^m(t)$ для $t \leqslant \varrho^m$, $\varrho^m < \infty$, $z(t) = z^m(t)$ для $t < \varrho^m$, $\varrho^m = \infty$, $z(t) = 0$ при $t \geqslant e$. Процесс $z(t)$ удовлетворяет условию $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|z(t)\| = \infty$ для $e < \infty$. Обозначим через $\sigma_{t+\epsilon}^m$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $z^m(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t + \epsilon$. Пусть $\mathfrak{F}_{m,t} = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma_{t+\epsilon}^m$, $\mathfrak{F}_t = \bigvee\limits_m \mathfrak{F}_{m,t}$. Согласно предложению 1.33, можно выбрать последовательность $(a_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $a_m \leqslant a_m^{'}$ $\forall m \geqslant 1$, таким образом, что при каждом $m \geqslant 1$ функция $\varepsilon \to \eta^m(\varepsilon) = \inf\{t | \|z(t)\| \geqslant a_m + \varepsilon\}$ непрерывна в точке $\varepsilon = 0$ п. н., и если $\tilde{\tau}_n^m = \inf\{t | \|X_n(t)\| \geqslant a_m\}$, $\eta_n^m = \inf\{t | \|z_n^m(t)\| \geqslant a_m\}$, то при каждых $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ $P^{(X_n^m, \tilde{\tau}_n^m)} = P^{(z_n^m, \eta_n^m)}$, $\eta_n^m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta^m = \eta^m(0)$ п. н. В дальнейшем рассматриваем такую последовательность a_m.

Зафиксируем $m \in N, M \in N$ и возьмем произвольно: $s, t \in R_+$, $s \leqslant t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h: R^d \to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(C(R_+, R^d)))$-измеримую функцию $q: C(R_+, R^d) \to R$.

Из соотношения (2.37) с учетом формулы Ито вытекает равенство

$$E_n\Bigg(\bigg(h(X_n^m(t)) - h(X_n^m(s)) - \int\limits_{s\wedge\tilde{\tau}_n^m}^{t\wedge\tilde{\tau}_n^m}\bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_n^{ij}(\tau, X_n^m(\tau))h_{x_ix_j}(X_n^m(\tau)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} f_n^i(\tau, X_n^m(\tau))h_{x_i}(X_n^m(\tau))\bigg)\,d\tau\bigg)q(X_n^M)\Bigg) = 0, \quad h_{x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}. \quad (2.39)$$

Зафиксируем компоненту $f^i(t,X)$ вектора f с номером i. Используя условие C), выберем строки с номерами $\beta_1,\ldots,\beta_l$ матрицы g и множество H так, что функция $f^i(t,X)$ непрерывна по переменным $\hat{\hat{x}} = (x_{\beta_l+1},\ldots,x_{\beta_d})$ при каждых фиксированных $(t,\hat{x}) = (t, x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_l})$, множество $\{(t,x_1,\ldots,x_d)|\ (t,\hat{x})\in H\}$ содержится во множестве точек непрерывности функции $f^i(t,X)$ и отображение $\sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t,x_1,\ldots,x_d)$ непрерывно по переменной $\hat{\hat{x}}$ при каждых фиксированных $(t,\hat{x})\in H^c$ (не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = 1,\ \ldots,\ \beta_l = l$). Каждый из процессов $X_n,\ X_n^m,\ z,\ z_n^m,\ z^m$ разделится на два процесса: $X_n = (\hat{X}_n, \hat{\hat{X}}_n),\ X_n^m = (\hat{X}_n^m, \hat{\hat{X}}_n^m),\ z = (\hat{z},\hat{\hat{z}})$, $z_n^m = (\hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m),\ z^m = (\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m)$. Обозначим $(\sigma_n)_{1,\ldots,l}(t,x_1,\ldots,x_d) = a_n(t,\hat{x},\hat{\hat{x}}),\ \sigma_{1,\ldots,l}(t,x_1,\ldots,x_d) = a(t,\hat{x},\hat{\hat{x}})$.

Возьмем последовательность $\epsilon_k\downarrow 0$ при $k\to\infty$. Докажем, что для любого $k\geqslant 1$ верно следующее соотношение

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}_n^m(\tau)) f_n^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\bigg)q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) = E\Bigg(\bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}^m(\tau))\times$$

$$\times f^i(\tau,\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))\,d\tau\bigg)q(\hat{z}^M,\hat{\hat{z}}^M)\Bigg) \equiv J. \qquad (2.40)$$

Из локальной ограниченности функции f^i и построения f_n^i следует, что для доказательства соотношения (2.40) достаточно доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}_n^m(\tau)) f^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) = J. \tag{2.41}$$

Пусть $\tilde{f}_r^i(t,\hat{x},\hat{\hat{x}}) = f^i(t,\hat{x},\hat{\hat{x}}) * J_r(t,\hat{x})$, $r \geqslant 1$. Используя следствие 2.1 и лемму 2.4, получаем соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} E\Bigg|\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}_n^m(\tau))(f^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) -$$

$$- \tilde{f}_r^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau)))h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C \lim_{r\to\infty}\Bigg(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,a_m))\bigcap(H)^c_{\epsilon_k}} \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\leqslant a_m} (\det a(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}}))^{-1}\times$$

$$\times \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\leqslant a_m} |f^i(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}}) - \tilde{f}_r^i(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}})|^{l+1}\,d\tau\,d\hat{x}\Bigg)^{1/(l+1)} = 0. \tag{2.42}$$

Теперь, учитывая (2.42), для доказательства равенства (2.41) остается показать, что

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}_n^m(\tau)) \tilde{f}_r^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) = J.$$

Действительно,

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}_n^m(\tau)) \tilde{f}_r^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\Big[\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m_n(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m_n(\tau),\hat{\hat z}^m_n(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau),\hat{\hat z}^m_n(\tau))q(\hat z^M_n,\hat{\hat z}^M_n)-$$

$$-1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{s\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m_n(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m_n(\tau),\hat{\hat z}^m_n(\tau))h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau),\hat{\hat z}^m_n(\tau))q(\hat z^M_n,\hat{\hat z}^M_n)-$$

$$-1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{t\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m_n} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m_n(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m_n(\tau),\hat{\hat z}^m_n(\tau))h_{x_i}(\hat z^m_n(\tau),\hat{\hat z}^m_n(\tau))q(\hat z^M_n,\hat{\hat z}^M_n)-$$

$$-1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau))(\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))-f^i(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau)))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{s\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{t\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau))\tilde f^i_r(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\,d\tau\Big]+$$

$$+J = \lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6)+J.$$

Оценим каждое слагаемое: $\lim\limits_{r\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(|I_2|+|I_3|+|I_5|+|I_6|)=0$, так как $s\wedge\eta^m_n \underset{n\to\infty}{\to} s\wedge\eta^m$ п. н., $t\wedge\eta^m_n \underset{n\to\infty}{\to} t\wedge\eta^m$ п. н.; по лемме 2.4 и следствию 2.2

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty}|I_4| \leqslant C_2 \lim_{r\to\infty}\Bigg(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,a_m))\bigcap(H)^c_{\epsilon_k/2}} \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\leqslant a_m} (\det a(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}}))^{-1}\times$$

$$\times \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\leqslant a_m} \left|f^i(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}}) - \tilde{f}^i_r(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}})\right|^{l+1} d\tau\, d\hat{x}\Bigg)^{1/(l+1)} = 0.$$

Покажем, что

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty}|I_1| = 0. \tag{2.43}$$

Для каждого натурального k построим последовательность непрерывных функций $\varphi_j : R_+ \times R^l \to [0,1]$ такую, что $\varphi_j \leqslant 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}$, $\varphi_j \underset{j\to\infty}{\uparrow} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}$. Согласно следствиям 2.1, 2.2,

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} E\Bigg|\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}^m_n(\tau)) - \varphi_j(\tau,\hat{z}^m_n(\tau)))\times$$

$$\times\tilde{f}^i_r(\tau,\hat{z}^m_n(\tau),\hat{\hat{z}}^m_n(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m_n(\tau),\hat{\hat{z}}^m_n(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}^M_n,\hat{\hat{z}}^M_n)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \lim_{j\to\infty}\limsup_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}^m_n(\tau))\times$$

$$\times(1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}^m_n(\tau)) - \varphi_j(\tau,\hat{z}^m_n(\tau)))\, d\tau\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \lim_{j\to\infty}\Bigg(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,a_m))\bigcap(H)^c_{\epsilon_k}} \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\leqslant a_m} ((\det a(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}}))^{-1}\times$$

$$\times(1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{x}) - \varphi_j(\tau,\hat{x}))^{l+1})\, d\tau\, d\hat{x}\Bigg)^{1/(l+1)} = 0, \tag{2.44}$$

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{r\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}^m(\tau)) - \varphi_j(\tau,\hat{z}^m(\tau)))\tilde{f}^i_r(\tau,\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}^M,\hat{\hat{z}}^M)\Bigg) = 0. \tag{2.45}$$

Так как

$$(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)), \quad (\hat{z}_n^M(\tau), \hat{\hat{z}}_n^M(\tau)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\hat{z}^M(\tau), \hat{\hat{z}}^M(\tau))$$

равномерно по $\tau \in [0,t]$ с вероятностью 1, то

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (\varphi_j(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) \tilde{f}_r^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) q(\hat{z}_n^M, \hat{\hat{z}}_n^M) - \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \tilde{f}_r^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M)) \, d\tau \Bigg) = 0. \tag{2.46}$$

Из соотношений (2.44)—(2.46) очевидным образом следует (2.43). Равенство (2.41), а значит, и (2.40) доказано.

В каждой точке $(t, \hat{x})$ имеет место сходимость $1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(t, \hat{x}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1_{H^c}(t, \hat{x})$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) f^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) \, d\tau \Bigg) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M) \Bigg) = E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H^c}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \times$$

$$\times f^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) \, d\tau \Bigg) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M) \Bigg).$$

Отсюда и из равенства (2.40) вытекает существование последовательности $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_{k_n}}}(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) f_n^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) \, d\tau \Bigg) q(\hat{z}_n^M, \hat{\hat{z}}_n^M) \Bigg) = E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H^c}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) \times$$

$$\times f^i(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Big)q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Big). \qquad (2.47)$$

Докажем равенство

$$\lim_{n\to\infty}E\Big(\Big(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m}1_{(H)_{\epsilon_{k_n}}}(\tau,\hat z_n^m(\tau))f_n^i(\tau,\hat z_n^m(\tau),\hat{\hat z}_n^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat z_n^m(\tau),\hat{\hat z}_n^m(\tau))\,d\tau\Big)q(\hat z_n^M,\hat{\hat z}_n^M)\Big)=E\Big(\Big(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}1_H(\tau,\hat z^m(\tau))\times$$

$$\times f^i(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Big)q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Big). \qquad (2.48)$$

Полагаем в (2.47) $f\equiv 1, h\equiv 1, q\equiv 1,$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}E\big(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m}1_{(H)^c_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau,\hat z_n^m(\tau))d\tau\big)=E\big(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}1_{H^c}(\tau,\hat z^m(\tau))d\tau\big).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}E\big(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m}1_{(H)\varepsilon_{k_n}}(\tau,\hat z_n^m(\tau))d\tau\big)=E\big(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}1_H(\tau,\hat z^m(\tau))d\tau\big).$$

Существует множество $\Omega_0\subset\Omega,\ P(\Omega\setminus\Omega_0)=0$ такое, что для каждого $\omega\in\Omega_0$ существует множество $S\subset[s\wedge\eta^m,t\wedge\eta^m],\mu([s\wedge\eta^m,t\wedge\eta^m]\setminus S)=$ $=0,$ что для любого $\tau\in S$ выполняется соотношение

$$1_{(H)\varepsilon_{k_n}}(\tau,\hat z_n^m(\tau))\to 1_H(\tau,\hat z^m(\tau))$$

(точнее последнее соотношение выполняется для некоторой подпоследовательности последовательности n, которую мы снова обозначили через n). Тогда для $\forall\omega\in\Omega_0$ и для $\forall\tau\in S$ имеет место сходимость

$$1_{(H)\varepsilon_{k_n}}(\tau,\hat z_n^m(\tau))f_n^i(\tau,\hat z_n^m(\tau),\hat{\hat z}_n^m(\tau))h_{x_i}(\hat z_n^m(\tau),\hat{\hat z}_n^m(\tau))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1_H(\tau,\hat z^m(\tau))f^i(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau)). \qquad (2.49)$$

Действительно, если $(\tau,\hat z^m(\tau))\not\subseteq H,$ то для достаточно больших n $\quad 1_{(H)\varepsilon_{k_n}}(\tau,\hat z_n^m(\tau))=0,\ 1_H(\tau,\hat z^m(\tau))=0.$ Если $(\tau,\hat z^m(\tau))\in H,$

то из непрерывности функции f на $\{(t,x_1,\dots,x_d)|(t,x_1,\dots,x_l)\in$ $\in H\}$ и из построения отображения f_n^i имеем $f_n^i(\tau,\hat z_n^m(\tau),\hat{\hat z}_n^m(\tau))\to$ $\to f^i(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))$. С помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости из (2.49) получаем равенство (2.48).

Учитывая соотношения (2.47), (2.48) и $P^{\Psi_n}=P^{\varepsilon_n}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}E_n\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\tilde\tau_n^m}^{t\wedge\tilde\tau_n^m}f_n^i(\tau,X_n^m(\tau))h_{x_i}(X_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg)q(X_n^M)\Bigg)=$$

$$=E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}f^i(\tau,z^m(\tau))h_{x_i}(z^m(\tau))\,d\tau\Bigg)q(z^M)\Bigg). \qquad (2.50)$$

Аналогичными рассуждениями для каждых фиксированных $i,j\in$ $\in\{1,\dots,d\}$ устанавливается справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty}E_n\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\tilde\tau_n^m}^{t\wedge\tilde\tau_n^m}\sigma_n^{ij}(\tau,X_n^m(\tau))h_{x_ix_j}(X_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg)q(X_n^M)\Bigg)=$$

$$=E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}\sigma^{ij}(\tau,z^m(\tau))h_{x_ix_j}(z^M(\tau))\,d\tau\Bigg)q(z^M)\Bigg). \qquad (2.51)$$

Из соотношений (2.39), (2.50), (2.51) получаем равенство

$$E\Bigg(\Bigg(h(z^m(t))-h(z^m(s))-\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}\Bigg(\frac12\sum_{i,j=1}^d\sigma^{ij}(\tau,z^m(\tau))h_{x_ix_j}(z^m(\tau))+$$

$$+\sum_{i=1}^d f^i(\tau,z^m(\tau))h_{x_i}(z^m(\tau))\Bigg)\,d\tau\Bigg)q(z^M)\Bigg)=0. \qquad (2.52)$$

Из равенства (2.52) с учетом предложения 1.27 следует, что для каждого $m=1,2,\dots$ процесс $h(z(t\wedge\eta^m))-h(z(0))-$

$$-\int\limits_0^{t\wedge\eta^m}\Bigg(\frac12\sum_{i,j=1}^d\sigma^{ij}(\tau,z(\tau))h_{x_ix_j}(z(\tau))+\sum_{i=1}^d f^i(\tau,z(\tau))h_{x_i}(z(\tau))\Bigg)\,d\tau$$

является $(\mathcal F_t)$-мартингалом.

Согласно предложению 1.38, на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ можно определить $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ с $\tilde{W}(0) = 0$ п. н. такое, что с вероятностью 1 для любого $t \in [0, e)$ выполняется равенство

$$z(t) = z(0) + \int_0^t f(\tau, z(\tau))\, d\tau + \int_0^t g(\tau, z(\tau))\, d\tilde{W}(\tau).$$

Следовательно, $(z(t), \tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{W}(t), e)$ – слабое решение уравнения (2.21). Теорема 2.2 доказана.

При доказательстве теоремы было установлено три утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем и которые мы сформулируем в виде трех лемм.

Пусть $\mathcal{P}$ — совокупность всех вероятностей на $(R^d, \beta(R^d))$, а d — метрика Леви — Прохорова на $\mathcal{P}$.

Лемма 2.7. *Пусть: функции* $f(t, X)$ *и* $g(t, X)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены;* $(X_n(t), \Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n, \mathcal{F}_{nt}, W_n(t), e_n)$ *– последовательность слабых решений уравнений*

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t f(\tau, X_n(\tau))\, d\tau + \int_0^t g(\tau, X_n(\tau))\, dW_n(\tau) \qquad (2.53)$$

таких, что $P^{X_n(0)} \in Y$, *где* Y *– компактное множество в* $(\mathcal{P}, d)$; $a_m^{'}$ *– монотонная бесконечно большая последовательность. Тогда из последовательности* P^{Ψ_k}, $k \geqslant 1$, *где* $\Psi_k = ((X_k^1, \tau_k^1), (X_k^2, \tau_k^2), \ldots, (X_k^m, \tau_k^m), \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\tau_n^m = \inf\{t|\ \|X_n(t)\| > a_m^{'}\}$, $X_n^m(t) = X_n(t \wedge \tau_n^m)$, *можно выбрать подпоследовательность* $P^{\Psi_{k_n}}$ *(для упрощения обозначений вместо* k_n *будем писать* n*) и можно построить процессы* $\varepsilon_n = ((z_n^1, \varrho_n^1), \ldots, (z_n^m, \varrho_n^m), \ldots)$ *и* $\varepsilon = ((z^1, \varrho^1), \ldots, (z^m, \varrho^m), \ldots)$ *на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *так, что процессы* $z_n^m(t)$, $z^m(t)$ *являются непрерывными,* $P^{\varepsilon_n} = P^{\Psi_n}$, $z_n^m(t) \underset{n\to\infty}{\to} z^m(t)$ *равномерно на каждом компакте из* R_+ *п. н. и* $\varrho_n^m \underset{n\to\infty}{\to} \varrho^m$ *п. н. Кроме того,* $z^m(t) = z^{m+1}(t)$ *при* $t < \varrho^m$ *и* $\varrho^m \leqslant \varrho^{m+1}$.

Пусть $e = \lim\limits_{m\to\infty} \varrho^m$. Определим процесс $z(t)$ следующим образом: $z(t) = z^m(t)$ для $t \leqslant \varrho^m$, $\varrho^m < \infty$, $z(t) = z^m(t)$ для $t < \varrho^m$, $\varrho^m = \infty$, $z(t) = 0$ при $t \geqslant e$. Процесс $z(t)$ удовлетворяет условию $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|z(t)\| = \infty$ для $e < \infty$. Обозначим через $\sigma^m_{t+\epsilon}$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $z^m(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t+\epsilon$. Пусть $\mathcal{F}_{m,t} = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma^m_{t+\epsilon}$, $\mathcal{F}_t = \bigvee\limits_m \mathcal{F}_{m,t}$. Тогда процесс $z(t)1_{[0,e)}(t)$ $(\mathcal{F}_t)$-согласован и имеет непрерывные траектории при $t < e$.

Лемма 2.8. *Пусть*: *выполнены условия леммы* 2.7; $z(t)$ — *процесс, построенный выше перед формулировкой этой леммы*; z^m_n, X_n — *процессы из предыдущей леммы. Тогда существует последовательность* $a_m \underset{m\to\infty}{\uparrow} \infty$ *такая, что при каждых* $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ *выполняются соотношения* $P^{(X^m_n, \tilde{\tau}^m_n)} = P^{(z^m_n, \eta^m_n)}$ *и* $\eta^m_n \underset{n\to\infty}{\to} \eta^m$ *п. н., где* $\eta^m_n = \inf\{t | \|z^m_n(t)\| \geqslant a_m\}$, $\eta^m = \inf\{t | \|z(t)\| \geqslant a_m\}$, $\tilde{\tau}^m_n = \inf\{t | \|X_n(t)\| \geqslant a_m\}$.

В отличие от доказательства аналогичных утверждений в теореме 2.2 законы распределения процессов $X_n(0)$ принадлежат компакту Y, а не одни и те же, совпадающие с ν. В доказательстве аналогичных утверждений в теореме 2.2 надо сделать лишь одно изменение, связанное с соотношением (2.38). Теперь соотношение (2.38) следует не из предложения 1.18, а из компактности множества Y и предложения 1.20.

Замечание 2.2. Леммы 2.7 и 2.8 справедливы и в том случае, когда выполнены все условия этих лемм с заменой последовательности $(X_n(t), \Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n, \mathcal{F}_{nt}, W_n(t), e_n)$ на последовательность слабых решений уравнений

$$X_n(t) = X_n(0) + \int\limits_0^t f_n(\tau, X_n(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t g_n(\tau, X_n(\tau))\, dW_n(\tau)$$

таких, что $P^{X_n(0)} \in Y$, где Y — компактное множество в $(\mathcal{P}, d)$, а f_n и g_n — функции, построенные перед формулировкой следствия 2.2.

Лемма 2.9. *Пусть*: *выполнены условия леммы* 2.7; *компоненты функций* $f(t, X)$ *и* $\sigma(t, X)$ *удовлетворяют условию* C);

$(z(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, e)$ — *процесс, вероятностное пространство, поток и момент остановки, построенные перед формулировкой леммы* 2.8. *Тогда на расширении* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$ *с потоком* $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ *вероятностного пространства* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *с потоком* $\mathfrak{F}_t$ *можно определить* $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$*-броуновское движение* $\tilde{W}(t)$ *с* $\tilde{W}(0) = 0$ *п. н. такое, что* $(z(t), \tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathfrak{F}}_t, \tilde{W}(t), e)$ *– слабое решение уравнения* (2.21).

Пример 2.1. Применим теорему 2.2 для доказательства существования слабых решений системы

$$dx_1(t) = (r(x_1(t)) + tx_2^2(t))\,dt + r(x_2(t))\,dW_1(t),$$

$$dx_2(t) = (r(x_2(t) + 1))\,dt + x_2(t)\,dW_1(t),$$

где $r(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Функция $\sigma = gg^\top$ непрерывна, поэтому для нее условие C) выполняется. Рассмотрим функцию f. Первая ее компонента $f^1(t, x_1, x_2) = r(x_1) + tx_2^2$ непрерывна по x_2 при каждых фиксированных (t, x_1). Возьмем первую строку матрицы g. Видим, что множество $\hat{H}(1)$ пусто, следовательно, компонента f^1 условию C) удовлетворяет. Вторая компонента $f^2(t, x_1, x_2) = r(x_2 + 1)$ непрерывна по x_1 при каждых фиксированных (t, x_2). Возьмем вторую строку матрицы g и найдем, что $\hat{H}(2) = \{(t, x_2) | x_2 = 0\}$. Множество $\{(t, x_1, 0)\}$, очевидно, содержится во множестве точек непрерывности отображения f^2. Следовательно, для функции f условие C) выполняется. По теореме 2.2 для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ существует слабое решение с начальным распределением ν.

Пример 2.2. Следующий пример показывает, что без предположения о локальной ограниченности коэффициентов системы, теорема 2.2, вообще говоря, не верна:

$$dx_1(t) = dW_1(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$dx_2(t) = \gamma(x_1(t))dt + dW_2(t), \quad x_2(0) = 0.$$

Если функция $\gamma : R \to R_+$ неотрицательна измерима и неинтегрируема по Лебегу в любой окрестности нуля, то система не имеет слабых решений [154].

Замечание 2.3. Пусть: существуют индексы $\beta_1, \ldots, \beta_l$ такие, что функции $h(t, x_1, \ldots, x_d)$ и $\sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d)$ при каждых фиксированных $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ непрерывны по оставшимся компонентам $(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d})$ вектора X; для любого $a \in R_+$ отображение $\sup\limits_{(x_{\beta_{l+1}},\ldots,x_{\beta_d}) \in D_2(0,a)} (\det \sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d))^{-1}$ измеримо по Борелю; $D(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \Big\{(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})\Big|$ для любой открытой окрестности U точки $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$ существует число $a > 0$ такое, что интеграл

$$\int\limits_U \sup_{(x_{\beta_{l+1}},\ldots,x_{\beta_d}) \in D_2(0,a)} (\det \sigma_{\beta_1,\ldots,\beta_l}(t, x_1, \ldots, x_d))^{-1}\, dt\, dx_{\beta_1} \ldots dx_{\beta_l}$$

равен $\infty\Big\}$. Вещественная функция $h(t, x_1, \ldots, x_d)$ удовлетворяет условию С), если множество $\{(t, x_1, \ldots, x_d) | \; (t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) \in D\}$ принадлежит множеству точек непрерывности отображения h.

2.3. Теорема существования β-слабых решений стохастических дифференциальных уравнений

В предыдущем параграфе доказана теорема существования слабых решений уравнения (2.21) с измеримыми по Борелю локально ограниченными функциями $f(t, X)$ и $g(t, X)$ и при предположении, что компоненты функций $f(t, X)$, $\sigma(t, X) = g(t, X)g^\top(t, X)$ удовлетворяют условию С). В данном параграфе рассматривается случай, когда функции f, σ не удовлетворяют этому условию. В этом случае под слабым решением уравнения (2.21) понимаем слабое решение некоторого стохастического дифференциального включения и такое решение называем β-слабым решением уравнения (2.21).

Для векторной функции $f(t, X) = (f^i(t, x_1, \ldots, x_d)), i = 1, \ldots, d$, построим многозначное отображение $F_0(t, X)$ по следующему **правилу** (L). Разобьем множество всех индексов $i = 1, \ldots, d$ на непересекающиеся подмножества $I_f^1, \ldots, I_f^k$ следующим образом: индексы i_1, i_2 отнесем в одно подмножество лишь в том случае, когда функции f^{i_1}, f^{i_2} непрерывны по одним и тем же компонентам вектора X. Зафиксируем $j \in \{1, \ldots, k\}$. Пусть компоненты функции f с индексами из I_f^j непрерывны по переменным $(x_{\beta^j_{m_j+1}}, \ldots, x_{\beta^j_d})$ при каждых фиксированных остальных переменных $(t, x_{\beta^j_1}, \ldots, x_{\beta^j_{m_j}})$. Возьмем строки матрицы g с номерами $\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j$ и, так же как в предыдущем параграфе, построим матрицу $\sigma_{\beta_1^j,\ldots,\beta_{m_j}^j}(t, x_1, \ldots, x_d)$ и множество $\hat{H}(\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j)$. Пусть $H_3(\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j)$ — такое открытое подмножество множества $\hat{H}^c(\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j)$, что при каждых фиксированных $(t, x_{\beta_1^j}, \ldots, x_{\beta_{m_j}^j}) \in H_3(\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j)$ функция $\sigma_{\beta_1^j,\ldots,\beta_{m_j}^j}(t, x_1, \ldots, x_d)$ непрерывна по $(x_{\beta_{m_j+1}^j}, \ldots, x_{\beta_d^j})$. Построим d-мерный вектор f_j с компонентами f_j^i, $f_j^i = f^i$, если $i \in I_f^j$, $f_j^i = 0$, если $i \notin I_f^j$. Пусть $F_j(t, X)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее вектор $f_j(t, X)$ и все предельные точки $f_j(t, X')$ при $X' \to X$. Построим многозначные отображения $F_j^0 : \ R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times r})$, $F_0 : \ R_+ \times \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times r})$ ($\mathrm{cl}\,(A)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств множества A) следующим образом:

$$F_j^0(t, X) = \begin{cases} f_j(t, X), & (t, x_{\beta_1^j}, \ldots, x_{\beta_{m_j}^j}) \in H_3(\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j), \\ F_j(t, X), & (t, x_{\beta_1^j}, \ldots, x_{\beta_{m_j}^j}) \in H_3^c(\beta_1^j, \ldots, \beta_{m_j}^j), \end{cases}$$

$$F_0 = F_1^0 + F_2^0 + \ldots + F_k^0$$

(под суммой множества $A \subset R$ и нуля понимаем множество A).

По матричной функции $\sigma(t, X) = g(t, X) g^\top(t, X)$ построим многозначное отображение $A_0 : R_+ \times R^d \to \mathrm{conv}(R^d \times R^d)$ следующим образом. Пусть $K = \{(t, X) \in R_+ \times R^d | \int_{U_{(t,X)}} (\det\sigma(\tau, y))^{-1} d\tau dy = \infty$ для каждой открытой окрестности $U_{(t,X)}$ точки $(t, X)\}$, $K^c = (R_+ \times \times R^d) \backslash K$. Тогда

$$A_0(t, X) = \begin{cases} \sigma(t, X), & (t, X) \in K^c, \\ A(t, X), & (t, X) \in K, \end{cases}$$

где $A(t, X)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее матрицу $\sigma(t, X)$ и все предельные точки $\sigma(t, X')$ при $X' \to X$. Матрица $\sigma(t, X)$ при каждых (t, X) является симметрической неотрицательной. Согласно предложению 1.53 для любых $(t, X) \in R_+ \times R^d$ элементами множества $A_0(t, X)$ являются неотрицательные симметрические матрицы.

Определение 2.3. *Если существует процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, удовлетворяющий условиям:*

1) *существует* $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки* e, *что процесс* $X(t)1_{[0,e)}(t)$ *является* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованным, имеет непрерывные траектории при* $t < e$ *п. н. и* $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|X(t)\| = \infty$, *если* $e < \infty$;

2) *существует* $(\mathcal{F}_t)$*-броуновское движение* $W(t)$, $W(0) = 0$ *п. н.;*

3) *существуют процессы* $v \in L_1^{\text{loc}}$ *и* $u \in L_2^{\text{loc}}$, *удовлетворяющие для* $(\mu \times P)$*-почти всех* $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$ *включениям*

$$v(t)1_{[0,e)}(t) \in F_0(t, X(t,\omega))1_{[0,e)}(t),$$
$$u(t)u^\top(t)1_{[0,e)}(t) \in A_0(t, X(t,\omega))1_{[0,e)}(t);$$

4) *с вероятностью* 1 *для всех* $t \in [0, e)$ *выполняется равенство*

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t v(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t u(\tau)\, dW(\tau),$$

то набор $(X(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t), e)$ *(или короче* $X(t)$ *) называют* β*-слабым решением уравнения* (2.21) *(множества* L_1^{loc} *и* L_2^{loc} *введены в определении* 2.2*).*

Теорема 2.3 (существования β-слабых решений). *Пусть функции* f *и* g *— измеримы по Борелю и локально ограничены. Тогда для любой заданной вероятности* ν *на* $(R^d, \beta(R^d))$ *уравнение* (2.21) *имеет* β*-слабое решение с начальным распределением* ν.

Доказательство. Существуют измеримые по Борелю ортогональная матрица T и диагональная матрица $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ такие, что $\sigma = T\Lambda T^\top$. Построим матрицы $\bar\sigma_n = T\Lambda_n T^\top$, где

$$\Lambda_n = \operatorname{diag}((\lambda_1 + 1/n) \wedge n, \ldots, (\lambda_d + 1/n) \wedge n),$$
$$\bar g_n = T \operatorname{diag}(((\lambda_1 + 1/n) \wedge n)^{1/2}, \ldots, ((\lambda_d + 1/n) \wedge n)^{1/2}),$$
$$\bar f_n(t, X) = \operatorname{col}(\bar f_n^1(t, X), \ldots, \bar f_n^d(t, X)),$$
$$\bar f_n^i(t, X) = (f^i(t, X) \vee (-n)) \wedge n, \quad n \in N.$$

Для каждого натурального n существует постоянная $\alpha_n > 0$ такая, что $\det \bar g_n \bar g_n^{\text{т}} = \det \bar\sigma_n \geqslant \alpha_n$ для всех $(t, X) \in R_+ \times R^d$, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \bar f_n(t, X) = f(t, X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \bar\sigma_n(t, X) = \sigma(t, X)$ в каждой точке $(t, X) \in R_+ \times R^d$.

По теореме Крылова (лемма 2.5) для любого $n \in N$ уравнение

$$X_n(t) = X_n(0) + \int\limits_0^t \bar{f}_n(\tau, X_n(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t \bar{g}_n(\tau, X_n(\tau))\, dW_n(\tau) \qquad (2.54)$$

имеет слабое решение $(X_n(t), \Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n, \mathcal{F}_{nt}, W_n(t))$ с начальным распределением ν.

Возьмем последовательность $a_m^{'} \underset{m\to\infty}{\uparrow} \infty$, определим моменты остановки $\tau_n^m = \inf\{t|\ \|X_n(t)\| > a_m^{'}\}$ и процессы $X_n^m(t) = X_n(t \wedge \tau_n^m)$ и рассмотрим двойную последовательность $(X_i^j, \tau_i^j)_{i,j=1}^{\infty}$. Пусть $\Psi_k = ((X_k^1, \tau_k^1), (X_k^2, \tau_k^2), \ldots, (X_k^m, \tau_k^m), \ldots), \quad k = 1, 2, \ldots$. Используя леммы 2.7, 2.8 и замечание 2.2, из последовательности P^{Ψ_k}, $k \geqslant 1$, выберем подпоследовательность $P^{\Psi_{k_n}}$ (для упрощения обозначений вместо k_n пишем n) и построим процессы $\varepsilon_n = ((z_n^1, \varrho_n^1), \ldots, (z_n^m, \varrho_n^m), \ldots)$ и $\varepsilon = ((z^1, \varrho^1), \ldots, (z^m, \varrho^m), \ldots)$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ так, что процессы $z_n^m(t)$, $z^m(t)$ являются непрерывными, $P^{\varepsilon_n} = P^{\Psi_n}$, $z_n^m(t) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z^m(t)$ равномерно на каждом компакте из R_+ п. н. и $\varrho_n^m \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varrho^m$ п. н. Кроме того, $z^m(t) = z^{m+1}(t)$ при $t < \varrho^m$ и $\varrho^m \leqslant \varrho^{m+1}$. Пусть $e = \lim\limits_{m\to\infty} \varrho^m$. Определим процесс $z(t)$ следующим образом: $z(t) = z^m(t)$ для $t \leqslant \varrho^m$, $\varrho^m < \infty$, $z(t) = z^m(t)$ для $t < \varrho^m$, $\varrho^m = \infty$, $z(t) = 0$ при $t \geqslant e$. Процесс $z(t)$ удовлетворяет условию $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|z(t)\| = \infty$ для $e < \infty$. Обозначим через $\sigma_{t+\epsilon}^m$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $z^m(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t+\epsilon$. Пусть $\mathcal{F}_{m,t} = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma_{t+\epsilon}^m$, $\mathcal{F}_t = \bigvee\limits_m \mathcal{F}_{m,t}$. Тогда процесс $z(t)1_{[0,e)}(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-согласован и имеет непрерывные траектории при $t < e$. Существует последовательность $a_m \underset{m\to\infty}{\uparrow} \infty$, $a_m \leqslant a_m^{'}$ $\forall m \geqslant 1$, такая, что если $\eta_n^m = \inf\{t| \|z_n^m(t)\| \geqslant a_m\}$, $\eta^m = \inf\{t| \|z(t)\| \geqslant a_m\}$, $\tilde{\tau}_n^m = \inf\{t| \|X_n(t)\| \geqslant a_m\}$, то при каждых $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ выполняются соотношения $P^{(X_n^m, \tilde{\tau}_n^m)} = P^{(z_n^m, \eta_n^m)}$ и $\eta_n^m \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \eta^m$ п. н.

Для каждого множества I_f^j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, построим вектор $(\bar{f}_n)_j$ с компонентами

$$(\bar{f}_n)_j^i = \begin{cases} \bar{f}_n^i, & i \in I_f^j, \\ 0, & i \notin I_f^j. \end{cases}$$

Для каждых $j \in \{1, \dots, k\}$, $m \in N$, $q \in N$ последовательности

$$(\bar{f}_n)_j(t, z_n^m(t)), \quad \bar{\sigma}_n(t, z_n^m(t)), \quad n \geqslant 1,$$

относительно слабо компактны соответственно в $L_1([0,q] \times \Omega, R^d)$ и $L_1([0,q] \times \Omega, R^{d\times d})$ (предложение 1.13). Существуют подпоследовательности $(\bar{f}_{n(1)})_j(t, z^1_{n(1)}(t,\omega))$, $\bar{\sigma}_{n(1)}(t, z^1_{n(1)}(t,\omega))$, сходящиеся слабо соответственно к $v_j^{(1)}(t,\omega)$, $b^{(1)}(t,\omega)$ на $[0, \eta^1 \wedge 1) \times \Omega$. Пусть $(\bar{f}_{n(2)})_j(t, z^2_{n(2)}(t,\omega))$, $(\bar{\sigma}_{n(2)})(t, z^2_{n(2)}(t,\omega))$ – подпоследовательности для $(\bar{f}_{n(1)})_j(t, z^2_{n(1)}(t,\omega))$, $\bar{\sigma}_{n(1)}(t, z^2_{n(1)}(t,\omega))$, сходящиеся слабо соответственно к $v_j^{(2)}(t,\omega)$, $b^{(2)}(t,\omega)$ на $[\eta^1 \wedge 1, \eta^2 \wedge 2) \times \Omega$ и т. д. Тем самым построим процессы $v_j(t,\omega)$, $b(t,\omega)$ такие, что $v_j(t,\omega) = v_j^{(m)}(t,\omega)$, $b(t,\omega) = b^{(m)}(t,\omega)$ для $(t,\omega) \in [\eta^{m-1} \wedge (m-1), \eta^m \wedge m) \times \Omega$, $m = 1, 2, \dots$ (считаем, что $\eta^0 = 0$). Положим $v_j(t,\omega) = 0$, $b(t,\omega) = 0$ для $(t,\omega) \in [e, +\infty) \times \Omega$. Пусть $v(t,\omega) = v_1(t,\omega) + \ldots + v_k(t,\omega)$. Для любого $b > 0$ существует последовательность $\delta_n(b) \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$ такая, что $\bar{\sigma}_n(t,X) \in [A(t,X)]_{\delta_n}$, $(\bar{f}_n)_j(t,X) \in [F_j(t,X)]_{\delta_n}$ для любых $t \in [0,b]$ и $X \in B(0,b)$ при всех $j = 1, \dots, n$, где $[A]_\epsilon$—ϵ-окрестность множества A. Для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [\eta^{m-1} \wedge (m-1), \eta^m \wedge m) \times \Omega$ имеем (предложение 1.51)

$$v_j^{(m)}(t,\omega) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} (\bar{f}_k)_j(t, z_k^m(t,\omega)) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} [F_j(t, z_k^m(t,\omega))]_{\delta_{k(m)}},$$

$$b^{(m)}(t,\omega) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} \bar{\sigma}_k(t, z_k^m(t,\omega)) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} [A(t, z_k^m(t,\omega))]_{\delta_{k(m)}},$$

$\delta_k(m) \downarrow 0$ при $k \to \infty$, где $\overline{\mathrm{co}}(A)$ – замыкание выпуклой оболочки множества A.

Отображения F_j, A полунепрерывны сверху по $X \in R^d$ (предложение 1.52). Следовательно, $v_j(t,\omega) \in F_j(t, z^m(t,\omega))$, $b(t,\omega) \in A(t, z^m(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [\eta^{m-1}\wedge(m-1), \eta^m\wedge m)\times \Omega$. Пусть $\hat{v}_j(t,\omega)$ – условное математическое ожидание $E(v_j(t,\omega)|\mathcal{F}_t)$, $\hat{b}(t,\omega)$ – условное математическое ожидание $E(b(t,\omega)|\ \mathcal{F}_t)$, причем условные математические ожидания выбраны таким образом, что процессы $\hat{v}_j$ и $\hat{b}$ измеримы. Тогда $\hat{v}_j(t,\omega) \in F_j(t, z^m(t,\omega))$, $\hat{b}(t,\omega) \in A(t, z^m(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [\eta^{m-1}\wedge(m-1), \eta^m\wedge m)\times$

$\times\, \Omega$ (предложение 1.49). Пусть $B_m(I_f^j) = \{(t,\omega) \in [\eta^{m-1} \wedge (m - 1), \eta^m \wedge m) \times \Omega|\ (t, z^m_{\beta_1^j}(t,\omega), \ldots, z^m_{\beta^j_{l_j}}(t,\omega)) \in H_3(\beta_1^j, \ldots, \beta^j_{l_j})\}$, $B_m = \{(t,\omega) \in [\eta^{m-1} \wedge (m-1), \eta^m \wedge m) \times \Omega|\ (t, z^m(t,\omega)) \in K\}$, $B_m^c = ([\eta^{m-1} \wedge (m-1), \eta^m \wedge m) \times \Omega) \setminus B_m$. Определим процессы

$$\tilde{v}_j^{(m)}(t,\omega) = \begin{cases} f_j(t, z^m(t,\omega)), & (t,\omega) \in B_m(I_f^j), \\ \hat{v}_j(t,\omega), & (t,\omega) \in B_m^c(I_f^j), \end{cases}$$

$$\tilde{b}^{(m)}(t,\omega) = \begin{cases} \sigma(t, z^m(t,\omega)), & (t,\omega) \in B_m^c, \\ \hat{b}(t,\omega), & (t,\omega) \in B_m. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{v}_j(t,\omega) = \tilde{v}_j^{(m)}(t,\omega)$, $\tilde{b}(t,\omega) = \tilde{b}^{(m)}(t,\omega)$ для $(t,\omega) \in [\eta^{m-1} \wedge (m - 1), \eta^m \wedge m) \times \Omega$. Положим $\tilde{v}_j = 0$, $\tilde{b} = 0$, для $(t,\omega) \in [e, +\infty) \times \Omega$. Пусть $\tilde{v}(t,\omega) = \tilde{v}_1(t,\omega) + \tilde{v}_2(t,\omega) + \ldots + \tilde{v}_k(t,\omega)$. Для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$ выполняются включения $\tilde{v}(t,\omega)1_{[0,e)}(t) \in F_0(t, z(t,\omega))1_{[0,e)}(t)$, $\tilde{b}(t,\omega)1_{[0,e)}(t) \in A_0(t, z(t,\omega))1_{[0,e)}(t)$. Процессы $\tilde{v}(t,\omega)$, $\tilde{b}(t,\omega)$ являются измеримыми и $(\mathfrak{F}_t)$-согласованными.

Зафиксируем $m \in N$, $M \in N$ и возьмем произвольно: $s, t \in R_+$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h:\ R^d \to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(C(R_+, R^d)))$-измеримую функцию $q:\ C(R_+, R^d) \to R$.

Из соотношения (2.54), применяя формулу Ито, получаем равенство

$$E_n\Bigg(\Bigg(h(X_n^m(t)) - h(X_n^m(s)) - \int\limits_{s\wedge\tilde{\tau}_n^m}^{t\wedge\tilde{\tau}_n^m} \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \bar{\sigma}_n^{ij}(\tau, X_n^m(\tau)) h_{x_i x_j}(X_n^m(\tau)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^d \bar{f}_n^i(\tau, X_n^m(\tau)) h_{x_i}(X_n^m(\tau))\Bigg)\, d\tau\Bigg) q(X_n^M)\Bigg) = 0, \quad h_{x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad (2.55)$$

где $\bar{\sigma}_n^{ij}, \bar{f}_n^i$ — компоненты соответственно матричной функции $\bar{\sigma}_n$ и векторной функции $\bar{f}_n$. Зафиксируем компоненту $f^i(t,X)$ векторной функции f с номером i. Пусть при применении правила (L) к f компонента $f^i(t,X)$ попала в класс, функции из которого непрерывны по переменным $(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d})$ при каждых фиксированных

$(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l})$. Обозначим $(t, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_l}) = (t, \hat{x})$, $(x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_d}) = \hat{\hat{x}}$ (не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = 1, \ \ldots, \ \beta_l = l$). Каждый из процессов X_n, X_n^m, z, z_n^m, z^m разделится на два процесса: $X_n = (\hat{X}_n, \hat{\hat{X}}_n)$, $X_n^m = (\hat{X}_n^m, \hat{\hat{X}}_n^m)$, $z = (\hat{z}, \hat{\hat{z}})$, $z_n^m = (\hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m)$, $z^m = (\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m)$. Для упрощения записи вместо $H_3^c(1, \ldots, l)$ будем писать H и обозначать $(\bar{\sigma}_n)_{1,\ldots,l}(t, x_1, \ldots, x_d) = a_n(t, \hat{x}, \hat{\hat{x}})$, $\sigma_{1,\ldots,l}(t, x_1, \ldots, x_d) = a(t, \hat{x}, \hat{\hat{x}})$.

Возьмем последовательность $\epsilon_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$. Как показано при доказательстве теоремы 2.2, справедливо соотношение

$$J_1 \equiv \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) f^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M, \hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) = E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau))\times$$

$$\times f^i(\tau, \hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M)\Bigg). \qquad (2.56)$$

Докажем, что

$$J_1 = E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}^m(\tau)) v^i(\tau) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M)\Bigg), \qquad (2.57)$$

где v^i — i-я компонента векторной функции v. Для каждого натурального k построим последовательность непрерывных функций $\varphi_j :$ $R_+ \times R^l \to [0,1]$ такую, что $\varphi_j \leqslant 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}$, $\varphi_j \uparrow 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}$ при $j \to \infty$.

Для каждого натурального j имеем

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} \varphi_j(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) f^i(\tau, \hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m) h_{x_i}(\hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m)\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M, \hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} (\varphi_j(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) q(\hat{z}_n^M, \hat{\hat{z}}_n^M) -$$

$$- \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M)) f^i(\tau, z_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\, d\tau\Bigg) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} \varphi_j(\tau, \hat{z}^m) h_{x_i}(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M)(f^i(\tau, \hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m) - v^i(\tau))\, d\tau\Bigg) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{t\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta_n^m} \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M) f^i(\tau, \hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m)\, d\tau\Bigg) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{s\wedge\eta^m} \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m, \hat{\hat{z}}^m) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M) f^i(\tau, \hat{z}_n^m, \hat{\hat{z}}_n^m)\, d\tau\Bigg) +$$

$$+ E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} \varphi_j(\tau, \hat{z}^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau), \hat{\hat{z}}^m(\tau)) q(\hat{z}^M, \hat{\hat{z}}^M) v^i(\tau)\, d\tau\Bigg). \qquad (2.58)$$

В соотношении (2.58) первое слагаемое в правой части равно нулю, так как $z_n^m(\tau) \underset{n\to\infty}{\to} z^m(\tau)$, $z_n^M(\tau) \underset{n\to\infty}{\to} z^M(\tau)$ равномерно по $\tau \in [0, t]$ п. н., второе слагаемое равно нулю в силу слабой сходимости $\bar{f}_n^i(\tau, z_n^m(\tau))$ к $v^i(\tau)$ в $L_1([0, t\wedge\eta^m)\times\Omega, R)$ (для упрощения обозначений мы считаем, что сама последовательность $\bar{f}_n^i(\tau, z_n^m(\tau))$ сходится слабо к $v^i(\tau)$ в $L_1([0, t\wedge\eta^m)\times\Omega, R)$), а также в силу построения $\bar{f}_n^i$ и локальной ограниченности f^i, третье и четвертое слагаемые равны нулю, поскольку $t\wedge\eta_n^m \underset{n\to\infty}{\to} t\wedge\eta^m$, $s\wedge\eta_n^m \underset{n\to\infty}{\to} s\wedge\eta^m$ п. н.

Используя следствие 2.1, получаем соотношения

$$\lim_{j\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E\Bigg|\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} (1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}_n^m(\tau)) - \varphi_j(\tau, \hat{z}_n^m(\tau))) f^i(\tau, \hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) \times$$

$$\times h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau), \hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\, d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M, \hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \lim_{j\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}_n^m(\tau))(1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau, \hat{z}_n^m) - \varphi_j(\tau, \hat{z}_n^m))\, d\tau\Bigg) \leqslant$$

$$
\leqslant C_6 \lim_{j\to\infty}\Bigg(\int\limits_{([0,t]\times B_1(0,a_m))\bigcap(H)^c_{\epsilon_k}} \sup_{\|\hat{\hat{x}}\|\leqslant a_m}((\det a(\tau,\hat{x},\hat{\hat{x}}))^{-1}\times
$$

$$
\times(1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{x})-\varphi_j(\tau,\hat{x}))^{l+1})\,d\tau\,d\hat{x}\Bigg)^{1/(l+1)}=0, \qquad (2.59)
$$

кроме того,

$$
\lim_{j\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m}(1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat{z}^m(\tau))-\varphi_j(\tau,\hat{z}^m(\tau)))v^i(\tau)\times
$$

$$
\times h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))\,d\tau\Bigg)q(\hat{z}^M,\hat{\hat{z}}^M)\Bigg)=0. \qquad (2.60)
$$

Из равенств (2.58)—(2.60) следует требуемое равенство (2.57). Из слабой сходимости $\bar{f}^i_n(\tau,z^m_n(\tau))$ к $v^i(\tau)$ в $L_1([0,t\wedge\eta^m)\times\Omega,R)$, построения $\bar{f}^i_n$ и локальной ограниченности f^i вытекает равенство

$$
\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} f^i(\tau,\hat{z}^m_n(\tau),\hat{\hat{z}}^m_n(\tau))h_{x_i}(\hat{z}^m_n(\tau),\hat{\hat{z}}^m_n(\tau))\,d\tau\Bigg)q(\hat{z}^M_n,\hat{\hat{z}}^M_n)\Bigg)=
$$

$$
=E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} v^i(\tau)h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))\,d\tau\Bigg)q(\hat{z}^M,\hat{\hat{z}}^M)\Bigg). \qquad (2.61)
$$

Из соотношения (2.57) вытекает существование последовательности $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ такой, что

$$
J_2\equiv\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m_n}^{t\wedge\eta^m_n} 1_{(H)^c_{\epsilon_{k_n}}}(\tau,\hat{z}^m_n(\tau))f^i(\tau,\hat{z}^m_n(\tau),\hat{\hat{z}}^m_n(\tau))\times
$$

$$
\times h_{x_i}(\hat{z}^m_n(\tau),\hat{\hat{z}}^m_n(\tau))\,d\tau\Bigg)q(\hat{z}^M_n,\hat{\hat{z}}^M_n)\Bigg)=E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H^c}(\tau,\hat{z}^m(\tau))v^i(\tau)\times
$$

$$
\times h_{x_i}(\hat{z}^m(\tau),\hat{\hat{z}}^m(\tau))\,d\tau\Bigg)q(\hat{z}^M,\hat{\hat{z}}^M)\Bigg). \qquad (2.62)
$$

Из (2.61) и (2.62) получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)_{\epsilon_{k_n}}}(\tau,\hat z_n^m) f^i(\tau,\hat z_n^m,\hat{\hat z}_n^m) h_{x_i}(\hat z_n^m,\hat{\hat z}_n^m)\,d\tau\Bigg) q(\hat z_n^M,\hat{\hat z}_n^M)\Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_H(\tau,\hat z^m(\tau)) v^i(\tau) h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg). \quad (2.63)$$

Сравнивая (2.56) и (2.57), имеем

$$E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau)) f^i(\tau,\hat z^m,\hat{\hat z}^m) h_{x_i}(\hat z^m,\hat{\hat z}^m)\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_k}}(\tau,\hat z^m(\tau)) v^i(\tau) h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg). \quad (2.64)$$

Сопоставляя (2.62) и (2.64), приходим к равенству

$$J_2 = E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H^c}(\tau,\hat z^m(\tau)) f^i(\tau,\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\times$$

$$\times h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg). \quad (2.65)$$

Учитывая (2.63), (2.65) и равенство $P^{\Psi_n} = P^{\varepsilon_n}$, имеем

$$E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} \tilde v^i(\tau) h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_{H^c}(\tau,\hat z^m(\tau)) f^i(\tau,\hat z^m,\hat{\hat z}^m) h_{x_i}(\hat z^m,\hat{\hat z}^m)\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg) +$$

$$+ E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} 1_H(\tau,\hat z^m(\tau)) v^i(\tau) h_{x_i}(\hat z^m(\tau),\hat{\hat z}^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat z^M,\hat{\hat z}^M)\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)^c_{\epsilon_{k_n}}}(\tau,\hat{z}_n^m) f^i(\tau,\hat{z}_n^m,\hat{\hat{z}}_n^m) h_{x_i}(\hat{z}_n^m,\hat{\hat{z}}_n^m)\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} 1_{(H)_{\epsilon_{k_n}}}(\tau,\hat{z}_n^m) f^i(\tau,\hat{z}_n^m,\hat{\hat{z}}_n^m) h_{x_i}(\hat{z}_n^m,\hat{\hat{z}}_n^m)\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} f^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta_n^m}^{t\wedge\eta_n^m} \bar{f}_n^i(\tau,\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau)) h_{x_i}(\hat{z}_n^m(\tau),\hat{\hat{z}}_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(\hat{z}_n^M,\hat{\hat{z}}_n^M)\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E_n\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\tilde{\tau}_n^m}^{t\wedge\tilde{\tau}_n^m} \bar{f}_n^i(\tau,\hat{X}_n^m,\hat{\hat{X}}_n^m) h_{x_i}(\hat{X}_n^m,\hat{\hat{X}}_n^m)\,d\tau\Bigg) q(\hat{X}_n^M,\hat{\hat{X}}_n^M)\Bigg). \quad (2.66)$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что для любых фиксированных $i,j \in \{1,\ldots,d\}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} E_n\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\tilde{\tau}_n^m}^{t\wedge\tilde{\tau}_n^m} \bar{\sigma}_n^{ij}(\tau,X_n^m(\tau)) h_{x_ix_j}(X_n^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(X_n^M)\Bigg) =$$

$$= E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} \tilde{b}^{ij}(\tau) h_{x_ix_j}(z^m(\tau))\,d\tau\Bigg) q(z^M)\Bigg). \quad (2.67)$$

Из соотношений (2.55), (2.66), (2.67) получаем равенство

$$E\Bigg(\Bigg(h(z^m(t)) - h(z^m(s)) -$$

$$- \int\limits_{s\wedge\eta^m}^{t\wedge\eta^m} \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \tilde{b}^{ij}(\tau) h_{x_ix_j}(z^m(\tau)) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{v}^i(\tau) h_{x_i}(z^m(\tau))\Bigg) d\tau\Bigg) q(z^M)\Bigg) = 0.$$

Отсюда и из предложения 1.27 следует, что для каждого $m = 1, 2, \ldots$ процесс $h(z(t \wedge \eta^m)) - h(z(0)) -$

$$
- \int\limits_0^{t\wedge\eta^m} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \tilde{b}^{ij}(\tau) h_{x_i x_j}(z(\tau)) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{v}^i(\tau) h_{x_i}(z(\tau)) \right) d\tau
$$

является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Матрица $\tilde{b}(t,\omega)$ является симметрической неотрицательной. Представим ее в виде

$$
\tilde{b}(t,\omega) = Q(t,\omega) D(t,\omega) Q^\top(t,\omega),
$$

где $Q(t,\omega)$ – ортогональная матрица, $D(t,\omega)$ — диагональная матрица с неотрицательными элементами, при этом все компоненты матриц $Q(t,\omega)$, $D(t,\omega)$ — измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы. Пусть $\tilde{u}(t,\omega) = Q(t,\omega)\sqrt{D(t,\omega)}$, тогда выполняется включение

$$
\tilde{u}(t,\omega) u^\top(t,\omega) 1_{[0,e)}(t) \in A_0(t, z(t,\omega)) 1_{[0,e)}(t)
$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$.

Согласно предложениям 1.37, 1.38, на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ с потоком σ-алгебр $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ можно определить $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ с $\tilde{W}(0) = 0$ п. н. такое, что с вероятностью 1 для любого $t \in [0, e)$ выполняется равенство

$$
z(t) = z(0) + \int\limits_0^t \tilde{v}(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t \tilde{u}(\tau)\, d\tilde{W}(\tau).
$$

Следовательно, $(z(t), \tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{W}(t), \tilde{v}(t), \tilde{u}(t), e)$ – β-слабое решение уравнения (2.21). Теорема 2.3 доказана.

Пример 2.3. Для иллюстрации теоремы 2.3 рассмотрим систему

$$
dx_1(t) = (r(x_1(t)) + t x_2^2(t))\, dt + dW_1(t), \quad dx_2(t) = -r(x_2(t))\, dt,
$$

где

$$
r(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}
$$

Функция $\sigma = gg^\top$ непрерывна, поэтому $A_0(t,x_1,x_2)$ совпадает с $\sigma(t,x_1,x_2) = \mathrm{diag}(1,0)$. Разобьем множество индексов компонент функции f на подмножества $I_f^1 = \{1\}$, $I_f^2 = \{2\}$. Функция $f^1(t,x_1,x_2) = r(x_1) + tx_2^2$ непрерывна по x_2. Возьмем первую строку матрицы g и найдем, что множество $H_3^c(1)$ пусто, поэтому $F_1^0(t,x_1,x_2) = \mathrm{col}(f^1(t,x_1,x_2),0)$. Компонента $f^2(t,x_1,x_2) = -r(x_2)$ непрерывна по x_1. Берем вторую строку матрицы g. Видим, что в этом случае $H_3^c(2) = \{(t,x_2)|t \in R_+, x_2 \in R\}$. По правилу (L) $F_2^0(t,x_1,0) = \mathrm{col}(0,[-1,1])$, $F_2^0(t,x_1,x_2) = \mathrm{col}(0,-r(x_2))$, если $x_2 \neq 0$. Таким образом, $F_0(t,x_1,x_2) = \mathrm{col}(r(x_1)+tx_2^2, -r(x_2))$, если $x_2 \neq 0$, и $F_0(t,x_1,0) = \mathrm{col}(r(x_1)+tx_2^2,[-1,1])$. Теорема 2.2 не применима к рассматриваемой системе, но для любой вероятности ν на $(R^2,\beta(R^2))$, согласно теореме 2.3, система имеет β-слабое решение с начальным распределением ν.

2.4. Сильное и слабое существование, потраекторная и слабая единственность для стохастических дифференциальных уравнений и включений

В предыдущих параграфах приведены определения β-слабого и слабого решений ССДУ и доказаны соответствующие теоремы существования. В данном параграфе аналогичные определения вводятся для стохастических дифференциальных включений, а также даются определения сильного и слабого существования, потраекторной и слабой единственности как для стохастических дифференциальных уравнений, так и для включений. Доказаны соответствующие теоремы существования и единственности, а также теорема об отсутствии взрывов у решений СДВ.

Пусть заданы измеримые по Борелю многозначные отображения $F : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$, $G : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times d})$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in F(t,x(t))dt + G(t,x(t))dW(t). \tag{2.68}$$

Построим многозначное отображение $(t,x) \to A(t,x) = \{bb^\top | b \in \in G(t,x)\}$.

Определение 2.4. *Под слабым решением включения* (2.68) *понимаем случайный процесс* $x(t)$, *определенный на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с потоком* $\mathcal{F}_t$ *такой, что*:

1) *существует* $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки* e, *что процесс* $x(t)1_{[0,e[}(t)$ *является* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованным, имеет непрерывные траектории при* $t < e$ *п. н. и* $\limsup\limits_{t \to e-0} \|x(t)\| = +\infty$, *если* $e < \infty$;

2) *существует* r*-мерное* $(\mathcal{F}_t)$*-броуновское движение* $W(t)$, $W(0) = 0$ *п. н.*;

3) *существуют процессы* $v \in L_1^{\mathrm{loc}}$ и $u \in L_2^{\mathrm{loc}}$ *такие, что для* $(\mu \times P)$*-почти всех* $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$ *выполняются включения*

$$v(t, \omega)1_{[0,e[}(t) \in F(t, x(t, \omega))1_{[0,e[}(t),$$

$$u(t, \omega)u^\top(t, \omega)1_{[0,e[}(t) \in A(t, x(t, \omega))1_{[0,e[}(t);$$

4) *с вероятностью* 1 *для всех* $t \in [0, e[$ *имеет место равенство*

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t v(s)ds + \int\limits_0^t u(s)dW(s).$$

Момент остановки e в этом определении называют **моментом взрыва** слабого решения $x(t)$, и если $e = \infty$ п. н., то будем говорить, что у этого решения отсутствуют взрывы.

Определение 2.5. *Говорят, что для включения* (2.68) *имеет место слабое существование (или включение обладает свойством слабого существования), если для любой вероятности* ν *на* $(R^d, \beta(R^d))$ *существует слабое решение* $x(t)$ *включения* (2.68) *с начальным распределением* ν, *т. е.* $P(x(0) \in A) = \nu(A) \quad \forall A \in \beta(R^d)$.

Определение 2.6. *Слабое решение* $x(t)$ *называется сильным решением, если процесс* $x(t)$ *является согласованным с пополненным потоком* σ*-алгебр, порожденным броуновским движением* $W(t)$ *и случайным вектором* $x(0)$.

Определение 2.7. *Говорят, что для включения* (2.68) *имеет место слабая единственность (или включение обладает свойством слабой единственности), если для любых двух слабых решений* x *и* $\bar{x}$ *с одинаковыми начальными распределениями на* $(R^d, \beta(R^d))$ *совпадают законы распределения для* x *и* $\bar{x}$ *на* $(C(R_+, R^d), \beta(C(R_+, R^d)))$.

Вышеприведенное определение эквивалентно следующему: включение (2.68) обладает свойством слабой единственности, если для любых двух слабых решений x и $\bar{x}$ включения (2.68) таких, что $x(0) = \bar{x}(0) = x_0 \in R^d$, совпадают законы распределения для x и $\bar{x}$ на $(C(R_+, R^d), \beta(C(R_+, R^d)))$ [8, с. 153].

Введенное определение слабой единственности применимо к включениям, у решений которых отсутствуют взрывы. Для включений со взрывами используют следующее определение локальной слабой единственности. Пусть $r \in R_+$. Переопределим функции, входящие во включение (2.68) на множестве $\{(t,x) \in R_+ \times R^d \big| \|x\| \geqslant r\}$. Положим $G(t,x) = I$ — единичная матрица, $F(t,x) = 0$ для $\{(t,x) \in R_+ \times R^d \big| \|x\| \geqslant r\}$. Если для любого $r \in R_+$ вновь построенное включение обладает свойством слабой единственности решений, то говорят, что включение (2.68) обладает свойством локальной слабой единственности.

Определение 2.8. *Говорят, что для включения* (2.68) *имеет место сильное существование (или включение обладает свойством сильного существования), если для любого вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *для любого потока* $\mathcal{F}_t$, *для любого* $(\mathcal{F}_t)$*-броуновского движения* $W(t)$ *и любого* $(\mathcal{F}_0, \beta(R^d))$*-измеримого случайного вектора* η, *независимого от броуновского движения* $W(t)$, *существует случайный процесс* $x(t)$, $x(0) = \eta$ *п. н., определенный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *удовлетворяющий условиям* 1),3),4) *из определения* 2.4.

Рассмотрим теперь стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in F(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) \tag{2.69}$$

с измеримыми по Борелю многозначным отображением $F : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ и отображением $g : R_+ \times R^d \to R^{d \times d}$.

Определение 2.9. *Под слабым решением включения* (2.69) *понимаем случайный процесс* $x(t)$, *определенный на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *с потоком* $\mathcal{F}_t$, *удовлетворяющий условиям* 1) *и* 2) *определения* 2.4 *и такой, что*

3') $g(t,x(t)) \in L_2^{\mathrm{loc}}$ *и существует процесс* $v \in L_1^{\mathrm{loc}}$, *что для* $(\mu \times$ $\times P)$*-почти всех* $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$ *выполняется включение*

$$v(t,\omega)1_{[0,e[}(t) \in F(t,x(t,\omega))1_{[0,e[}(t);$$

4') *с вероятностью* 1 *для всех* $t \in [0,e[$ *имеет место равенство*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s).$$

Определение 2.10. *Говорят, что для включения* (2.69) *имеет место потраекторная единственность (или включение обладает свойством потраекторной единственности), если для любых двух слабых решений* $(x(t),\Omega,\mathfrak{F},P,\mathfrak{F}_t,v(t),W(t),e)$ *и* $(\bar{x}(t),\Omega,\mathfrak{F},P,\mathfrak{F}_t,\bar{v}(t),W(t),\bar{e})$, *заданных на одном и том же вероятностном пространстве с одним и тем же потоком и с одним и тем же броуновским движением, из равенства* $x(0)=\bar{x}(0)$ *п. н. следует, что с вероятностью единица* $e(\omega)=\bar{e}(\omega), \quad x(t)=\bar{x}(t) \quad \forall t \in [0,e[$.

Пусть теперь дано стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t), \tag{2.70}$$

где $f: R_+ \times R^d \to R^d$ и $g: R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ — измеримые по Борелю отображения.

Если в определениях 2.5—2.7 и 2.10 вместо слабых решений включения (2.68) использовать слабые (β-слабые) решения уравнения (2.70), то приходим к определениям слабого (β-слабого) существования, сильного (β-сильного) решения, потраекторной (β-потраекторной) и слабой единственности ССДУ (2.70). Если в определении 2.8 в условии 3) вместо отображений $F(t,x)$ и $A(t,x)$ поставить соответствующие многозначные отображения из определения β-слабых решений уравнения (2.70), то приходим к определению β-сильного существования ССДУ. Если в определении 2.8 условия 3) и 4) заменить следующим условием 5): с вероятностью 1 для всех $t \in [0,e(\omega)[$ имеет место равенство

$$x(t) = \eta + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s),$$

то приходим к определению сильного существования ССДУ (2.70).

Предложение 2.1 (принцип Ямады — Ватанабэ [8, с. 154]).

Если для любой борелевской меры ν *на* $(R^d, \beta(R^d))$ *существует слабое решение включения* (2.69) *(уравнения* (2.70)) *с начальным распределением* ν *и включение* (2.69) *(уравнение* (2.70)) *обладает свойством потраекторной единственности, то для этого включения (уравнения) имеет место сильное существование и любое слабое решение является сильным.*

Пусть $\kappa(t,x) = \inf\limits_{a(t,x)\in A(t,x)} \det\ a(t,x)$, где $A(t,x) = \left\{b(t,x)b^\top(t,x)\middle| b(t,x) \in G(t,x)\right\}$. Определим множество $D = \left\{(t,x)\middle|\ \text{для любой открытой окрестности } U_{(t,x)} \text{ точки } (t,x) \text{ интеграл } \int_{U_{(t,x)}} \kappa^{-1}(s,y)dsdy \text{ либо не определен, либо равен} +\infty\right\}$.

Теорема 2.4 (о слабом существовании для СДВ). *Если многозначные отображения* F *и* G *измеримы по Борелю и локально ограничены; отображения* F *и* G *полунепрерывны сверху на множестве* D; $F(t,x) \in \operatorname{conv}(R^d)$, $A(t,x) \in \operatorname{conv}(R^{d\times d})$ $\forall (t,x) \in D$, *то включение* (2.68) *обладает свойством слабого существования.*

Доказательство. Согласно предложению 1.41 существует пара измеримых по Борелю локально ограниченных селекторов $f_0(t,x), a_0(t,x)$ соответственно для многозначных отображений $F(t,x), A(t,x)$. При каждых (t,x) матрица $a_0(t,x)$ является симметрической неотрицательной. Представим ее в виде $a_0 = T\Lambda T^\top$, где T — ортогональная матрица, а Λ — диагональная матрица с неотрицательными элементами. Возьмем $g_0 = T\sqrt{\Lambda}$ и рассмотрим уравнение

$$dx(t) = f_0(t,x(t))dt + g_0(t,x(t))dW(t). \tag{2.71}$$

В каждой точке (t,x) построим множества $F_1(t,x), G_1(t,x)$, которые являются наименьшими выпуклыми замкнутыми множествами, содержащими соответственно точки $f_0(t,x), g_0(t,x)$ и все предельные точки $f_0(t,x'), g_0(t,x')$ при $x' \to x$. Множество $D_1 = \left\{(t,x)\middle|\ \text{для любой открытой окрестности } U(t,x) \text{ точки } (t,x) \text{ интеграл } \int_{U(t,x)} (\det a_0(s,y))^{-1}dsdy \text{ равен } \infty\right\}$ принадлежит D. Пусть $F_0(t,x) = F_1(t,x)$, если $(t,x) \in D_1$, и $F_0(t,x) = f_0(t,x)$, если $(t,x) \in (R_+ \times R^d) \setminus D_1$, $G_0(t,x) = G_1(t,x)$, если $(t,x) \in D_1$, и $G_0(t,x) = g_0(t,x)$, если $(t,x) \in (R_+ \times R^d) \setminus D_1$. По теореме 2.3 для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ уравнение (2.71) имеет β- слабое решение $(x(t), W(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, u_0(t), v_0(t), e)$ такое, что $P^{x(0)} = \nu$. Из полунепрерывности сверху на множестве D отображений F, A и из принадлежности их значений соответственно множествам $\operatorname{conv}(R^d), \operatorname{conv}(R^{d\times d}))$ вытекает, что

$$F_0(t,x) \in F(t,x), A_0(t,x) \in A(t,x) \quad \forall (t,x) \in R_+ \times R^d, \tag{2.72}$$

а из определения β-слабых решений уравнения (2.71) следует, что для почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$ справедливы включения

$$v_0(t,\omega)1_{[0,e[}(t) \in F_0(t, x(t,\omega))1_{[0,e[}(t),$$

$$u_0(t,\omega)u^\top(t,\omega)1_{[0,e[}(t) \in A_0(t, x(t,\omega))1_{[0,e[}(t). \tag{2.73}$$

Соотношения (2.72), (2.73) показывают, что $(x(t), W(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, u_0(t), v_0(t), e)$ — слабое решение включения (2.68).

Теорема 2.5. *Если многозначные отображения F и G измеримы по Борелю и локально ограничены; существует $\varepsilon > 0$ такое, что отображения F и A полунепрерывны снизу на множестве $[D]_\varepsilon$; $F(t,x) \in \operatorname{conv}(R^d)$, $A(t,x) \in \operatorname{conv}(R^{d\times d})$ $\quad \forall (t,x) \in [D]_\varepsilon$, то включение* (2.68) *обладает свойством слабого существования.*

Доказательство. Пусть $\bar{f}(t,x), \bar{a}(t,x)$ — измеримые по Борелю селекторы соответственно отображений $F(t,x), A(t,x)$ и пусть $\bar{\bar{f}}(t,x), \bar{\bar{a}}(t,x)$ — непрерывные селекторы соответственно отображений $F : [D]_\varepsilon \to \operatorname{conv}(R^d), A : [D]_\varepsilon \to \operatorname{conv}(R^{d\times d})$. Существование селекторов $\bar{f}(t,x), \bar{a}(t,x)$ вытекает из предложения 1.41, а селекторов $\bar{\bar{f}}(t,x), \bar{\bar{a}}(t,x)$ — из теоремы Майкла (предложение 1.44). Пусть

$$f_1(t,x) = \begin{cases} \bar{f}(t,x), & (t,x) \in [D]_\varepsilon^c, \\ \bar{\bar{f}}(t,x), & (t,x) \in [D]_\varepsilon, \end{cases} \qquad a_1(t,x) = \begin{cases} \bar{a}(t,x), & (t,x) \in [D]_\varepsilon^c, \\ \bar{\bar{a}}(t,x), & (t,x) \in [D]_\varepsilon, \end{cases}$$

Представим матрицу a_1 в виде $a_1 = T_1\Lambda_1 T_1^\top$, где T_1 — ортогональная матрица, а Λ_1 — диагональная матрица с неотрицательными элементами. Возьмем $g_1 = T_1\sqrt{\Lambda_1}$ и рассмотрим уравнение

$$dx(t) = f_1(t, x(t))dt + g_1(t, x(t))dW(t). \tag{2.74}$$

Коэффициенты уравнения (2.74) удовлетворяют условиям теоремы 2.2, поэтому для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ уравнение (2.74) имеет слабое решение $x(t)$ такое, что $P^{x(0)} = \nu$, которое является также и слабым решением включения (2.68). Теорема 2.5 доказана.

Пусть многозначное отображение $F : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ и отображение $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times r}$ — измеримы по Борелю.

Условие E). Существует вещественная неотрицательная функция $V(x)$, определенная на R^d и непрерывная вместе с производными $V''_{x_i x_j}$, $i, j = 1, \ldots, d$, $V(0) = 0$ и $V(x) \neq 0$, если $x \neq 0$, такая, что для любых $m \in R_+$, $t \in R_+$, $z \in R^d$, $y \in R^d$, $\|z\| \leqslant m$, $\|y\| \leqslant m$, выполняется неравенство

$$\sup_{a\in F(t,y),\quad b\in F(t,z)} V'_x(y-z)(a-b)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(V''_{x^2}(y-z)(g(t,y)-g(t,z))(g(t,y)-g(t,z))^\top\big) \leqslant k(t,m)V(y-z),$$

с отображением $k : R_+ \times R_+ \to R_+$, непрерывным по t при каждом фиксированном m.

Теорема 2.6 (о потраекторной единственности слабых решений СДВ). *Если многозначное отображение* $F : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ *и отображение* $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times r}$ *удовлетворяют условию* E) *и для любых* $m \in R_+$ *и* $T \in R_+$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^T \big(\sup_{\|x\|\leqslant m} (\alpha(F(t,x),0) + \|g(t,x)\|^2\big)dt < \infty,$$

то включение (2.69) *обладает свойством потраекторной единственности слабых решений.*

Доказательство. Предположим, что включение (2.69) имеет два слабых решения $(x_1(t,\omega), v_1(t,\omega), e_1(\omega))$ и $(x_2(t,\omega), v_2(t,\omega), e_2(\omega))$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве с одним и тем же потоком, соответствующих одному броуновскому движению таких, что $x_1(0,\omega) = x_2(0,\omega)$ п. н. Пусть $\sigma^i_m = \inf\big\{t\big|\|x_i(t,\omega) > > m\big\}$, $i = 1, 2$, $\epsilon(t,m) = \int_0^t k(s,m)ds$, $\psi(t,m) = \exp(-\epsilon(t,m))$. Достаточно показать, что $\sigma^1_m = \sigma^2_m$ п. н. и $x_1(t,\omega) = x_2(t,\omega)$ при

$t \in [0, \sigma_m^1[$ п. н. при всех $m \in R_+$. По формуле Ито для любого $T \in \in R_+$ выполняется равенство

$$\psi(t \wedge T \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2, m) V(x_1(t \wedge T \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2) - x(t \wedge T \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2)) =$$

$$= \int\limits_0^{t \wedge T \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2} \psi(s, m) \Big(V_x'(x_1(s) - x_3(s))(v_1(s) - v_2(s)) -$$

$$-k(s, m) V(x_1(s) - x_2(s)) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(V_{x^2}''(x_1(s) - x_2(s)) \times$$

$$\times (g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s))(g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s))^\top) \Big) ds +$$

$$+ \int\limits_0^{t \wedge T \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2} \psi(s, m) V_x'(x_1(s) - x_2(s)) \times$$

$$\times (g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s)) dW(s). \tag{2.75}$$

При каждых $m \in R_+$, $T \in R_+$ из (2.75), используя условие E), для любого момента остановки $\tau \leqslant T \wedge \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2$, имеем $E(\psi(\tau, m) V(x_1(\tau, \omega) - - x_2(\tau, \omega)) = 0$. Отсюда следует $\psi(\tau, m) V(x_1(\tau, \omega) - x_2(\tau, \omega)) = = 0$ п. н. Так как $\psi(\tau, m) \neq 0$, то $V(x_1(\tau, \omega) - x_2(\tau, \omega)) = 0$ п. н. Свойства функции V таковы, что из последнего равенства вытекает $x_1(\tau, \omega) = x_2(\tau, \omega)$ п. н. Поэтому $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$ при всех $t \in \in [0, \sigma_m^1 \wedge \sigma_m^2[$ п. н. Отсюда, очевидно, следует, что $\sigma_m^1 = \sigma_m^2$ п. н. и $x_1(t, \omega) = x_2(t, \omega)$ $\forall t \in [0, \sigma_m^1[$ п. н.

Пример 2.4. Пример стохастического дифференциального включения, обладающего свойством потраекторной единственности:

$$dx(t) \in f(x(t)) dt + dW(t), \tag{2.76}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

Если $V(x) = x^2$, $x \in R$, то для любых $m \in R, z \in R, y \in \in R, \|z\| \leqslant m, \|y\| \leqslant m$, выполняется неравенство

$$\sup_{a \in f(y), b \in f(z)} V_x' \times (a - b) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\big(V_{x^2}'' \times (g(y) - g(z))(g(y) - g(z))^\top\big) \leqslant 0.$$

По теореме 2.6 включение (2.76) обладает свойством потраекторной единственности слабых решений.

Теорема 2.7 (о сильном существовании и потраекторной единственности для ССДУ). *Если отображения* $f : R_+ \times R^d \to R^d$ *и* $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ *измеримы по Борелю, локально ограничены и удовлетворяют условию* E); *компоненты функций* $f(t, x)$ *и* $\sigma(t, x) = g(t, x)g^\top(t, x)$ *удовлетворяют условию* C), *то для ССДУ* (2.70) *имеет место сильное существование и потраекторная единственность.*

Теорема 2.8 (о β-сильном существовании и β-потраекторной единственности для ССДУ). *Если отображения* $f : R_+ \times R^d \to R^d$ *и* $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ *измеримы по Борелю и локально ограничены; функция* g *непрерывна по* x; *многозначные отображения* F_0 *и* A_0 *из определения* 2.3 *β-слабых решений ССДУ* (2.70) *удовлетворяют условию* E), *то для ССДУ* (2.70) *имеет место β-сильное существование и β-потраекторная единственность.*

Доказательства теорем 2.7, 2.8 вытекают из теорем 2.2, 2.3 существования слабых и β-слабых решений ССДУ, теоремы 2.6 о потраекторной единственности слабых решений СДВ и принципа Ямады — Ватанабэ.

Многозначное отображение $L : R_+ \times R^d \to \mathcal{P}(R^d)$ называется **монотонным**, если при каждом $t \in R_+$ $(x_1 - x_2)^\top (u_1 - u_2) \leqslant 0$ для всех $x_1, x_2 \in R^d$ и для всех $u_1 \in L(t, x_1), u_2 \in L(t, x_2)$. Ясно, что многозначное отображение $F : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ вида $F(t, x) = f(t, x) + L(t, x)$, где $f : R_+ \times R^d \to R^d$ — отображение, измеримое по Борелю, удовлетворяющее условию Липшица по x, а $L : R_+ \times R^d \to \mathcal{P}(R^d)$ — измеримое по Борелю монотонное отображение, вместе с измеримым по Борелю отображением $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times r}$, удовлетворяющим условию Липшица по x, удовлетворяют условию E) с функцией $V(x) = \|x\|^2$. Отображение F из примера 2.4 является примером монотонного отображения.

Теорема 2.9 (о сильном существовании для СДВ). *Пусть*: $F = F_1 + F_2$; $F_1 : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$, $F_2 : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ *и* $G : R_+ \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times d})$ — *измеримые по Борелю локально ограниченные* *отображения;* F_1 *— монотонное полунепрерывное сверху на множестве* D *отображение и* $F_1(t,x) \in \operatorname{conv}(R^d) \quad \forall (t,x) \in D$; *отображения* F_2 *и* G *удовлетворяют условию Липшица по* x. *Тогда для СДВ* (2.68) *имеет место сильное существование.*

Доказательство. Согласно предложению 1.10, отображения $F_2(t,x), G(t,x)$ имеют селекторы $b_2(t,x), c(t,x)$, которые измеримы по Борелю и удовлетворяют условию Липшица по x. По предложению 1.41, отображение $F_1(t,x)$ имеет измеримый по Борелю локально ограниченный селектор $b_1(t,x)$, который, очевидно, является монотонным отображением. ССДУ

$$dx(t) = (b_1(t,x(t)) + b_2(t,x(t))dt + c(t,x(t))dW(t) \tag{2.77}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.8, поэтому для уравнения (2.77) имеет место β-сильное существование. Многозначные отображения таковы, что отсюда следует сильное существование для СДВ (2.68) (см. доказательство теоремы 2.4).

Условие H). Существует вещественная неотрицательная функция $Q(x)$, определенная на R^d и непрерывная вместе с производными $Q''_{x_i x_j}$, $i,j = 1,\ldots,d$; $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} Q(x) = \infty$ и такая, что для любых $(t,x) \in$ $\in R_+ \times R^d$ выполняется неравенство

$$\sup_{a\in F(t,x)} Q'_x(x)a + \frac{1}{2}\sup_{b\in G(t,x)} \operatorname{tr}\bigl(Q''_{x^2}(x)bb^\top\bigr) \leqslant k(t)(1+Q(x)),$$

где $k(t)$ — непрерывная функция.

Теорема 2.10 (об отсутствии взрывов). *Если многозначные отображения* $F : R_+ \times R^d \to \operatorname{cl}(R^d)$ *и* $G : R_+ \times R^d \to \operatorname{cl}(R^{d\times r})$ *удовлетворяют условию* H) *и для любых* $m \in R_+$, $T \in R_+$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^T \Bigl(\sup_{\|x\|\leqslant m} (\alpha(F(t,x),0) + \alpha^2(G(t,x),0))\Bigr)dt < \infty,$$

то для любого слабого решения $(x(t), u(t), v(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, W(t), e(\omega))$ *включения* (2.68) *имеем* $e(\omega) = \infty$ *п. н.*

Доказательство. Пусть $\sigma_m = \inf\{t \big| \|x(t,\omega)\| > m\}$, $\delta(t) = \int_0^t k(s)ds$, $\psi_1(t) = \exp(-\delta(t) - Q(x(0)))$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\forall T \in R_+$

$$\lim_{m\to\infty} P\{\sigma_m \leqslant T\} = 0. \tag{2.78}$$

По формуле Ито для $\forall T \in R_+$

$$\psi_1(t\wedge T\wedge\sigma_m)(1+Q(x(t\wedge T\wedge\sigma_m)) = \exp(-Q(x(0)))(1+Q(x(0)))+$$
$$+\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\sigma_m} \psi_1(s)\Big(-k(s)(1+Q(x(s)))+Q'_x(x(s))u(s)+$$
$$+\frac{1}{2}tr\Big(Q''_{x^2}(x(s))v(s)v^\top(s)\Big)\Big)ds+\int\limits_0^{t\wedge T\wedge\sigma_m}\psi_1(s)Q'_x(x(s))v(s)dW(s). \tag{2.79}$$

Для любого момента остановки $\tau \leqslant T\wedge\sigma_m$ из равенства (2.79) имеем $E(\psi_1(\tau))(1+Q(x(\tau))) \leqslant l_1$, где $l_1 = \sup\limits_{y\in[0,\infty[} \exp(-Q(y))(1+Q(y))$. По лемме 2.1 для любого $b>0$ справедлива оценка

$$P\Big\{\sup_{t\leqslant T\wedge\sigma_m}\psi_1(t)(1+Q(x(t)))\geqslant b\Big\}\leqslant\frac{l_1}{b}.$$

Значит, для любой функции $r(m)\underset{m\to\infty}{\to}\infty$ верно равенство

$$\lim_{m\to\infty} P\Big\{\sup_{t\leqslant T\wedge\sigma_m}\psi_1(t)(1+Q(x(t)))\geqslant r(m)\Big\} = 0. \tag{2.80}$$

В соотношении (2.80) множитель $\psi_1(t)$ не зависит от m и принимает положительные значения, поэтому его можно опустить

$$\lim_{m\to\infty} P\Big\{\sup_{t\leqslant T\wedge\sigma_m}(1+Q(x(t)))\geqslant r(m)\Big\} = 0. \tag{2.81}$$

Пусть $\inf\limits_{\|x\|=m}(1+Q(x)) = b(m)$. Из свойств функции Q следует, что $b(m)\underset{m\to\infty}{\to}\infty$. Так как $\{\sigma_m\leqslant T\}\subset\{\sup\limits_{t\leqslant T\wedge\sigma_m}(1+Q(x(t)))\geqslant b(m)\}$, то из (2.81) вытекает справедливость соотношений

$$\lim_{m\to\infty}P\{\sigma_m\leqslant T\}\leqslant\lim_{m\to\infty}P\{\sup_{t\leqslant T\wedge\sigma_m}(1+Q(x(t)))\geqslant b(m)\} = 0.$$

Соотношение (2.78), а значит, и теорема 2.10 доказаны.

Предложение 2.2 (о локальной слабой единственности [18, с. 574–575]). *Пусть отображения* $f : R_+ \times R^d \to R^d$, $g : R_+ \times R^{d\times d}$ *и* $(gg^\top)^{-1}$ *— измеримы по Борелю локально ограничены и для всяких* $(t,x) \in R_+ \times R^d$ *можно указать такие* $T > 0, r > 0$ *и такую постоянную положительно определенную матрицу* C, *что*

$$\sup_{s\in[t,t+T],\|x-y\|\leqslant r} \operatorname{tr}(g(s,y)g^\top(s,y) - C)^2 < \|C^{-1}\|^{-2}.$$

Тогда уравнение (2.70) *обладает свойством локальной слабой единственности.*

Предложение 2.3 [11]. *Пусть*: *функции* $f^{(1)}, f^{(2)}, g^{(1)}$ *и* $g^{(2)}$ *в системе* (2.22) *— ограничены и измеримы по Борелю*; $\lambda^\top g^{(1)}g^{(1)\top}(t,x,y)\lambda \geqslant \nu\|\lambda\|^2$, $\nu > 0$, *для всех* (t,x,y), $\lambda \in R^l$; *все коэффициенты системы удовлетворяют условию Липшица по* y *с постоянной* L, *не зависящей от* (t,x); *функции* $f^{(2)}, g^{(1)}$ *и* $g^{(2)}$ *удовлетворяют условию Липшица по* x *с той же постоянной* L *и функции* $a = g^{(1)}g^{(1)\top}$ *и* $f^{(1)}$ *при всех фиксированных* (t,x) *имеют две равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные производные. Тогда система* (2.22) *обладает свойством сильного существования и потраекторной единственности.*

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (2.70) функция f является кусочно непрерывной. Отображение $f:\ R^d \to R^d$ называется кусочно непрерывным, если множество R^d можно разбить на ограниченные области L_i, $i = 1, 2, \ldots,$ и на множество M меры нуль, состоящее из точек границ этих областей, таким образом, что пересечение любой ограниченной области $L \subset R^d$ имеет пересечение лишь с конечным числом областей L_i и в каждой из областей L_i функция f непрерывна вплоть до границы. Функция непрерывна в области вплоть до границы, если при приближении к каждой точке границы она стремится к конечному пределу. Для кусочно непрерывной функции f построим множество $F(x)$, которое состоит из одной точки $f(x)$, если x принадлежит одной из областей L_i, а для $x \in M$ множество $F(x)$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее точку $f(x)$ и конечное число пределов $\lim\limits_{x^*\to x, x^*\in L_j} f(x^*)$, где L_j — области, для которых x — граничная точка.

Рассмотрим случай, когда пространство R^d разделено гладкой поверхностью S на области G^-, G^+ и отображения $f(x)$, $f'_x(x)$ непрерывны вплоть до границы на множествах G^-, G^+. Обозначим через $f^-(x)$, $f^+(x)$ предельные значения функции f при приближении к точке x, $x \in S$, из областей G^- и G^+ соответственно, а через h_N проекцию вектора $h = f^+ - f^-$ на нормаль к S в точке x, направленную от G^- к G^+. Из теорем 2.4, 2.6 и доказательства леммы 3 [102, с. 83] вытекает следующее следствие.

Следствие 2.3. *Пусть: вектор $h = f^+ - f^-$ направлен по нормали к поверхности S (или равен нулю); $h_N \leqslant 0$; $q : R^d \to R^d$ и $g : R^d \to R^{d\times d}$ — отображения, удовлетворяющие локальному условию Липшица. Тогда включение*

$$dx(t) \in (F(x(t)) + q(x(t)))dt + g(x(t))dW(t) \tag{2.82}$$

обладает свойствами потраекторной единственности и сильного существования.

Пример 2.5. Уравнение $dx(t) = g(x(t))dW(t)$, $x(0) = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

имеет β-сильное решение $x(t) \equiv 0, t \geqslant 0$, которое не является слабым решением, т. е. не существует вероятностного пространства, на котором процесс $x(t) \equiv 0, t \geqslant 0$, являлся бы слабым решением. В этом примере множество K совпадает с R, а множество $A_0(x)$ из определения 2.3 имеет вид

$$A_0(x) = \begin{cases} [0,1], & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Пример 2.6. Уравнение $dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \geqslant 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

имеет слабое решение (теорема 2.2) с начальным условием $x(0) = 0$, которое отлично от процесса $x(t) \equiv 0, t \geqslant 0$.

2.5. Инвариантные множества. Теорема существования жизнеспособных решений стохастических дифференциальных включений

В параграфе сформулированы теорема существования и единственности решений уравнения Стратоновича, теорема о связи уравнений Стратоновича и Ито, теорема о дифференцируемости решений по начальным условиям, дано описание множества траекторий сильного решения ССДУ с помощью решений некоторого семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, установлены условия, при которых решения стохастического дифференциального уравнения принадлежат заданному множеству.

Будем использовать следующие обозначения: $C^m(R^d, R^r) = \{f : R^d \to R^r \big| f$ — m раз непрерывно дифференцируема$\}$,

$$\|f\|_{m,K} = \sup_{x\in K} \frac{\|f(x)\|}{1+\|x\|} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in K} |D^{|\alpha|} f(x)|, \quad \|f\|_m = \|f\|_{m,R^d},$$

$$D^{|\alpha|} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_d)^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i,$$

$$\|f\|_{m+\delta,K} = \|f\|_{m,K} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x,y\in K, x\neq y} \frac{\|D^{|\alpha|} f(x) - D^{|\alpha|} f(y)\|}{\|x-y\|^{\delta}},$$

$$\|f\|_{m+\delta} = \|f\|_{m+\delta,R^d},$$

$C^{m,0} = \{f \in C^m \big| \|f\|_{m,K} < \infty$ для любого компакта $K \subset R^d\}$, $C^{m,\delta} = \{f \in C^m \big| \|f\|_{m+\delta,K} < \infty$ для любого компакта $K \subset R^d\}$, $C_b^{m,\delta} = \{f \in C^m \big| \|f\|_{m+\delta} < \infty\}$.

Пусть $[0,T]$ — отрезок в R_+. Говорят, что непрерывная функция $f : [0,T] \times R^d \to R^r$ принадлежит классу $C^{m,\delta}$, если для каждого t отображение $\hat{f}(t) = f(t,\cdot)$ принадлежит $C^{m,\delta}$ и $\int_0^T \|\hat{f}(t)\|_{m+\delta,K} dt < \infty$ для любого компакта $K \subset R^d$, класс $C_b^{m,\delta} = \{f$ из класса $C^{m,\delta} \big| \hat{f}(t) \in C_b^{m,\delta}, \ \int_0^T \|\hat{f}(t)\|_{m+\delta} dt < \infty\}$. Множество всех непрерывных отображений из $[0,T]$ в C^j обозначим A^j.

Определим счетное семейство полунорм $\|\cdot\|_{j,N}$ на A^j

$$\|F\|_{j,N} = \sum_{|\alpha|\leqslant j} \sup_{t\in[0,T],\|x\|\leqslant N} \|D^{|\alpha|}F(t,x)\|.$$

Это семейство полунорм порождает метрику

$$d(F,G) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-i}(\|F-G\|_{j,N} \wedge 1)$$

на A^j, с которой A^j является полным сепарабельным метрическим пространством.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ задано $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))$. Уравнение вида

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t, x(t)) \circ dW_i(t), \tag{2.83}$$

где $f : [0,T]\times R^d \to R^d$, $g_i : [0,T]\times R^d \to R^d$, $i = 1, \ldots, d$, называется уравнением Стратоновича. Непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $x(t), t \in [t_0, e[$, называется решением уравнения Стратоновича (2.83) с начальным условием x_0 в момент t_0, если с вероятностью 1 выполняется равенство

$$\varphi(t\wedge\tau_n) = x_0 + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} f(s,\varphi(s))ds + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \sum_{i=1}^{d} g_i(s,\varphi(s)) \circ dW_i(s)$$

для любого n, где τ_n—последовательность моментов остановки такая, что $\tau_n < e, \tau_n \uparrow e$ и $\lim\limits_{t\uparrow e} \|\varphi(t)\| = \infty$, когда $e < T$. Если $e < T$, то e называется моментом взрыва решения.

Предложение 2.4 [146, p. 110—111]. *Пусть функция f принадлежит классу $C^{1,0}$, а функции $g_i, i = 1, \ldots, d$, из классов $C^{2,\delta}$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для каждых $t_0 \in [0,T[, x_0 \in R^d$, уравнение Стратоновича* (2.83) *имеет единственное решение $x = \varphi(t, t_0, x_0, \omega)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Более того, решение $x = \varphi(t, 0, x_0, \omega)$ уравнения Стратоновича с начальным условием $x(0) = x_0$ является сильным решением уравнения Ито*

$$dx(t) = (f(t, x(t) + c(t, x(t))))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t, x(t))dW_i(t), \tag{2.84}$$

где $c(t,x) = (c_1(t,x)) \ldots c_d(t,x))^\top$,

$$c_j(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}g_{ki}(t,x(t))), j = 1, ..., d,$$

где g_{ji} *—* j*-й элемент вектора* g_i*. Обратно, сильное решение* $x = \varphi(t)$ *уравнения Ито*

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t,x(t))dW_i(t), \quad x(0) = x_0, \tag{2.85}$$

является решением уравнения Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t,x(t)) \circ dW_i(t), \quad x(0) = x_0.$$

Предложение 2.5 [146, p. 177–179]. *Пусть отображения* $f(t,x), g_i(t,x),\ i = 1,\dots,d,$ *принадлежат соответственно классам* $C_b^{k,\delta}$*,* $C_b^{k+1,\delta}$ *для некоторых* $k \geqslant 1, \delta > 0,$ *и пусть* $\varphi(t,s,x,\omega)$ *— система решений уравнения* (2.83) *с начальными условиями* $x(s) = x$*,* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$*. Тогда существуют модификации решений, обозначаемые снова* $\varphi(t,s,x,\omega)$*, и существует множество* $\Omega_0 \subset \Omega$ *такое, что* $P(\Omega_0) = 0$*, и для любого* $\omega \in \Omega_0^c$ *отображения* $\varphi(t;\cdot,s,\omega) : R^d \to R^d$ *—* k *раз дифференцируемы по* x *для всех* s,t *и производные непрерывны по* s,t,x*.*

Наряду с уравнением Стратоновича рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx(t) = (f(t,x(t)) + \sum_{i=1}^{d} g_i(t,x(t))v_i(t))dt, \tag{2.86}$$

где функция f принадлежит классу $C_b^{k,\delta}$, а функции $g_i, i = 1,\dots,d,$ — классу $C_b^{k+1,\delta}$ для некоторых $k \geqslant 2,\ \delta > 0;\ v(t) = (v_1(t),\dots,v_d(t))$ — кусочно постоянная на $[0,T]$ функция. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество всех кусочно постоянных на $[0,T]$ функций $v(t)$. Пусть $\varphi^v(t,0,x)$ — решение уравнения (2.86) с начальными условиями $x(0) = x$, соответствующее функции $v(t) \in \mathcal{V}$. Множество $\{\varphi^v(t,0,x) | v \in \mathcal{V}\}$ является подмножеством пространства A^j, если $j \leqslant k$. Пусть теперь

$\varphi(t,s,x,\omega)$ — решение уравнения Стратоновича (2.83) с начальным условием $x(s)=x$. Отображение $\omega\to\varphi(t,0,x,\omega)$ принимает значения в A^j, если $j\leqslant k$. Пусть P^j — закон распределения случайной величины $\omega\to\varphi(t,0,x,\omega)$ в $(A^j,\beta(A^j))$. **Носителем меры** P^j называют наименьшее замкнутое множество $F\subset A^j$ такое, что $P^j(F)=1$.

Предложение 2.6 [146, p. 283–285]. *Пусть функция f принадлежит классу $C_b^{k,\delta}$, а функции $g_i, i=1,\dots,d$, — классу $C_b^{k+1,\delta}$ для некоторых $k\geqslant 2$, $\delta>0$. Тогда носитель меры P^{k-1} совпадает с замыканием множества $\{\varphi^v(t,0,x)|v\in\mathcal{V}\}$ в пространстве A^{k-1}.*

Если $Z\subseteq R^d$ и τ — естественная топология в R^d, тогда топология $\tau_Z=\{A\big|A=B\bigcap Z, B\in\tau\}$ называется относительной топологией в Z. Подмножество из Z называется относительно открытым, если оно открыто в топологии τ_Z. Подмножество из Z относительно замкнуто, если его дополнение относительно открыто в Z.

Предложение 2.7 [131]. *Пусть множество $O\subset R^{d+1}$ открытое, а K относительно замкнутое в O и $f:O\to R^d$ непрерывная функция. Тогда условие*

$$\frac{d(t+h,x+hf(t,x),K)}{h}\underset{h\to+0}{\longrightarrow}0\quad\forall(t,x)\in K,$$

где $d(x,K)=\inf\limits_{y\in K}\|x-y\|$, является необходимым и достаточным условием того, что для каждой точки $(t_0,x_0)\in K$ по крайней мере одно решение начальной задачи $\dot{x}=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$, удовлетворяет условию $(t,x(t))\in K$ на правом максимальном интервале существования.

Обратной нормалью n к K в точке $(t,x)\in\partial K$ называют вектор n, удовлетворяющий условию $\langle n,(s-t,y-x)\rangle\leqslant 0$ для всех $(s,y)\in$ $\in K$.

Предложение 2.8 [131]. *Пусть множество $O\subset R^{d+1}$ открытое, а K выпуклое относительно замкнутое в O и $f:O\to R^d$ непрерывная функция. Тогда условие*

$$\langle n,(1,f(t,x))\rangle\leqslant 0$$

для любой обратной нормали n к K в каждой точке $(t,x)\in\partial K$ является необходимым и достаточным условием того, что для каждой точки $(t_0,x_0)\in K$ по крайней мере одно решение начальной задачи $\dot{x}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0$, удовлетворяет условию $(t,x(t))\in K$ на правом максимальном интервале существования.

Множество $K\in R^{d+1}$ называется **инвариантным** на промежутке $[0,T]$ для уравнения Ито (2.85), если для каждой точки $(0,x_0)\in K$ любое сильное решение $x(t)$ уравнения Ито (2.85) с начальным условием $x(0)=x_0$ удовлетворяет соотношению $P\{(t,x(t))\in K\}=1$ на промежутке $[0,T]$.

Через $\psi(t,x),\Psi(\lambda,t,x)$ обозначим следующие функции $\psi(t,x)=$ $=(\psi_j(t,x),1\leqslant j\leqslant d)$, где

$$\psi_j(t,x)=f_j(t,x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}g_{ki}(t,x(t))),j=1,...,d;$$

$$\Psi(\lambda,t,x)=\psi(t,x)+\sum_{i=1}^{d}\lambda_i g_i(t,x),$$

здесь g_{ji} — j-я компонента векторной функции g_i, f_j — j-я компонента векторной функции f, $\lambda_i,i=1,\ldots,d$, — постоянные.

Предложение 2.9 [132]. *Пусть: множество $O\subset R^{d+1}$ открытое; K относительно замкнутое в O; функции $f(t,x),g_i(t,x)$, $i=1,\ldots,d$, принадлежат соответственно классам $C_b^{2,\delta},C_b^{3,\delta}$ для некоторого $\delta>0$; выполнено условие*

$$\frac{d(t+h,x+h\Psi(\lambda,t,x),K)}{h}\underset{h\to+0}{\to}0\quad\forall(t,x)\in K,\quad\forall\lambda\in R^d.$$

Тогда множество K является инвариантным на промежутке $[0,T]$ для уравнения Ито (2.85).

Доказательство. Согласно предложению 2.6, все решения уравнения Стратоновича (2.83) с начальными условиями $x(0)=x_0$, $x_0\in$ $\in K$, удовлетворяют условию $P\{(t,x(t))\in K\}=1$ на промежутке

$[0,T]$ тогда и только тогда, когда решения $x^v(t)$ уравнения (2.87) с начальными условиями $x(0)=x_0,\ (0,x_0)\in K,$ соответствующие всевозможным $v\in\mathcal{V}$, не покидают K на отрезке $[0,T]$. Согласно предложению 2.7, последнее утверждение имеет место, если выполнено условие

$$\frac{d(t+h,x+h(f(t,x)+\sum\limits_{i=1}^{d}\lambda_i g_i(t,x)),K)}{h}\underset{h\to+0}{\to}0 \qquad (2.87)$$

$\forall(t,x)\in K,\forall\lambda_i\in R$. Используя предложение 2.6, перейдем от уравнения Ито к уравнению Стратоновича, а затем воспользуемся доказанным выше соотношением (2.87), придем к требуемому утверждению.

Предложение 2.10 [132]. *Пусть: множество $O\subset R^{d+1}$ открытое; K выпуклое относительно замкнутое в O; функции $f(t,x),g_i(t,x),\ \ i=1,\ldots,d,$ принадлежат соответственно классам $C_b^{2,\delta},C_b^{3,\delta}$ для некоторого $\delta>0$; выполнены условия*

$$\langle n,(1,\psi(t,x))\rangle\leqslant 0,\quad \langle n,(1,g_i(t,x))\rangle=0, i=1,\ldots,d, \qquad (2.88)$$

для каждой обратной нормали n к K в каждой точке $(t,x)\in\partial K$. Тогда множество K является инвариантным на промежутке $[0,T]$ для уравнения Ито (2.85).

Действительно, из условий (2.88) следует, что

$$\langle n,(1,\Psi(\lambda,t,x))\rangle\leqslant 0\quad\forall\lambda\in R^d. \qquad (2.89)$$

Теперь для доказательства требуемого утверждения надо повторить доказательство предложения 2.9, заменив в нем ссылку на предложение 2.7 ссылкой на предложение 2.8, используя при этом установленное выше соотношение (2.89).

Далее рассматривается проблема существования слабых решений стохастического дифференциального включения

$$dx(t)\in F(t,x(t))dt+G(t,x(t))dW(t), \qquad (2.90)$$

удовлетворяющих условию

$$x(t)\in K(t,x(t)),\quad t\in[0,T], \qquad (2.91)$$

где $F : [0,T] \times R^d \to \mathrm{conv}(\mathrm{R^d})$, $G : [0,T] \times R^d \to \mathrm{conv}(\mathrm{R^{d\times d}})$ – измеримые по Борелю ограниченные отображения, т. е. $\alpha(F(t,x),0) + \alpha(G(t,x),0) \leqslant M \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times R^d$, $M=$const; $K : [0,T] \times R^d \to \mathrm{cl}\,(R^d)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение. Пусть $A(t,x) = \{b(t,x)b^\top(t,x) | b(t,x) \in G(t,x)\}$.

Определение 2.11. *Под слабым жизнеспособным решением задачи* (2.90), (2.91) *с начальным условием* x_0 *понимаем* d*-мерный непрерывный случайный процесс* $x(t)$, $t \in [0,T]$, *определенный на некотором вероятностном пространстве* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$ *с потоком* σ*- алгебр* $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ *и такой, что*: 1) *существует* d*-мерное* $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$*-броуновское движение* $\tilde{W}(t)$ *с* $\tilde{W}(0) = 0$ *п. н.*; 2) $x(t)$ *согласован с* $\tilde{\mathfrak{F}}_t$, *т. е. для каждого* $t \in [0,T]$ *отображение* $\omega \to x(t,\omega)$ $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$*-измеримо*; 3) *существуют измеримые* $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$*-согласованные процессы* $v : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to R^d$, $u : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to R^{d\times d}$ *такие, что для* $(\mu \times \tilde{P})$*-почти всех* $(t,\omega) \in [0,T] \times \tilde{\Omega}$, *выполняются включения* $v(t,\omega) \in F(t,x(t,\omega))$, $u(t,\omega)u^\top(t,\omega) \in A(t,x(t,\omega))$; 4) *с вероятностью* 1 *имеют место равенство* $x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\,d\tau + \int_0^t u(\tau)\,d\tilde{W}(\tau)$ *и включение* $x(t) \in K(t,x(t))$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Пусть $\Omega = [0,1[$; $\mathfrak{F} = \beta([0,1[)$; P — мера Лебега на $[0,1[$; $\mathfrak{F}_t$ — поток σ-алгебр в $\mathfrak{F}$, $W(t)$ — d-мерное $(\mathfrak{F}_t)$-броуновское движение с $W(0) = 0$ п. н.

Теорема существования слабых жизнеспособных решений будет доказана при выполнении следующего основного условия.

Стохастическое касательное условие K). Для любых $\varepsilon > 0$ и $(\mathfrak{F}_t)$-момента остановки σ, удовлетворяющего условиям $P\{\sigma \leqslant T\} = 1$, $P\{\sigma < T\} > 0$, для любого $(\mathfrak{F}_\sigma)$-измеримого случайного вектора $y : \Omega \to R^d$, $y(\omega) \in K(\sigma, y(\omega))$ п. н., существует $(\mathfrak{F}_t)$-момент остановки $\sigma_1 \geqslant \sigma$, $P\{\sigma_1 > \sigma\} > 0$, $P\{\sigma_1 - \sigma \leqslant \min\{\varepsilon, T-\sigma\}\} = 1$, существуют $(\mathfrak{F}_\sigma)$-измеримые случайные элементы $v : \Omega \to R^d$, $u : \Omega \to R^{d\times d}$ такие, что $v \in [[F(\sigma,y)]_\varepsilon]^\varepsilon$, $uu^\top \in [[A(\sigma,y)]_\varepsilon]^\varepsilon$ п. н. и выполняются включение $y + v(\sigma_1 - \sigma) + u(W(\sigma_1) - W(\sigma)) = z(\sigma_1) \in K(\sigma_1, z(\sigma_1))$ п. н. и неравенство $\|v(t-\sigma) + u(W(t) - W(\sigma))\| \leqslant \varepsilon$ для почти всех ω для каждого $t \in [\sigma, \sigma_1]$.

Определение 2.12. *Под* ε*-приближенным решением задачи* (2.90), (2.91) *с начальным условием* $x_0 \in R^d$ *понимаем пару* (x,s), *удовлетворяющую условиям:* а) s — $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки,* $P\{s > > 0\} > 0$, $P\{s \leqslant T\} = 1$; б) $x : [0,T] \times \Omega \to R^d$ — *непрерывный* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованный процесс;* в) *существуют измеримые* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованные процессы* $\varphi : [0,T] \times \Omega \to R^d$, $\psi : [0,T] \times \Omega \to \to R^{d\times d}$, *удовлетворяющие для почти всех* ω *включениям* $\varphi(t,\omega) \in \in [[[F(t,x(t,\omega))]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$, $\psi(t,\omega)\psi^\top(t,\omega) \in [[[A(t,x(t,\omega))]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$ *для почти всех* $t \in [0,s]$; г) *с вероятностью* 1 *выполняются включение* $x(s) \in \in K(s,x(s))$ *и равенство* $x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau + \int_0^t \psi(\tau)\,dW(\tau)$ *п. н. для каждого* $t \in [0,s]$; д) *для каждого* $(\mathcal{F}_t)$*-момента остановки* $\tau \leqslant s$ *существует* $(\mathcal{F}_t)$*-момент остановки* $\hat\tau$, $0 \leqslant \tau - \hat\tau \leqslant \varepsilon$, *такой, что* $x(\hat\tau) \in K(\hat\tau, x(\hat\tau))$ *п. н.*

Лемма 2.10. *Пусть ограниченные измеримые по Борелю многозначные отображения* F *и* G *и полунепрерывное сверху многозначное отображение* K *удовлетворяют стохастическому касательному условию* К). *Тогда для любых* $\varepsilon \in]0,1]$ *и* $x_0 \in K(0,x_0)$ *существует* ε*-приближенное решение* (x,T) *задачи* (2.90), (2.91) *с начальным условием* x_0.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon \in]0,1]$ и $x_0 \in K(0,x_0)$. Согласно стохастическому касательному условию К), существуют $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $s \geqslant 0$, $P\{s > 0\} > 0$, $P\{s \leqslant \min\{\varepsilon, T\} = 1$, $(\mathcal{F}_0)$-измеримые случайные вектора $v : \Omega \to R^d$, $u : \Omega \to R^{d\times d}$ такие, что $v \in \in [[F(0,x_0)]_\varepsilon]^\varepsilon$, $uu^\top \in [[A(0,x_0)]_\varepsilon]^\varepsilon$ п. н., $x_0 + vs + uW(s) = y(s) \in \in K(s,y(s))$, $\|vt + uW(t)\| \leqslant \varepsilon$ п. н. для каждого $t \in [0,s]$. Если положить $\varphi(t,\omega) = v(\omega)$, $\psi(t,\omega) = u(\omega)$ для $\omega \in \{\omega | s > 0\}$, $t \in [0,s]$, $\varphi(t,\omega) = 0$, $\psi(t,\omega) = 0$ для остальных $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, $x(t) = = x_0 + \int_0^t v\,d\tau + \int_0^t u\,dW(\tau)$, то $x(s) \in K(s,x(s))$ п. н. Из определения множеств $[[[F]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$, $[[[A]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$ и $x(t)$ следует, что с вероятностью 1 $\varphi(t,\omega) \in [[[F(t,x(t,\omega))]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$, $\psi(t,\omega)\psi^\top(t,\omega) \in [[[A(t,x(t,\omega))]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$ для всех $t \in [0,s]$. Таким образом, (x,s) — ε-приближенное решение.

Множество $\mathcal{E}$ всех ε-приближенных решений можно частично упорядочить следующим образом: скажем, $(x_1,s_1) \leqslant (x_2,s_2)$, если $s_1 \leqslant s_2$ п. н., $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$ для $t \in [0,s_1]$, где φ_j, ψ_j — процессы, соответствующие паре (x_j,s_j), $j = 1,2$. Покажем, что любая цепь $S = \{(x_i,s_i),\ i \in I\}$ имеет в $\mathcal{E}$ верхнюю грань. Положим $\lambda = \sup\limits_{i\in I}\{s_i\}$ и выберем последовательность $s_{i_n} \uparrow \lambda$, λ — момент остановки. Возьмем $\varphi(t,\omega)=\varphi_{i_n}(t,\omega)$, $\psi(t,\omega)=\psi_{i_n}(t,\omega)$ для $t\in[0,s_{i_n}]$, $\varphi(\lambda,\omega)=0$, $\psi(\lambda,\omega)=0$, $\tilde\varphi_n=\varphi_{i_n}$, $\tilde\psi_n=\psi_{i_n}$ для $t\in[0,s_{i_n}]$, $\tilde\varphi_n=0$, $\tilde\psi_n=0$ для $t\in]s_{i_n},\lambda]$; $x(t)=x_0+\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau+\int_0^t\psi(\tau)\,dW(\tau)$, $t\in[0,\lambda]$. Ясно, что $x(t)=x_{i_n}(t)$ для $t\in[0,s_{i_n}]$,

$$x(s_{i_n})=x_0+\int\limits_0^{s_{i_n}}\tilde\varphi_{i_n}(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{s_{i_n}}\tilde\psi_{i_n}(\tau)\,dW(\tau),\tag{2.92}$$

$\tilde\varphi_n(t,\omega)\to\varphi(t,\omega)$, $\tilde\psi_n(t,\omega)\to\psi(t,\omega)$ для всех ω, всех $t\in[0,\lambda]$; $\varphi(t,\omega)\in[[[F(t,x(t,\omega))]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$, $\psi(t,\omega)\psi^\top(t,\omega)\in[[[A(t,x(t,\omega))]_\varepsilon]^\varepsilon]^\varepsilon$ п. н. для почти всех $t\in[0,\lambda]$.

Так как $E(\int_0^\lambda\|\psi(\tau,\omega)-\tilde\psi_n(\tau,\omega)\|^2\,d\tau)\leqslant(M+1)E(\lambda-s_{i_n})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, то [предложение 1.39]

$$\int\limits_0^\lambda\tilde\psi_{i_n}(\tau,\omega)\,dW(\tau)\to\int\limits_0^\lambda\psi(\tau,\omega)\,dW(\tau)\ \text{ в }\ L_1(\Omega,R^d).\tag{2.93}$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^{s_{i_n}}\tilde\varphi_{i_n}(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^{s_{i_n}}\varphi(\tau)\,d\tau\to\int\limits_0^\lambda\varphi(\tau)\,d\tau\ \text{ п. н.}\tag{2.94}$$

Из (2.92)—(2.94) следует существование подпоследовательности $x(s_{i_{n_k}})$, сходящейся п. н. к $x(\lambda)$. А так как $x(s_{i_{n_k}})\in K(s_{i_{n_k}},x(s_{i_{n_k}}))$ п. н. и отображение K полунепрерывно сверху, то $x(\lambda)\in K(\lambda,x(\lambda))$ п. н. Заменяя последовательность i_n на подпоследовательность i_{n_k} в равенстве (2.92) и переходя к пределу при $k\to\infty$, убеждаемся, что (x,λ) — верхняя грань для цепи S. По лемме Цорна $\mathcal{E}$ допускает максимальный элемент $(\hat x,\hat s)$. Покажем, что $\hat s=T$ п. н. Предположим, что $P\{\hat s<T\}>0$. Применяя стохастическое касательное условие K) к $\hat x(\hat s)$, найдем $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки θ, $\theta\geqslant\hat s$, $P\{\theta>\hat s\}>0$, $P\{\theta-\hat s\leqslant\min\{\varepsilon,T-\hat s\}\}=1$, $(\mathcal{F}_{\hat s})$-измеримые случайные вектора $\hat v:\ \Omega\to R^d$, $\hat u:\ \Omega\to R^{d\times d}$ такие, что $\hat v\in[[F(\hat s,\hat x(\hat s))]_\varepsilon]^\varepsilon$, $\hat u\hat u^\top\in[[A(\hat s,\hat x(\hat s))]_\varepsilon]^\varepsilon$ п.н., $\hat x(\hat s)+v(\theta-\hat s)+u(W(\theta)-W(\hat s))=y(\theta)\in K(\theta,y(\theta))$ п. н.; для каждого $t\in[\hat s,\theta]$ выполняется неравенство $\|v(t-\hat s)+u(W(t)-W(\hat s)\|\leqslant\varepsilon$ п. н. Если положить $\hat x(t)=\hat x(\hat s)+\int_{\hat s}^t\hat v\,d\tau+\int_{\hat s}^t\hat u\,dW(\tau)$, $t\in[\hat s,\theta]$, то $\hat x(\theta)\in K(\theta,\hat x(\theta))$ п. н. Пара

$(\tilde{x},\theta)$, где $\tilde{x}(t) = x(t)$, $t \in [0,\hat{s}]$, $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t)$, $t \in [\hat{s},\theta]$, $\tilde{\varphi}(t,\omega) = \varphi(t,\omega)$, $\tilde{\psi}(t,\omega) = \psi(t,\omega)$ для $t \in [0,\hat{s}]$, $\tilde{\varphi}(t,\omega) = \hat{v}$, $\tilde{\psi}(t,\omega) = \hat{u}$ для $t \in]\hat{s},\theta]$, $\tilde{\varphi}(t,\omega) = 0$, $\tilde{\psi}(t,\omega) = 0$ для $t \in]\theta,T]$, $\omega \in \Omega$, процессы φ,ψ соответствуют ε-приближенному решению $(\hat{x},\hat{s})$, принадлежит $\mathcal{E}$, что противоречит максимальности $(\hat{x},\hat{s})$ в $\mathcal{E}$. Лемма 2.10 доказана.

Теорема 2.11. *Если ограниченные измеримые по Борелю многозначные функции F и G и полунепрерывное сверху отображение K удовлетворяют стохастическому касательному условию* K)*, отображения F и A полунепрерывны сверху и $A(t,x) \in \operatorname{conv}(R_+ \times R^d)$ $\forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, то для любого $x_0 \in K(0,x_0)$ существует слабое жизнеспособное решение задачи* (2.90), (2.91) *с начальным условием x_0.*

Доказательство. Согласно лемме 2.10, для каждого $\varepsilon_l = 1/l$, $l \in N$, и каждого $x_0 \in K(0,x_0)$ существует ε_l-приближенное решение (x_l,T) задачи (2.90), (2.91)

$$x_l(t) = x_0 + \int\limits_0^t \varphi_l(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \psi_l(\tau)\,dW(\tau), \quad t \in [0,T]; \tag{2.95}$$

$$\varphi_l(t,\omega) \in [[[F(t,x_l(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l},$$

$$\psi_l(t,\omega)\psi_l^{\top}(t,\omega) \in [[[A(t,x_l(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$; $x_l(T) \in K(T,x_l(T))$ п. н. и для любого t, $0 < t \leqslant T$, существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $\hat{\tau}$, $0 \leqslant t - \hat{\tau} \leqslant \varepsilon_l$, такой, что $x_l(\hat{\tau}) \in K(\hat{\tau},x_l(\hat{\tau}))$ п. н.

Так как $\sup\limits_l \sup\limits_{t\in[0,T]} E(\|x_l(t)\|^2) \leqslant C$, $\sup\limits_l E(\|x_l(t) - x_l(s)\|^4) \leqslant C|t-s|^2$, $C=$const, для любых $t,s \in [0,T]$, то из предложений 1.31, 1.32, 1.20 следует, что $P^{x_l} \overset{\text{сл.}}{\to} Q$, где Q — некоторая вероятность на $(C([0,T],R^d),\beta(C([0,T],R^d)))$, а P^{x_l} – вероятностный закон распределения для $x_l : \Omega \to C([0,T],R^d)$ в $(C([0,T],R^d),\beta(C([0,T],R^d)))$ (точнее, некоторая подпоследовательность $P^{x_{l_k}} \overset{\text{сл.}}{\to} Q$, но для простоты будем считать, что сама последовательность P^{x_l} является слабо сходящейся).

Построим систему множеств $S(i_1,\dots,i_k)$ следующим образом. Возьмем для каждого $k\in N$ $\sigma_m^{(k)}$, $m=1,2,\dots$, шары радиуса $\leqslant 2^{-(k+1)}$, покрывающие $C([0,T],R^d)$ и удовлетворяющие условиям $P^{x_l}(\partial\sigma_m^{(k)})=0$, $Q(\partial\sigma_m^{(k)})=0$ для каждых l, k, m (∂L – граница множества L). Положим для каждого k $\mathcal{D}_1^{(k)}=\sigma_1^{(k)},\dots$, $\mathcal{D}_j^{(k)}=$ $=\sigma_j^{(k)}\backslash(\sigma_1^{(k)}\bigcup\dots\bigcup\sigma_{j-1}^{(k)}),\dots$, и $S(i_1,\dots,i_k)=\mathcal{D}_{i_1}^{(k)}\bigcap\dots\bigcap\mathcal{D}_{i_k}^{(k)}$. Пусть $B_l(i_1,\dots,i_k)=\{\omega\in\Omega|\ \ x_l(\cdot,\omega)\in S(i_1,\dots,i_k)\}$. Для каждого множества $S(i_1,\dots,i_k)$ такого, что $\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)\neq\varnothing$ ($\overset{\circ}{S}$ — внутренность множества S), выберем точку $q(i_1,\dots,i_k)\in\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)$, если же $\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)=\varnothing$, $S(i_1,\dots,i_k)\neq\varnothing$, то в качестве $q(i_1,\dots,i_k)$ выберем точку из $S(i_1,\dots,i_k)$. Определим $x_l^k:\ \Omega\to C([0,T],R^d)$ следующим образом: $x_l^k(\cdot,\omega)=q(i_1,\dots,i_k)$, если $\omega\in B_l(i_1,\dots,i_k)$. Так как $\|x_l^k-x_l\|_{C([0,T],R^d)}\leqslant 2^{-k}$ п. н., то $x_l^k\to x_l$ при $k\to+\infty$, равномерно по $t\in[0,T]$ п. н. Для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ верны включения $\varphi_l(t,\omega)\in[[[[F(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}]^{2^{-k}}$, $\psi_l(t,\omega)\psi_l^\top(t,\omega)\in$ $\in[[[[A(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}]^{2^{-k}}$.

Пусть

$$H_{l,i_1,\dots,i_k}(t)=\int\limits_{B_l(i_1,\dots,i_k)}\varphi_l(t,\omega)\,d\omega,$$

$$L_{l,i_1,\dots,i_k}(t)=\int\limits_{B_l(i_1,\dots,i_k)}\psi_l(t,\omega)\psi_l^\top(t,\omega)\,d\omega.$$

Положим $\varphi_l^k(t,\omega)=H_{l,i_1,\dots,i_k}(t)/P(B_l(i_1,\dots,i_k))$, $a_l^k(t,\omega)=$ $=L_{l,i_1,\dots,i_k}(t)/P(B_l(i_1,\dots,i_k))$, если $\omega\in B_l(i_1,\dots,i_k)$ и $P(B_l(i_1,\dots,i_k))>0$ и $\varphi_l^k(t,\omega)=0$, $a_l^k(t,\omega)=0$ для остальных $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$. Согласно лемме 12 [102, с. 51], для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ выполняются включения $\varphi_l^k(t,\omega)\in$ $\in[[[[F(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}]^{2^{-k}}$, $a_l^k(t,\omega)\in[[[[A(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}]^{2^{-k}}$.

Для фиксированного k упорядочим все $(i_1,\dots,i_k)$ лексикографически. Определим интервалы $\Delta(i_1,\dots,i_k)$, $\Delta_l(i_1,\dots,i_k)$ в $[0,1[$ следующим образом (см. доказательство теоремы Скорохода): $|\Delta(i_1,\dots,i_k)|=Q(S(i_1,\dots,i_k))$, $|\Delta_l(i_1,\dots,i_k)|=P^{x_l}(S(i_1,\dots,i_k))$ ($|\Delta|$ – длина интервала Δ); если $(i_1,\dots,i_k)<(j_1,\dots,j_k)$, то интервал $\Delta(i_1,\dots,i_k)$ ($\Delta_l(i_1,\dots,i_k)$) расположен левее $\Delta(j_1,\dots,j_k)$ (соответственно $\Delta_l(j_1,\ldots,j_k)$). Положим $\hat{x}^k_n(\cdot,\omega)=q(i_1,\ldots,i_k)$, если $\omega\in\in\Delta_l(i_1,\ldots,i_k)$; $\hat{x}^k(\cdot,\omega)=q(i_1,\ldots,i_k)$, если $\omega\in\Delta(i_1,\ldots,i_k)$. Из доказательства теоремы Скорохода следует, что существуют пределы

$$\hat{x}_l(t,\omega)=\lim_{k\to\infty}\hat{x}^k_l(t,\omega),\quad \hat{x}(t,\omega)=\lim_{k\to\infty}\hat{x}^k(t,\omega),\quad \lim_{l\to\infty}\hat{x}_l(t,\omega)=\hat{x}(t,\omega),$$

равномерные по $t\in[0,T]$, п. н., кроме того, $P^{x_l}=P^{\hat{x}_l}$, $P^{\hat{x}}=Q$. Построим отображения $(t,\omega)\to\hat{v}^k_l(t,\omega)$, $(t,\omega)\to\hat{a}^k_l(t,\omega)$, $\hat{v}^k_l(t,\omega)==M_{l,i_1,\ldots,i_k}(t)/|\Delta_l(i_1,\ldots,i_k)|$, $\hat{a}^k_l(t,\omega)=L_{l,i_1,\ldots,i_k}(t)/|\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)|$, если $\omega\in\Delta_l(i_1,\ldots,i_k)$, и $|\Delta_l(i_1,\ldots,i_k)|\neq 0$; $\hat{v}^k_l(t,\omega)=0$, $\hat{a}^k_l(t,\omega)==0$ для остальных $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$. Из построения $\hat{x}^k_l$, $\hat{v}^k_l$, $\hat{a}^k_l$ вытекает, что $\hat{v}^k_l(t,\omega)\in[[[[F(t,\hat{x}^k_l(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}]^{2^{-k}}$, $\hat{a}^k_l(t,\omega)\in\in[[[[A(t,\hat{x}^k_l(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}]^{2^{-k}}$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$, и для любого t, $0<t\leqslant T$, существует отображение $\hat{\hat{\tau}}:\Omega\to[0,T]$, $0\leqslant t-\hat{\hat{\tau}}\leqslant\varepsilon_l$, такое, что

$$\hat{x}_l(\hat{\hat{\tau}})\in K(\hat{\hat{\tau}},\hat{x}_l(\hat{\hat{\tau}})\ \text{ п. н.} \tag{2.96}$$

Последовательности $\hat{v}^k_l$, $\hat{a}^k_l$, $k\geqslant 1$, для каждого фиксированного $l\in\in N$, согласно теореме Дистеля (предложение 1.13), относительно слабо компактны соответственно в $L_1([0,T]\times\Omega,R^d)$, $L_1([0,T]\times\Omega,R^{d\times d})$. Пусть $\hat{v}_l$, $\hat{a}_l$ их слабые пределы (считаем, что сами последовательности являются сходящимися). Согласно предложению 1.51, $\hat{v}_l(t,\omega)\in\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{\text{co}}\bigcup_{i=m}^{\infty}\hat{v}^i_l(t,\omega)$, $\hat{a}_l(t,\omega)\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{\text{co}}\bigcup_{i=m}^{\infty}\hat{a}^i_l(t,\omega)$. Отсюда и из полунепрерывности сверху отображений $(t,x)\to[[[F(t,x)]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}$, $(t,x)\to[[[A(t,x)]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}$ следует, что для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ $\hat{v}_l(t,x)\in[[[F(t,\hat{x}_l(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}$, $\hat{a}_l(t,x)\in\in[[[A(t,\hat{x}_l(t,\omega))]_{1/l}]^{1/l}]^{1/l}$. Аналогично последовательности $\hat{v}_l(t,\omega)$, $\hat{a}_l(t,\omega)$ слабо сходятся соответственно в $L_1([0,T]\times\Omega,R^d)$, $L_1([0,T]\times\times\Omega,R^{d\times d})$ к $\hat{v}(t,\omega)$, $\hat{a}(t,\omega)$ и $\hat{v}(t,\omega)\in F(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\hat{a}(t,\omega)\in\in A(t,\hat{x}(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$.

Пусть $\hat{\mathfrak{F}}_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma(\hat{x}(s)|\ 0\leqslant s\leqslant t+\varepsilon)$, где $\sigma(\hat{x}(s)|\ 0\leqslant s\leqslant t+\varepsilon)$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные векторы $\hat{x}(s)$, $0\leqslant s\leqslant t+\varepsilon$, и пусть $\tilde{v}=E(\hat{v}|\hat{\mathfrak{F}}_t)$, $\tilde{a}=E(\hat{a}|\hat{\mathfrak{F}}_t)$ — измеримые условные математические ожидания процессов $\hat{v}$, $\hat{a}$ относительно потока $\hat{\mathfrak{F}}_t$. Для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ $\tilde{v}(t,\omega)\in\in F(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\hat{a}(t,\omega)\in A(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\tilde{a}(t,\omega)\in A(t,\hat{x}(t,\omega))$ [предложение 1.49].

Для любых $s, t,\ 0 \leqslant s < t \leqslant T,$ для любой дважды дифференцируемой функции $h : R^d \to R,$ ограниченной вместе с частными производными до второго порядка включительно, и для любой непрерывной ограниченной $\beta_s(C([0,T],R^d))$-измеримой функции $z : C([0,T],R^d) \to R$ из (2.95), применяя формулу Ито, имеем

$$E\Biggl(\biggl(h(x_l(t)) - h(x_l(s)) - \int\limits_s^t \biggl(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 h(x_l(\tau))}{\partial x^2}\psi_l(\tau)\psi_l^\top(\tau)) + \frac{\partial h(x_l(\tau))}{\partial x}\varphi_l(\tau)\biggr)d\tau\biggr)z(\hat{x})\Biggr) = 0. \tag{2.97}$$

Используя свойства процессов $\tilde{v},\ \tilde{a},\ \hat{v},\ \hat{a},\ \hat{v}_l,\ \hat{v}_l^k,\ \hat{x},\ \hat{x}_l,\ \hat{x}_l^k,\ \varphi_l^k,\ a_l^k,$ $x_l^k,\ \varphi_l,\ \psi_l,\ x_l,$ из (2.97) получаем

$$E\Biggl(\biggl(h(\hat{x}(t)) - h(\hat{x}(s)) - \int\limits_s^t \biggl(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^2}\tilde{a}(\tau)) + \frac{\partial h(\hat{x}(\tau))}{\partial x}\tilde{v}(\tau)\biggr)d\tau\biggr)z(\hat{x})\Biggr) = \lim_{l\to\infty}\Biggl[E\Biggl(\biggl(h(\hat{x}_l(t)) - h(\hat{x}_l(s)) +$$

$$+ \lim_{k\to\infty}\int\limits_s^t \biggl(\frac{1}{2}tr(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)}\frac{\partial^2 h(q(i_1,\ldots,i_k))}{\partial x^2}L_{l,i_1,\ldots,i_k}(\tau)) +$$

$$+ \sum_{(i_1,\ldots,i_k)}\frac{\partial h(q(i_1,\ldots,i_k))}{\partial x}H_{l,i_1,\ldots,i_k}(\tau)\biggr)d\tau\biggr)z(\hat{x}_l)\Biggr)\Biggr] =$$

$$= \lim_{l\to\infty}E\Biggl(\biggl(h(x_l(t)) - h(x_l(s)) - \int\limits_s^t \biggl(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 h(x_l(\tau))}{\partial x^2}\psi_l(\tau)\psi_l^\top(\tau)) + \frac{\partial h(x_l(\tau))}{\partial x}\varphi_l(\tau)\biggr)d\tau\biggr)z(x_l)\Biggr) = 0. \tag{2.98}$$

Так как равенство (2.98) выполняется для любых функций h и z указанного вида, то процесс

$$h(\hat{x}(t)) - h(\hat{x}(0)) - \int\limits_0^t \biggl(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^2}\tilde{a}(\tau)) + \frac{\partial h(\hat{x}(\tau))}{\partial x}\tilde{v}(\tau)\biggr)d\tau$$

является $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$-мартингалом. Отсюда вытекает (предложение 1.37), что на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{P})$ и $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и $\hat{\mathfrak{F}}_t$ можно определить d-мерное $(\mathfrak{F}_t)$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ такое, что для каждого $t \in [0,T]$ $\quad \hat{x}(t) - x_0 - \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau = \int_0^t \tilde{u}(\tau)\, d\tilde{W}(\tau)$ п. н., где $\tilde{u}(t,\omega) = \sqrt{\tilde{a}(t,\omega)}$. Включение $\hat{x}(t) \in K(t, \hat{x}(t))$ п. н. $\forall t \in [0,T]$ вытекает из (2.96) и полунепрерывности сверху отображения K. Теорема 2.11 доказана.

2.6. Теоремы существования решений стохастических дифференциальных уравнений с отражением от границы

В этом параграфе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau + \int_0^t g(\tau, x(\tau))\, dW(\tau) + K(t), \tag{2.99}$$

в области D с отражением от границы; здесь $x_0 \in \bar{D}$; $x(t)$ — отраженный процесс на $\bar{D}$; K — процесс с ограниченной вариацией, причем вариация $|K|$ возрастает лишь когда $x(t) \in \partial D$; $f : R_+ \times R^d \to R^d$ и $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ — измеримые по Борелю ограниченные функции.

Будем рассматривать области D в R^d, удовлетворяющие условиям Лионса — Шнитмана. Через $|K|_t$ обозначаем вариацию отображения $K:\ R_+ \to R^d$ на $[0,t]$.

Определение 2.13. *Под слабым решением уравнения* (2.99) *в области D с отражением от границы понимаем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t)$, $t \in R_+$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, который $(\mathfrak{F}_t)$-согласован, $x(t) \in \bar{D}$ для любого $t \in R_+$ п. н., и удовлетворяющий условиям:*

1) *существует $(\mathfrak{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$ с $W(0) = 0$ п. н.;*

2) *существует непрерывный* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованный процесс* $K(t)$, $t \in R_+$, $K(0) = 0$ *п. н., имеющий ограниченную вариацию и*

$$K(t) = \int\limits_0^t n(\tau)\, d|K|_\tau, \quad |K|_t = \int\limits_0^t 1_{\partial D}(x(\tau))\, d|K|_\tau, \tag{2.100}$$

где $n(\tau) \in N_{x(\tau)}$, *если* $x(\tau) \in \partial D$;

3) *с вероятностью* 1 *для каждого* $t \in R_+$ *выполняется равенство* (2.99).

Теорема 2.12. *Если отображения* f *и* g *измеримы по Борелю и ограничены, компоненты функций* $f, \sigma = gg^\top$ *удовлетворяют условию* C), *то для любой области* $D \subset R^d$, *удовлетворяющей условиям Лионса — Шнитмана, для любого* $x_0 \in \bar{D}$ *уравнение* (2.99) *имеет слабое решение в области* D *с отражением от границы.*

Доказательство. Представим $\sigma(t, x)$ в виде $\sigma = T\Lambda T^\top$ и положим $\sigma_n = T\Lambda_n T^\top$, где Λ_n — диагональная матрица с элементами $\max\{\lambda_{ii}, 1/n\}$ на диагонали. Для каждого $n \in N$ справедливо неравенство $\det \sigma_n \geqslant \delta(n) > 0$, кроме того, для каждой точки $(t, x) \in R_+ \times R^d$ имеет место стремление

$$\sigma_n(t, x) \to \sigma(t, x) \ \text{ при } \ n \to +\infty. \tag{2.101}$$

Согласно предложению 1.54, для каждого $n \in N$ для уравнения (2.99) с $g = g_n = T\sqrt{\Lambda_n}$ существуют вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ с потоком $\mathcal{F}_{nt}$, $(\mathcal{F}_{nt})$-броуновский процесс $W_n(t)$ и пара непрерывных $(\mathcal{F}_{nt})$-согласованных процессов x_n, K_n таких, что п. н. $\forall t \in R_+$

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t g_n(\tau, x_n(\tau))\, dW_n(\tau) + K_n(t), \tag{2.102}$$

$x_n(t) \in \bar{D}$ п. н., $K_n(t)$ — процесс с ограниченной вариацией и такой, что $K_n(0) = 0$ п. н., $K_{nt} = \int_0^t n(\tau)\, d|K_n|_\tau$, $|K_n|_t = \int_0^t 1_{\partial D}(x_n(\tau))\, d|K_n|_\tau$, $n(\tau) \in N_{x_n(\tau)}$, если $x_n(\tau) \in \partial D$.

Из леммы 2.3 [162, с. 289] следует, что последовательность $(x_n, K_n, |K_n|)$ плотна в $C(R_+, R^{2d+1})$. Отсюда и из теоремы Скорохода (предложение 1.23) вытекает существование подпоследовательности n_i, вероятностного пространства $(\widehat{\Omega},\ \widehat{\mathfrak{F}},\ \widehat{P})$ и непрерывных процессов $\widehat{x},\ \widehat{x}_{n_i},\ \widehat{K},\ \widehat{K}_{n_i},\ \widehat{B}$ таких, что $\widehat{x}_{n_i},\ \widehat{K}_{n_i},\ |\widehat{K}_{n_i}|$ сходятся равномерно на каждом компактном промежутке из R_+ соответственно к $\widehat{x}$, $\widehat{K},\ \widehat{B}$ п. н. и $P^{x_{n_i}} = P^{\widehat{x}_{n_i}},\ P^{K_{n_i}} = P^{\widehat{K}_{n_i}}$ (для упрощения обозначений сами последовательности $\widehat{x}_n,\ \widehat{K}_n,\ |\widehat{K}_n|$ считаем сходящимися).

Пусть $y_n(t) = x_n(t) - K_n(t),\ \widehat{y}_n(t) = \widehat{x}_n(t) - \widehat{K}_n(t),\ \widehat{y}(t) = = \widehat{x}(t) - \widehat{K}(t)$, тогда для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $h : R^d \to R$, ограниченной вместе с частными производными до второго порядка включительно, для любых $s, t \in R_+$, $s \leqslant t$, для любой непрерывной ограниченной $\beta_s(C(R_+, R^d))$-измеримой функции $z : C(R_+, R^d) \to R$, используя формулу Ито, из равенств (2.102) имеем

$$E_n\Bigg(\Bigg(h(y_n(t)) - h(y_n(s)) - \int\limits_s^t \bigg(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial^2 h(x_n(\tau))}{\partial x^2}\sigma_n(\tau, x_n(\tau))\Big)+$$

$$+\frac{\partial h(x_n(\tau))}{\partial x} f(\tau, x_n(\tau))\bigg) d\tau\Bigg) z(x_n)\Bigg) = 0. \tag{2.103}$$

Из равенств (2.103), используя такие же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.2, имеем

$$E\Bigg(\Bigg(h(\widehat{y}(t)) - h(\widehat{y}(s)) - \int\limits_s^t \bigg(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^2}\sigma(\tau, \widehat{x}(\tau))\Big)+$$

$$+\frac{\partial h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x} f(\tau, \widehat{x}(\tau))\bigg) d\tau\Bigg) z(\widehat{x})\Bigg) = 0,$$

поэтому процесс $h(\widehat{y}(t)) - h(\widehat{y}(0)) -$

$$-\int\limits_0^t \bigg(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^2}\sigma(\tau, \widehat{x}(\tau))\Big) + \frac{\partial h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x} f(\tau, \widehat{x}(\tau))\bigg) d\tau$$

является $\widehat{\mathfrak{F}}_t$-мартингалом. Используя предложение 1.37, на расширении $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{P})$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}_t$ пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с $\widehat{\mathfrak{F}}_t$ определим $(\widetilde{\mathfrak{F}}_t)$-броуновское движение $\widetilde{W}(t)$ такое, что $\forall t \in R_+$

$$\widehat{y}(t) - \widehat{y}(0) - \int_0^t f(\tau, \widehat{x}(\tau))\, d\tau = \int_0^t g(\tau, \widehat{x}(\tau))\, d\widetilde{W}(\tau) \quad \text{п. н.}$$

Согласно предложению 4 [165, с. 185], процессы $\widehat{x}(t)$, $\widehat{K}(t)$ являются такими, что $\forall t \in R_+$ $x(t) \in \bar{D}$ п. н., $\widehat{K}(0) = 0$ п. н., $\widehat{K}$ имеет ограниченную вариацию, удовлетворяет условиям (2.100) и $\widehat{y}(t) = \widehat{x}(t) + \widehat{K}(t)$. Таким образом, $\widehat{x}$ – слабое решение уравнения (2.99) в области D с отражением от границы. Теорема 2.12 доказана.

2.7. Одномерные стохастические дифференциальные уравнения

Теоремы существования и единственности для одномерных стохастических дифференциальных уравнений могут быть усилены. Для уравнений без сноса Г. В. Эндельбергом и В. Шмидтом даже получены критерии существования слабых решений. Здесь мы приводим эти результаты без доказательства.

Для измеримой по Борелю функции $g : R \to R$ определим множества $M_g = \Big\{x \in R \Big| \int_{U(x)} g^{-2}(y)dy = \infty$ для любой открытой окрестности $U(x)$ точки $x\Big\}$, $N_g = \{x \in R \big| g(x) = 0\}$.

Слабое решение $x(t)$ называется тривиальным, если $x(t) = x_0 \in R$ $\forall t \geqslant 0$, п. н.

Предложение 2.11 [128, 129].

I) *Для любой вероятности* ν *на* $(R, \beta(R))$ *уравнение*

$$dx(t) = g(x(t))dW(t) \tag{2.104}$$

имеет слабое решение с начальной вероятностью ν *тогда и только тогда, когда выполняется включение* $M_g \subset N_g$.

II) *Для любой вероятности* ν *на* $(R, \beta(R))$ *уравнение* (2.104) *имеет нетривиальное слабое решение с начальной вероятностью* ν *тогда и только тогда, когда отображение* g^{-2} *локально интегрируемо на* R.

III) *У любого слабого решения уравнения* (2.104) *отсутствуют взрывы.*

IY) *Уравнение* (2.104) *обладает свойством слабой единственности, если и только если* $g^2(x) > 0$ $\forall x \in R$.

Предложение 2.12.

1. *Пусть: функции* $f : R_+ \times R \to R$ *и* $g : R_+ \times R \to R$ *— измеримы по Борелю, ограничены и удовлетворяют условиям*

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant \rho_1(|x-y|), \quad |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \rho_2(|x-y|)$$

$\forall (t,x),(t,y) \in R_+ \times R$, *где* $\rho_1, \rho_2 \in C(R_+, R_+)$, $\rho_1(0) = 0, \rho_2(0) = 0$, ρ_1, ρ_2 *возрастающие выпуклые вверх функции; при любом* $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{du}{\rho_1^2(u)} = \infty, \quad \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{du}{\rho_2(u)} = \infty.$$

Тогда уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) \tag{2.105}$$

обладает свойством сильного существования и потраекторной единственности [170, 171, 93, с. 45].

2. *Пусть: функции* f *и* g *— измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста;* g *удовлетворяет условию Гельдера по* x *с показателем* $1/2$; $g^2(t,x) \geqslant \lambda > 0$ $\forall (t,x)$. *Тогда уравнение* (2.105) *обладает свойством сильного существования и потраекторной единственности* [23].

3. *Пусть:*

$$g(t,x) = g_1(t,x) g_2(t, g_3(x)), \tag{2.106}$$

где g_1, g_2 *и* g_3 *— ограниченные и измеримые по Борелю функции;* g_1 *и* g_2 *удовлетворяют условию Гельдера*

$$|g_1(t,x) - g_1(t,y)| + |g_2(t,x) - g_2(t,y)| \leqslant L|x-y|^{1/2}, \tag{2.107}$$

где $t \geqslant 0, x, y \in R, L = const$;

$$\inf_{t,x} g_2(t,x) > 0; \tag{2.108}$$

g_3 *— функция локально ограниченной вариации, т. е. для любого* $N > 0$

$$\mathop{var}_{[-N,N]} g_3 < \infty; \tag{2.109}$$

функция $f(t,x)$ *имеет вид* $f(t,x) = f_1(t,x) + g(t,x) f_2(t,x)$, *где* f_1 *и* f_2 *измеримые по Борелю и ограниченные функции, причем* f_1 *удовлетворяет условию Липшица по* x. *Тогда уравнение* (2.105) *обладает* *свойством сильного существования и потраекторной единственности* [93, с. 48].

4. *Пусть функции* $f(t,x)$ *и* $g(t,x)$ *удовлетворяют условиям* (2.106) — (2.109) *и, кроме того,* f *непрерывна по* x. *Тогда уравнение* (2.105) *обладает свойством сильного существования* [80, 93, с. 50].

Следствие 2.4 (из следствия 2.3). *Пусть*: *отображения* $f : R \to R$ *и* $f^{'}$ *— кусочно непрерывны; для всех* $x \in R$ $\lim\limits_{x^* \to x-0} f(x^*) \geqslant f(x) \geqslant \lim\limits_{x^* \to x+0} f(x^*)$; *отображения* q, $g : R \to R$ *удовлетворяют локальному условию Липшица. Тогда включение* (2.82), $d = 1$, *обладает свойством сильного существования и потраекторной единственности.*

Пусть $I =]l, r[\,, -\infty \leqslant l < r \leqslant +\infty$, и пусть $f(x), g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции и $g^2(x) > 0 \ \ \forall x \in I$. При этих условиях уравнение (2.105) обладает свойством сильного существования и потраекторной единственности. Пусть $x_0 \in I$ и $x_{x_0}(t)$ — сильное решение уравнения (2.105) с начальным условием $x(0) = x_0$ и пусть $e = \lim\limits_{n \uparrow \infty} \tau_n$, где $\tau_n = \inf\{t | x_{x_0}(t) \subsetneq [a_n, b_n]\}$, $l < a_n < b_n < r$, $a_n \downarrow l, b_n \uparrow r$. Введем функцию

$$s(x) = \int\limits_c^x \exp(-\int\limits_c^y \frac{2f(z)}{g^2(z)} dz) dy, \quad c \in I.$$

Функция $s(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, строго возрастающей на I и

$$\frac{1}{2} g^2(x) \frac{d^2 s(x)}{dx^2} + f(x) \frac{ds(x)}{dx} = 0 \quad \text{на} \quad I.$$

Предложение 2.13 [8, с. 351–355]. *Пусть* $s(l+0) = \lim\limits_{x \downarrow l} s(x)$, $s(r-0) = \lim\limits_{x \uparrow r} s(x)$.

1. *Если* $s(l+0) = -\infty$, $s(r-0) = \infty$, *то*

$$P(e = \infty) = P(\limsup_{t \uparrow \infty} x_{x_0}(t) = r) = P(\liminf_{t \uparrow \infty} x_{x_0}(t) = l) = 1 \quad \forall x_0 \in I.$$

2. *Если* $s(l+0) > -\infty$, $s(r-0) = \infty$, *то*

$$P(\lim_{t \uparrow e} x_{x_0}(t) = l) = P(\sup_{t < e} x_{x_0}(t) < r) = 1 \quad \forall x_0 \in I.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если поменять местами l *и* r.

3. *Если* $s(l+0) > -\infty$, $s(r-0) < \infty$, *то*

$$P(\lim_{t\uparrow e} x_{x_0}(t) = l) = 1 - P(\lim_{t\uparrow e} x_{x_0}(t) = r) = \frac{s(r-0) - s(x_0)}{s(r-0) - s(l+0)} \quad \forall x_0 \in I.$$

Пример 2.7. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = g(x(t))dW(t), \quad g(x) = |x|^a.$$

Если $a \geqslant \frac{1}{2}$, тогда функция g^{-2} не интегрируема в любой окрестности нуля и, следовательно, не существует других слабых решений, кроме тривиального, с начальным условием $x_0 = 0$. Если $0 < a < \frac{1}{2}$, тогда g^{-2} локально интегрируема. Уравнение имеет бесконечное множество различных слабых решений, стартующих из нуля [8, p. 292].

Пример 2.8 [106]. $dx(t) = g(x(t))dW(t), x(0) = 0,$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком $\mathcal{F}_t$, $W(t)$— $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение. Процессы $x(t) = W(t)$, $x(t) \equiv 0, t \geqslant 0$, являются сильными решениями [106]. Уравнение не удовлетворяет условиям ни потраекторной, ни слабой единственности.

Пример 2.9 [8, с. 157–158]. $dx(t) = g(x(t))dW(t)$, $g(x) = 1$, если $x > 0; g(x) = -1$, если $x \leqslant 0$; $x(0) = 0$.

Пусть $B(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$. Положим $x(t) = B(t)$ и $W(t) = \int_0^t g(B(\tau))dB(\tau)$. Тогда $W(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением. Процесс $x(t)$ с броуновским движением $W(t)$ является слабым решением на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $\mathcal{F}_t$. Процесс $x = -x(t)$ вместе с $W(t)$— также слабое решение, следовательно, уравнение не удовлетворяет условиям потраекторной единственности слабых решений. По теореме 2.11 уравнение обладает свойством слабой единственности. Известно, что уравнение не имеет сильных решений [8, с. 158].

ГЛАВА 3
СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВКЛЮЧЕНИЙ

3.1. Зависимость решений стохастических дифференциальных уравнений от начальных условий

Исследование свойств решений стохастических дифференциальных уравнений начинаем с доказательства теоремы о зависимости момента взрыва от начальных условий, затем устанавливаем теоремы о зависимости решений от начальных условий для стохастических дифференциальных уравнений и включений. В конце параграфа строится полудинамическая система, соответствующая ССДУ.

На множестве $[0,\infty]$ введем метрику $\rho(\tau,\tau^1) = \left|\frac{\tau}{1+\tau} - \frac{\tau^1}{1+\tau^1}\right|$ (считаем, что $\frac{\tau}{1+\tau} = 1$, если $\tau = \infty$). Пусть $\mathcal{H}$ — совокупность всех вероятностей на $([0,\infty],\beta([0,\infty]))$, l — метрика Леви — Прохорова на $\mathcal{H}$, а $\mathcal{P}$ — совокупность всех вероятностей на $(R^d,\beta(R^d))$, d — метрика Леви — Прохорова на $\mathcal{P}$. Через $P^{e(x_\nu)}$ обозначим вероятностный закон на $([0,\infty],\beta([0,\infty]))$ момента взрыва $e(x_\nu)$ слабого решения x_ν уравнения

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) \tag{3.1}$$

с начальной вероятностью $\nu \in \mathcal{P}$.

Теорема 3.1 (о зависимости момента взрыва от начальных условий). *Пусть: функции* $f:\ R_+ \times R^d \to R^d$ *и* $g:\ R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ *— локально ограничены и измеримы по Борелю; компоненты функций* $f(t,x)$ *и* $\sigma(t,x) = g(t,x)g^\top(t,x)$ *удовлетворяют условию* С). *Тогда для любых* $\nu \in \mathcal{P}$ *и* $\xi > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что* $\forall \nu^*$, $d(\nu,\nu^*) \leqslant \delta$, *для любого слабого решения* x_{ν^*} *с начальной вероятностью* ν^* *уравнения* (3.1) *найдется слабое решение* x_ν *уравнения* (3.1) *с начальной вероятностью* ν *такое, что* $l(P^{e(x_\nu)}, P^{e(x_{\nu^*})}) \leqslant \xi$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\exists \nu \in \mathcal{P}$, $\exists \xi_0 > 0$, $\forall n \in N$, $\exists \nu_n$, $l(\nu, \nu_n) \leqslant 1/n$, существует слабое решение $x_{n\nu_n}$ уравнения (3.1) такое, что для любого слабого решения x_ν с начальной вероятностью ν уравнения (3.1) выполняется

$$l(P^{e(x_\nu)}, P^{e(x_{n\nu_n})}) > \xi_0. \tag{3.2}$$

Покажем, что множество вероятностей $\nu_n, n \geqslant 1$, относительно компактно в $(\mathcal{P}, d)$. Достаточно показать, что множество $\nu_n, n \geqslant 1$, плотное. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существуют компакт K_1 в R^d и номер n_0 такие, что $\nu_n(K_1) \geqslant 1 - \varepsilon/2 \quad \forall n \geqslant n_0$. Множество $\nu_n, 1 \leqslant n \leqslant n_0$, конечно, следовательно, плотное, т. е. существует такой компакт K_2, что $\nu_n(K_2) \geqslant 1 - \varepsilon/2 \ \forall n, 1 \leqslant n \leqslant n_0$. Теперь видим, что $\nu_n(K_1 \bigcup K_2) \geqslant 1 - \varepsilon$ $\forall n \geqslant 1$, т. е. множество $\nu_n, n \geqslant 1$, плотное.

Возьмем последовательность $a_m' \underset{m\to\infty}{\uparrow} \infty$ и определим $\tau_n^m = \inf\{t | \ \|x_{n\nu_n}(t)\| > a_m'\}$, $x_n^m(t) = x_{n\nu_n}(t \wedge \tau_n^m)$. При каждом n последовательность τ_n^m является возрастающей и $\lim\limits_{m\to+\infty} \tau_n^m = e(x_{n\nu_n})$. Отсюда и из неравенства (3.2) вытекает, что

$$l(P^{e(x_\nu)}, P^{\tau_n^m}) > \xi_0/2 \tag{3.3}$$

для всех достаточно больших m и для всех слабых решений x_ν уравнения (3.1). Пусть $\Psi_k = ((x_k^1, \tau_k^1), (x_k^2, \tau_k^2), \ldots, (x_k^m, \tau_k^m), \ldots)$, $k \geqslant 1$. По лемме 2.7, из последовательности P^{Ψ_k}, $k \geqslant 1$, можно выбрать подпоследовательность $P^{\Psi_{k_n}}$ последовательности P^{Ψ_k} (для упрощения обозначений вместо k_n будем писать n) и можно построить процессы $\varepsilon_n = ((z_n^1, \varrho_n^1), \ldots, (z_n^m, \varrho_n^m), \ldots)$ и $\varepsilon = ((z^1, \varrho^1), \ldots, (z^m, \varrho^m), \ldots)$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ так, что процессы $z_n^m(t)$, $z^m(t)$ являются непрерывными, $P^{\varepsilon_n} = P^{\Psi_n}$, $z_n^m(t) \underset{n\to\infty}{\to} z^m(t)$ равномерно на каждом компакте из R_+ п. н. и $\varrho_n^m \underset{n\to\infty}{\to} \varrho^m$ п. н. Кроме того, $z^m(t) = z^{m+1}(t)$ при $t < \varrho^m$, $\varrho^m \leqslant \varrho^{m+1}$. Пусть $e = \lim\limits_{m\to\infty} \varrho^m$. Определим процесс $z(t)$ следующим образом: $z(t) = z^m(t)$ для $t \leqslant \varrho^m$, $\varrho^m < \infty$, $z(t) = z^m(t)$ для $t < \varrho^m$, $\varrho^m = \infty$, $z(t) = 0$ при $t \geqslant e$. Процесс $z(t)$ удовлетворяет условию $\limsup\limits_{t\uparrow e} \|z(t)\| = \infty$ для $e < \infty$. Обозначим через $\sigma_{t+\epsilon}^m$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $z^m(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t + \epsilon$. Пусть $\mathcal{F}_{m,t} = \bigcap_{\epsilon>0} \sigma_{t+\epsilon}^m$,

$\mathcal{F}_t = \bigvee\limits_m \mathcal{F}_{m,t}$. Тогда процесс $z(t)1_{[0,e)}(t)$ $(\mathcal{F}_t)$-согласован и имеет непрерывные траектории при $t < e$. По лемме 2.9, процесс $z(t)$ является слабым решением уравнения (3.1). Из приведенных построений следует $P^e = \lim\limits_{m\to\infty} P^{\varrho^m}$, $P^{\varrho^m} = \lim\limits_{n\to\infty} P^{\varrho_n^m}$, $P^{\varrho_n^m} = P^{\tau_n^m}$, что противоречит неравенству (3.3). Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2 (о зависимости слабых решений от начальных условий). *Пусть*: *отображения* $f: R_+ \times R^d \to R^d$ *и* $g: R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ *— локально ограничены и измеримы по Борелю*; *компоненты функций* $f(t,x)$ *и* $\sigma(t,x) = g(t,x)g^\top(t,x)$ *удовлетворяют условию* C); $\nu \in \mathcal{P}$; *у всех слабых решений уравнения* (3.1) *с начальными вероятностями* ν^* *из некоторой окрестности вероятности* ν *отсутствуют взрывы. Тогда для любых* $t_1 > 0$ *и* $\xi > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого* $\nu^* \in \mathcal{P}$, $d(\nu,\nu^*) \leqslant \delta$, *для любого слабого решения* x^* *с начальной вероятностью* ν^* *уравнения* (3.1) *найдется слабое решение* x *на промежутке* $[0,t_1]$ *уравнения* (3.1) *с начальной вероятностью* ν *такое, что* $d(P^{x^*(t_1)}, P^{x(t_1)}) \leqslant \xi$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\exists t_1 > 0$, $\exists \xi_0 > 0$, $\forall n \in N$, $\exists \nu_n$, $d(\nu,\nu_n) \leqslant 1/n$, существует слабое решение $(x_n, \Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n, \mathcal{F}_{nt}, W_n(t))$, $P^{x_n(0)} = \nu_n$, уравнения (3.1) такое, что для любого слабого решения x на промежутке $[0,t_1]$ уравнения (3.1) с начальной вероятностью ν выполняется неравенство

$$d(P^{x(t_1)}, P^{x_n(t_1)}) > \xi_0. \tag{3.4}$$

Покажем, что последовательность $x_n(t)$ удовлетворяет условиям предложения 1.31. Для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \in R^d$ такой, что $\nu(K) > 1-\varepsilon$. Отсюда и из соотношения $d(\nu,\nu_n) \leqslant 1/n$ вытекает, что $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_n P_n\{\|x_n(0)\| > N\} = 0$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Пусть $\sigma_n^m = \inf\big\{t \big| \|x_n(t)\| > m\big\}$. Для каждого фиксированного $m \in N$ для любых $s,t \in [0,t_1]$ имеем

$$E(\|x_n(t\wedge\sigma_n^m) - x_n(s\wedge\sigma_n^m)\|^4) \leqslant c_1\Bigg(E\Bigg(\Bigg\|\int\limits_{s\wedge\sigma_n^m}^{t\wedge\sigma_n^m} f(\tau, x_n(\tau))\,d\tau\Bigg\|^4\Bigg) +$$

$$+E\left(\left\|\int\limits_{s\wedge\sigma_n^m}^{t\wedge\sigma_n^m} g(\tau,x_n(\tau))\,dW_n(\tau)\right\|^4\right)\right)\leqslant c_2|t-s|^2,$$

c_1, $c_2=$const, следовательно, для любого $\Upsilon>0$ существует $h_{m,\Upsilon}$ (предложение 1.32) такое, что $\forall h$, $0<h\leqslant h_{m,\Upsilon}$,

$$\sup_n P_n\left\{\max_{|t-s|\leqslant h,\,t,s\in[0,t_1]}\|x_n(t\wedge\sigma_n^m)-x_n(s\wedge\sigma_n^m)\|>\Upsilon\right\}\leqslant\frac{\delta}{3}. \qquad (3.5)$$

Покажем, что существует $m>0$ такое, что $\forall n\geqslant 1$

$$P_n\{\sigma_n^m\leqslant t_1\}\leqslant\frac{2\delta}{3}. \qquad (3.6)$$

Предположим противное: для любого $m>0$ существует $n(m)\in N$, что

$$P_{n(m)}\{\sigma_{n(m)}^m\leqslant t_1\}>\frac{2\delta}{3}. \qquad (3.7)$$

Рассмотрим последовательность слабых решений $x_{n(m)}(t)$. Пусть $\tau_{n(m)}^i=\inf\{t|\|x_{n(m)}(t)\|>i\}$. Применяя леммы 2.7—2.9 к последовательности

$$\Psi_{n(m)}=((x_{n(m)}^1,\tau_{n(m)}^1),(x_{n(m)}^2,\tau_{n(m)}^2),\ldots,(x_{n(m)}^i,\tau_{n(m)}^i),\ldots),m=1,2,\ldots,$$

построим слабое решение уравнения (3.1) со взрывом, что вытекает из (3.7), но это противоречит условию теоремы.

Для каждого $\omega\in\{\sigma_n^m\geqslant t_1\}$ для $t,s\in[0,t_1]$ имеем

$$\|x_n(t\wedge\sigma_n^m)-x_n(s\wedge\sigma_n^m)\|=\|x_n(t)-x_n(s)\|. \qquad (3.8)$$

Из соотношений (3.5), (3.6), (3.8) следует, что для любого $\Upsilon>0$

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_n P_n\left\{\max_{|t-s|\leqslant h,\,t,s\in[0,t_1]}\|x_n(t)-x_n(s)\|>\Upsilon\right\}=0. \qquad (3.9)$$

Согласно предложениям 1.31, 1.20, существует подпоследовательность x_{n_k} последовательности x_n такая, что $P^{x_{n_k}}\overset{\text{сл.}}{\to}\theta$, где P^{x_n} — вероятностный закон для x_n, а θ — некоторая вероятность на $(C([0,t_1],R^d),\beta(C([0,t_1],R^d))$, (в дальнейшем считаем, что сама последовательность P^{x_n} слабо сходится к θ). Используя предложение 1.37, построим вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и определенные на нем случайные величины X^*, $X_n^*, n \geqslant 1$, со значениями в $C([0,t_1],R^d)$ такие, что

$$X_n^* \overset{\text{п. н.}}{\to} X^*, \quad P^{X_n^*} = P^{x_n}, \quad P^{X^*} = \theta.$$

Используя доказательство леммы 2.9, на расширении $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal F}, \tilde P)$ с потоком $\tilde{\mathcal F}_t$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal F, P)$ с потоком $\mathcal F_t$ можно доказать существование такого $(\tilde{\mathcal F}_t)$-броуновского движения $\tilde W(t)$ с $\tilde W(0) = 0$ п. н., что $(X^*(t), \tilde\Omega, \tilde{\mathcal F}, \tilde P, \tilde{\mathcal F}_t, \tilde W(t))$ – слабое решение на промежутке $[0,t_1]$ уравнения (3.1). Существование этого решения противоречит неравенству (3.4). Теорема 3.2 доказана.

Через $H_{t_1}(Y)$ обозначим множество вероятностных законов $P^{x(t_1)}$, соответствующих всевозможным слабым решениям уравнения (3.1) с начальными вероятностями $\nu \in Y \subset \mathcal P$, т. е. $P^{x(0)} = \nu \in Y$.

Теорема 3.3. *Пусть: отображения f и g — локально ограничены и измеримы по Борелю; компоненты функций $f(t,x)$ и $\sigma(t,x) = g(t,x)g^\top(t,x)$ удовлетворяют условию* C); *Y — компактное множество в $(\mathcal P, d)$; у всех слабых решений уравнения* (3.1) *с начальными вероятностями $\nu^* \in Y$ отсутствуют взрывы. Тогда для каждого $t_1 > 0$ множество $H_{t_1}(Y)$ является компактным подмножеством пространства $(\mathcal P, d)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2, для любой вероятности $\nu \in Y$ существует слабое решение x уравнения (3.1) с $P^{x(0)} = \nu$. Возьмем последовательность $P^{x_n} \in H_{t_1}(Y)$. Так как Y — компактное множество, то, согласно теореме Прохорова (предложение 1.20), $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_n P_n\{\|x_n(0)\| > N\} = 0$. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3.2, можно показать, что некоторая подпоследовательность $P^{x_{n_j}}$ стремится к вероятности $Q \in \mathcal P$ и $P^{x(t_1)} = Q$ для некоторого слабого решения x уравнения (3.1), что означает компактность множества $H_{t_1}(Y)$.

Рассмотрим теперь стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in F(t,x(t))dt + G(t,x(t))dW(t). \tag{3.10}$$

Пусть $D_{R^{d\times r}}$ — множество ограниченных измеримых по Борелю полунепрерывных сверху по x многозначных отображений $h:\ R_+ \times R^d \to \operatorname{conv}(R^{d\times r})$.

Теорема 3.4. *Пусть* $F \in D_{R^{d\times 1}}$, $G \in D_{R^{d\times d}}$, $\nu \in \mathcal{P}$. *Тогда для любых* $t_1 > 0$ *и* $\xi > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любых* $F^* \in D_{R^{d\times 1}}$, $G^* \in D_{R^{d\times d}}$, $\alpha(F^*(t,x), F(t,x)) \leqslant \delta$, $\alpha(G^*(t,x), G(t,x)) \leqslant \delta$ $\forall (t,x) \in [0,t_1] \times R^d$, $\nu^* \in \mathcal{P}$, $d(\nu,\nu^*) \leqslant \delta$, *для любого слабого решения* x^* *с начальной вероятностью* ν^* *включения*

$$dx(t) \in F^*(t,x(t))dt + G^*(t,x(t))dW(t) \tag{3.11}$$

найдется слабое решение x *на промежутке* $[0,t_1]$ *включения* (3.10) *с начальной вероятностью* ν *такое, что* $d(P^{x^*(t_1)}, P^{x(t_1)}) \leqslant \xi$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\exists t_1 > 0$, $\exists \xi_0 > 0$, $\forall n \in N$ $\exists F_n$, $\exists G_n$, $\alpha(F_n(t,x), F(t,x)) \leqslant 1/n$, $\alpha(G(t,x), G_n(t,x)) \leqslant 1/n$ $\forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, $\exists \nu_n$, $d(\nu,\nu_n) \leqslant 1/n$, существует слабое решение $(x_n, x_{0n}, v_n, u_n, \Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n, \mathcal{F}_{nt})$ включения (3.11) с $F^* = F_n$, $G^* = G_n$ такое, что для любого слабого решения x на промежутке $[0,t_1]$ включения (3.10) с начальной вероятностью ν выполняется

$$d(P^{x(t_1)}, P^{x_n(t_1)}) > \xi_0. \tag{3.12}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \in R^d$ такой, что $\nu(K) > 1 - \varepsilon$. Отсюда и из соотношения $d(\nu,\nu_n) \leqslant 1/n$ вытекает, что $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_n P_n\{\|x_n(0)\| > N\} = 0$. Так как для любых $t,s \in [0,t_1]$ $\sup\limits_n E_n(\|x_n(t) - x_n(s)\|^4) \leqslant k|t-s|^2$, $k=$const, то, согласно предложениям 1.31, 1.32, 1.20, $P^{x_{n_k}} \xrightarrow{\text{сл.}} \theta$, где P^{x_n} — вероятностный закон для x_n, θ — некоторая вероятность на $(C([0,t_1],R^d), \beta(C([0,t_1],R^d)))$, а x_{n_k} — некоторая подпоследовательность последовательности x_n (в дальнейшем считаем, что сама последовательность P^{x_n} слабо сходится к θ).

Построим систему множеств $\mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k)$ следующим образом: возьмем для каждого k шары $\sigma_m^{(k)}$, $m = 1,2,\ldots$, радиуса $\leqslant 2^{-(k+1)}$, покрывающие $C([0,t_1],R^d)$ и удовлетворяющие условиям $P^{x_n}(\partial\sigma_m^{(k)}) = 0$, $\theta(\partial\sigma_m^{(k)}) = 0$ ($\partial\sigma$ — граница множества σ) для каждых n, k, m, и положим $\mathcal{D}_1^{(k)} = \sigma_1^{(k)}$, $\mathcal{D}_2^{(k)} = \sigma_2^{(k)} \setminus \sigma_1^{(k)}, \ldots$, $\mathcal{D}_n^{(k)} = \sigma_n^{(k)} \setminus (\sigma_1^{(k)} \bigcup \ldots \bigcup \sigma_{n-1}^{(k)})$ и $\mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k) = \mathcal{D}_{i_1}^{(1)} \bigcap \mathcal{D}_{i_2}^{(2)} \bigcap \ldots \bigcap \mathcal{D}_{i_k}^{(k)}$. Пусть $H_n(i_1,\ldots,i_k) = \{\omega \in \Omega_n | x_n(\cdot,\omega) \in \mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k)\}$. Для каждого множества $\mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k)$ такого, что $\overset{\circ}{\mathcal{T}}(i_1,\ldots,i_k) \neq \varnothing$, выберем точку $q(i_1,\ldots,i_k) \in$

$\in \overset{\circ}{\mathcal{T}}(i_1,\ldots,i_k)$ ($\overset{\circ}{\mathcal{T}}$ — внутренность множества $\mathcal{T}$), если же $\overset{\circ}{\mathcal{T}}(i_1,\ldots,i_k) = \varnothing$, то в качестве $q(i_1,\ldots,i_k)$ берем любую точку из $\mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k)$. Положим $x_n^k(\omega) = q(i_1,\ldots,i_k)$, если $\omega \in H_n(i_1,\ldots,i_k)$. Так как $\rho(x_n^k, x_n) \leqslant 2^{-k}$, то $x_n^k \to$ $\to x_n$ при $k \to \infty$ равномерно на $[0,t_1]$ п. н. Пусть $\int_{H_n(i_1,\ldots,i_k)} v_n(t,\omega)d\omega = M_{n,i_1,\ldots,i_k}(t)$, $\int_{H_n(i_1,\ldots,i_k)} S_n(t,\omega)d\omega = \mathcal{J}_{n,i_1,\ldots,i_k}(t)$, где $S_n = u_n u_n^\top$, и пусть $S_n^k(t,\omega) = \mathcal{J}_{n,i_1,\ldots,i_k}(t)/P_n(H_n(i_1,\ldots,i_k))$, $v_n^k(t,\omega) = M_{n,i_1,\ldots,i_k}(t)/P_n(H_n(i_1,\ldots,i_k))$, если $\omega \in H_n(i_1,\ldots,i_k)$ и $P_n(H_n(i_1,\ldots,i_k)) > 0$ $\forall t \in [0,t_1]$, для остальных $(t,\omega) \in [0,t_1]\times\Omega_n$ $v_n^k(t,\omega) = 0$, $S_n^k(t,\omega) = 0$. Для $(\mu \times P_n)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,t_1]\times\Omega_n$ $v_n^k(t,\omega) \in [F_n(t,x_n^k(t,\omega))]^{2^{-k}}$, $s_n^k(t,\omega) \in [A_n(t,x_n^k(t,\omega))]^{2^{-k}}$.

Возьмем $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{F} = \beta([0,1[)$, P — мера Лебега на $[0,1[$. Для фиксированного k упорядочим все $(i_1,\ldots,i_k)$ лексикографически. Определим интервалы $\Delta(i_1,\ldots,i_k)$, $\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)$ вида $[a,b[$, $b \geqslant a$, в $[0,1[$ следующим образом: а) $|\Delta(i_1,\ldots,i_k)| = \theta(\mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k))$, $|\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)| = P^{x_n}(\mathcal{T}(i_1,\ldots,i_k))$ ($|\Delta|$ – длина интервала); б) если $(i_1,\ldots,i_k) < (j_1,\ldots,j_k)$, то интервал $\Delta(i_1,\ldots,i_k)$ ($\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)$) расположен левее $\Delta(j_1,\ldots,j_k)$ (соответственно левее $\Delta_n(j_1,\ldots,j_k)$). Положим $\hat{x}_n^k(\cdot,\omega) = q(i_1,\ldots,i_k)$ для $\omega \in \Delta_n(i_1,\ldots,i_k)$, $\hat{x}^k(\cdot,\omega) = q(i_1,\ldots,i_k)$ для $\omega \in \Delta(i_1,\ldots,i_k)$. Из доказательства теоремы Скорохода следует, что существуют пределы $\hat{x}_n(t,\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} \hat{x}_n^k(t,\omega)$, $\hat{x}(t,\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n(t,\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} \hat{x}^k(t,\omega)$, равномерные на $[0,t_1]$ п. н., кроме того, $P^{x_n} = P^{\hat{x}_n}$, $P^{\hat{x}} = \theta$. Построим отображения $(t,\omega) \to \hat{v}_n^k(t,\omega)$, $(t,\omega) \to \hat{s}_n^k(t,\omega)$ такие, что $\hat{v}_n^k(t,\omega) = M_{n,i_1,\ldots,i_k}(t)/|\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)|$, $\hat{S}_n^k(t,\omega) = \mathcal{J}_{n,i_1,\ldots,i_k}(t)/|\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)|$, если $\omega \in \Delta_n(i_1,\ldots,i_k)$ и $|\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)| > 0$. Из построения $\hat{x}_n^k$, $\hat{v}_n^k$, $\hat{S}_n^k$ вытекает, что для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,t_1]\times\Omega$ $\hat{v}_n^k(t,\omega) \in [F_n(t,\hat{x}_n^k(t,\omega))]^{2^{-k}}$, $\hat{S}_n^k(t,\omega) \in [A_n(t,\hat{x}_n^k(t,\omega))]^{2^{-k}}$. Для каждого $n \in N$, согласно предложению 1.13, последовательности $\hat{v}_n^k$, $\hat{S}_n^k$, $k \geqslant 1$, относительно слабо компактны соответственно в $L_1([0,t_1]\times\Omega, R^d)$, $L_1([0,t_1]\times \Omega, R^{d\times d})$. Для удобства считаем, что сами последовательности $\hat{v}_n^k$, $\hat{S}_n^k$, $k \geqslant 1$, являются слабо сходящимися, и пусть $\hat{v}_n$, $\hat{S}_n$ — их слабые пределы. Из включений $\hat{v}_n(t,\omega) \in \bigcap_{m=1}^\infty \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=m}^\infty \hat{v}_n^k(t,\omega)$, $\hat{S}_n(t,\omega) \in \bigcap_{m=1}^\infty \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=m}^\infty \hat{S}_n^k(t,\omega)$ (предложение 1.51) и полунепрерывности сверху отображений F_n, A_n следует, что $\hat{v}_n(t,\omega) \in F_n(t,\hat{x}_n(t,\omega))$,

$\hat{S}_n(t,\omega) \in A_n(t,\hat{x}_n(t,\omega))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,t_1] \times \Omega$.

Последовательности $\hat{v}_n$, $\hat{S}_n$ относительно слабо компактны в $L_1([0,t_1] \times \Omega, R^d)$, $L_1([0,t_1] \times \Omega, R^{d\times d})$. Считаем, что сами последовательности $\hat{v}_n$, $\hat{S}_n$ являются слабо сходящимися, и пусть $\hat{v}$, $\hat{S}$ — их слабые пределы. Для каждого $r > 0$ из неравенств $\alpha(f_n(t,x),f(t,x)) \leqslant 1/n$, $\alpha(g_n(t,x),g(t,x)) \leqslant 1/n$, $(t,x) \in [0,t_1] \times R^d$ следует, что $F_n(t,x) \subset [F(t,x)]_r$, $A_n(t,x) \subset [A(t,x)]_r$ для всех достаточно больших n и всех $(t,x) \in [0,t_1] \times R^d$. Отсюда и из включений $\hat{v}(t,\omega) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=m}^{\infty} \hat{v}_n(t,\omega) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=m}^{\infty} F_n(t,\hat{x}_n(t,\omega))$, $\hat{S}(t,\omega) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n(t,\hat{x}_n(t,\omega))$ получаем $\hat{v}(t,\omega) \in [F(t,\hat{x}(t,\omega))]_{2r}$, $\hat{S}(t,\omega) \in [A(t,\hat{x}(t,\omega))]_{2r}$. Воспользовавшись произвольностью r, имеем $\hat{v}(t,\omega) \in F(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\hat{S}(t,\omega) \in A(t,\hat{x}(t,\omega))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in ([0,t_1] \times \Omega)$.

Пусть $\sigma(\hat{x}(s)|0 \leqslant s \leqslant t+\varepsilon)$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные векторы $\hat{x}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t+\varepsilon$, и пусть $\hat{\mathfrak{F}}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(\hat{x}(s)|0 \leqslant s \leqslant t+\varepsilon)$. Через $\tilde{v} = E(\hat{v}|\hat{\mathfrak{F}}_t)$, $\tilde{S} = E(\hat{S}|\hat{\mathfrak{F}}_t)$ обозначим условные математические ожидания для $\hat{v}$, $\hat{S}$, причем условные математические ожидания выбраны таким образом, что процессы $\tilde{v}$ и $\tilde{S}$ измеримы. Для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,t_1] \times \Omega$ имеем (предложение 1.49) $\tilde{v}(t,\omega) \in F(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\tilde{S}(t,\omega) \in A(t,\hat{x}(t,\omega))$. Для каждых $t,s \in [0,t_1]$, $s \leqslant t$, для каждой функции $h : R^d \to R$, дважды непрерывно дифференцируемой и ограниченной со всеми частными производными до второго порядка включительно, для каждой непрерывной ограниченной $(\beta_s(C([0,t_1],R^d)))$-измеримой функции $z : C([0,t_1],R^d) \to R$ имеем

$$E\Bigg(\bigg(h(\hat{x}(t)) - h(\hat{x}(s)) - \int\limits_s^t \bigg(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^{d} \tilde{S}^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}} +$$

$$+ \sum_{\varepsilon=1}^{d} \tilde{v}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(\varepsilon)}}\bigg)d\tau\bigg)z(\hat{x})\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\bigg[E\Big((h(\hat{x}_n(t)) - h(\hat{x}_n(s)))z(\hat{x}_n)\Big) -$$

$$- \int\limits_s^t \bigg(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^{d} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \int\limits_{\Delta_n(i_1,\ldots,i_k)} \hat{S}_n^{(\varepsilon)(\delta)k}(\tau)\frac{\partial^2 h(\hat{x}_n^k)}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}} z(\hat{x}_n^k)d\omega +$$

$$+\sum_{\varepsilon=1}^{d}\sum_{(i_1,\dots,i_k)}\int\limits_{\Delta_n(i_1,\dots,i_k)}\hat{v}_n^{(\varepsilon)k}\frac{\partial h(\hat{x}_n^k)}{\partial x^{(\varepsilon)}}z(\hat{x}_n^k)d\omega\Bigg)d\tau\Bigg]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\Bigg[E(h(\hat{x}_n(t))-h(\hat{x}_n(s)))z(\hat{x}_n)-$$

$$-\int\limits_s^t\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^{d}\sum_{(i_1,\dots,i_k)}\frac{\partial^2 h(q(i_1,\dots,i_k))}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}}z(q(i_1,\dots,i_k))\mathfrak{J}_{n,i_1,\dots,i_k}(\tau)+$$

$$+\sum_{\varepsilon=1}^{d}\sum_{i_1,\dots,i_k}\frac{\partial h(q(i_1,\dots,i_k))}{\partial x^{(\varepsilon)}}\times z(q(i_1,\dots,i_k))M_{n,i_1,\dots,i_k}(\tau)\Bigg)d\tau\Bigg]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}E_n\Bigg(\Bigg(h(x_n(t))-h(x_n(s))-\int\limits_s^t\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^{d}\frac{\partial^2 h(x_n(\tau))}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}}S_n^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau)+$$

$$+\sum_{\varepsilon=1}^{d}\frac{\partial h(x_n(\tau))}{\partial x^{(\varepsilon)}}G_n^{(\varepsilon)}(\tau)\Bigg)d\tau\Bigg)z(x_n)\Bigg)=0.$$

Отсюда следует, что процесс $h(\hat{x}(t))-h(\hat{x}(0))-$

$$-\int\limits_0^t\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^{d}\tilde{S}^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}}+\sum_{\varepsilon=1}^{d}\tilde{v}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(\varepsilon)}}\Bigg)d\tau$$

является $(\hat{\mathfrak{F}}_t)$-мартингалом (здесь $S^{(\varepsilon)(\delta)}$, $v^{(\varepsilon)}$, $x^{(\varepsilon)}$ — компоненты матрицы S и векторов v, x). Тогда, по предложению 1.37, на расширении $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}},\tilde{P})$ и $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ пространства $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ и $\hat{\mathfrak{F}}_t$ можно определить $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ такое, что $(\hat{x},\tilde{v},\tilde{u},\tilde{W})$ — слабое решение на промежутке $[0,t_1]$ включения (3.10), где $\tilde{u}=\tilde{S}^{1/2}$. Так как $P^{x_n}\overset{\text{сл.}}{\to}P^{\hat{x}}$, то $d(P^{x_n(t_1)},P^{\hat{x}(t_1)})\to 0$ при $n\to\infty$, что противоречит неравенству (3.12). Теорема 3.4 доказана.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, $(\mathfrak{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$ с $W(0)=0$ п. н., $(\mathfrak{F}_0,\beta(R^d))$-измеримая случайная величина η, $F:R^d\to\mathrm{conv}(R^d)$, $q:R_+\times R^d\to R^d$, $g:R_+\times R^d\to R^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции. Рассмотрим включение

$$dx(t)\in(F(x(t))+q(t,x(t)))dt+g(t,x(t))dW(t),\quad x(0)=\eta.\tag{3.13}$$

Теорема 3.5. *Пусть: F — монотонное отображение; q и g — функции, удовлетворяющие условию Липшица по x, т. е.*

$$\|q(t,x)-q(t,y)\|^2+\|g(t,x)-g(t,y)\|^2\leqslant K\|x-y\|^2$$

$\forall t\in R_+$, $\forall x,y\in R^d$, $K=\mathrm{const}$; $(x(t),v(t))$ *— сильное решение включения* (3.13) *с* $E(\|x(0)\|^2)<\infty$; $(\tilde{x}(t),\tilde{v}(t))$ *— сильное решение включения* $d\tilde{x}(t)\in(\tilde{F}(\tilde{x}(t))+\tilde{q}(t,\tilde{x}(t)))dt+\tilde{g}(t,\tilde{x}(t))dW(t)$ *на том же вероятностном пространстве с тем же потоком, что и для* $x(t)$, *где* $\bar{\alpha}(\tilde{F}(x),F(x))\leqslant\delta$, $\|q(t,x)-\tilde{q}(t,x)\|\leqslant\delta$, $\|g(t,x)-\tilde{g}(t,x)\|\leqslant\delta$ $\forall(t,x)\in R_+\times R^d$, $\delta=\mathrm{const}$, $e(\tilde{x}(\omega))=\infty$ *п. н.*; $E(\|x(0)-\tilde{x}(0)\|^2)<\delta$. *Тогда для любого* $T>0$ *существует постоянная* N *такая, что* $E(\|x(t)-\tilde{x}(t)\|^2)\leqslant N\delta^{1/4}$ $\forall t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\tilde{v}}\colon R_+\times\Omega\to R^d$ — измеримое $(\mathcal{F}_t)$-согласованное отображение такое, что $\tilde{\tilde{v}}(t,\omega)\in F(\tilde{x}(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in R_+\times\Omega$, $\|\tilde{v}(t,\omega)-\tilde{\tilde{v}}(t,\omega)\|=\inf\limits_{b\in F(\tilde{x}(t,\omega))}\|\tilde{v}(t,\omega)-b\|\leqslant\delta$ $\forall(t,\omega)\in R_+\times\Omega$. Существование такого отображения $\tilde{\tilde{v}}$ вытекает из предложения 1.50. Пусть $\sigma_N=\inf\{t\,|\,\|x(t)\|+\|\tilde{x}(t)\|>N\}$, тогда, используя формулу Ито и предположения теоремы 3.5, имеем

$$E(\|x(t\wedge\sigma_N)-\tilde{x}(t\wedge\sigma_N)\|^2)=E(\|x(0)-\tilde{x}(0)\|^2)+2E\int_0^{t\wedge\sigma_N}(x(\tau)-\tilde{x}(\tau))^\top\times$$

$$\times[(v(\tau)-\tilde{\tilde{v}}(\tau))+(\tilde{\tilde{v}}(\tau)-\tilde{v}(\tau))+q(\tau,x(\tau))-\tilde{q}(\tau,\tilde{x}(\tau))+$$

$$+\|g(\tau,x(\tau))-\tilde{g}(\tau,\tilde{x}(\tau))\|^2]d\tau\leqslant\delta+2\int_0^t(\delta(E(\|x(\tau\wedge\sigma_N)-\tilde{x}(\tau\wedge\sigma_N)\|^2))^{1/2}+$$

$$+2\delta+2KE(\|x(\tau\wedge\sigma_N)-\tilde{x}(\tau\wedge\sigma_N)\|^2))d\tau.$$

Применяя предложение 3.2, из последнего неравенства для фиксированного $T\in R_+$ получаем $E(\|x(t\wedge\sigma_N)-\tilde{x}(t\wedge\sigma_N)\|^2)\leqslant((\delta+4\delta T)^{1/2}\exp(2Kt)+\delta t\exp(\delta\exp(4Kt)))^{1/2}$ $\forall t\in[0,T]$. Отсюда вытекает требуемое неравенство с $N=((1+4T)^{1/2}\exp(2KT)+T\exp(\exp(4KT)))^{1/2}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$dx(t)=f(x(t))dt+g(x(t))dW(t). \tag{3.14}$$

Теорема 3.6. *Пусть: отображения* $f : R^d \to R^d$ *и* $g : R^d \to \to R^{d\times d}$ *— локально ограничены и измеримы по Борелю; компоненты функций* $f(x)$ *и* $\sigma(x) = g(x)g^\top(x)$ *удовлетворяют условию* C); *у всех слабых решений уравнения* (3.14) *отсутствуют взрывы. Тогда отображение* $(t,\nu) \to H_t(\nu) \in \mathrm{comp}(\mathcal{P})$, $t \in R_+, \nu \in \mathcal{P}$, *обладает следующими свойствами:*

1) $H_0(\nu) = \nu \ \ \forall \nu \in \mathcal{P}$;

2) $H_{t_1+t_2}(\nu) \subset H_{t_2}(H_{t_1}(\nu)) \ \ \forall t_1, t_2 \in R_+$, *причем если уравнение* (3.14) *обладает свойством слабой единственности, то* $H_{t_1+t_2}(\nu) = = H_{t_2}(H_{t_1}(\nu)) \ \ \forall t_1, t_2 \in R_+, \ \ \forall \nu \in \mathcal{P}$;

3) $\lim\limits_{d(\nu,\nu_0)\to 0} \bar{\alpha}(H_t(\nu), H_t(\nu_0)) = 0 \ \ \forall t \in R_+, \ \ \forall \nu_0 \in \mathcal{P}$ (теорема 3.2);

4) $\lim\limits_{t\to t_0} \alpha(H_t(\nu), H_{t_0}(\nu)) = 0 \ \ \forall t_0 \geqslant 0, \ \ \forall \nu \in \mathcal{P}$;

5) *если* $d(\nu_n, \nu) \to 0$, x_n *— последовательность слабых решений уравнения* (3.14), $P^{x_n(0)} = \nu_n$, *то существуют подпоследовательность* n_k *и слабое решение* x *уравнения* (3.14) *такие, что* $P^{x(0)} = = \nu$, $P^{x_{n_k}} \overset{сл.}{\to} P^x$, *где* $P^{x_{n_k}}$, P^x *— законы распределения* x_{n_k}, x *в* $(C(R_+, R^d), \beta(C(R_+, R^d)))$.

Доказательство. Свойство 1) очевидно. Докажем свойство 2). Пусть $m \in H_{t_1+t_2}(\nu)$ и $(x(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ — слабое решение уравнения (3.14) такое, что $m = P^{x(t_1+t_2)}$.

Рассмотрим процесс

$$y(t) = x(t + t_1), \quad t \geqslant 0,$$

$$y(t) = x(t_1) + \int_0^t f(y(\tau))\, d\tau + \int_0^t g(y(\tau)) d\widetilde{W}(\tau) \quad \text{п. н.},$$

где $\widetilde{W}(t) = W(t + t_1) - W(t_1)$. Согласно предложению 1.34, $\widetilde{W}(t)$ — $(\mathcal{F}_{t+t_1})$-броуновское движение. Следовательно, $(y(t), \widetilde{W}(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_{t+t_1})$ — слабое решение уравнения (3.14). Так как $P^{y(0)} = P^{x(t_1)}$, $P^{y(t_2)} = m$, то $m \in H_{t_2}(H_{t_1}(\nu))$.

Пусть уравнение (3.14) обладает свойством слабой единственности и $m \in H_{t_2}(H_{t_1}(\nu))$ и пусть $y(t), z(t)$ — слабые решения такие, что $P^{y(t_1)} = P^{z(0)}$, $P^{z(t_2)} = m$. Легко видеть, что слабое решение $y(t)$ обладает свойством $P^{y(t_1+t_2)} = m$, следовательно, $m \in H_{t_2+t_1}(\nu))$.

Свойство 4) вытекает из соотношения

$$\lim_{h\downarrow 0} P\left\{\max_{|t-s|\leqslant h,\, t,s\in[0,t_1]} \|x(t)-x(s)\| > \Upsilon\right\} = 0, \tag{3.15}$$

справедливого для любого слабого решения $x(t)$ уравнения (3.14) и для любых $t_1 \in R_+$, $\Upsilon > 0$. Соотношение (3.15) доказывается так же, как и равенство (3.9). Свойство 5) следует из доказательства теоремы 3.2.

Теорема 3.7. *Пусть*: *отображения* $f : R^d \to R^d$ *и* $g : R^d \to \to R^{d\times d}$ *— локально ограничены и измеримы по Борелю*; *компоненты функций* $f(x)$ *и* $\sigma(x) = g(x)g^\top(x)$ *удовлетворяют условию* C); *у всех слабых решений уравнения* (3.14) *отсутствуют взрывы*; *уравнение* (3.14) *обладает свойством слабой единственности. Тогда отображение* $H : R_+ \times \mathcal{P} \to \mathrm{comp}(\mathcal{P})$ *является полунепрерывной по* ν *полудинамической системой.*

Действительно, согласно теореме 3.6, отображение $H : R_+ \times \mathcal{P} \to \to \mathrm{comp}(\mathcal{P})$ удовлетворяет условиям предложения 1.56. Требуемое утверждение теперь вытекает из этого предложения.

3.2. Исследование устойчивости стохастических дифференциальных уравнений методом функций Ляпунова

Параграф посвящен исследованию асимптотического поведения решений стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) \tag{3.16}$$

методом функций Ляпунова. Здесь изучаем поведение решений стохастических дифференциальных уравнений при $t \to \infty$ и доказываем аналог теоремы Барбашина — Красовского [3] для ССДУ (теорема 3.9). Предполагаем, что отображения $f : R^d \to R^d$ и $g : R^d \to \to R^{d\times d}$ измеримы по Борелю, локально ограничены и компоненты функций $f(t,x)$ и $\sigma(t,x) = g(x)g^\top(x)$ удовлетворяют условию C). Согласно теореме 2.2, для любой вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ уравнение

(3.16) имеет слабое решение $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, x(t), W(t), e)$ с начальной вероятностью ν. Если $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, то уравнение (3.16) имеет слабое решение $x(t) = 0 \quad \forall t \geqslant 0$ п. н., которое называем **нулевым**.

Пусть $\mathcal{P}$ — совокупность всех вероятностей на $(R^d, \beta(R^d))$, а d — метрика Леви — Прохорова на $\mathcal{P}$. Пусть $x(t)$ — слабое решение без взрывов. Отображение $\varphi_x : [0, \infty[\to \mathcal{P}$, где $\varphi_x(t) = P^{x(t)}$, называем **движением** уравнения (3.16), соответствующим слабому решению $x(t)$. Множество $\varphi_x([0, \infty[) = \{y \in \mathcal{P} \mid y = \varphi_x(t),\ t \in [0, \infty[\}$ называется **траекторией движения** φ_x. Траектория называется **нетривиальной**, если она отлична от точки $\delta_{(0)}$. Движение называется нетривиальным, если его траектория нетривиальна.

Во всех утверждениях параграфа 3.2 предполагается, что, кроме перечисленных выше условий, для стохастического дифференциального уравнения (3.16) выполнено

Условие L). Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V : R^d \to R_+$ такая, что $\forall x \in R^d$

$$BV(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} g(x) g^\top(x) \right) \leqslant 0.$$

Положим $M_V = \{x \in R^d | \ BV(x) = 0\}$. Скажем, что слабое решение $(x(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ без взрывов принадлежит множеству M_V, если

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} f(x(t)) + \frac{1}{2} \mathrm{tr} (\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2} g(x(t)) g^\top(x(t))) = 0$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$.

Точку q называют ω-**предельной** для функции $\psi : [t_0, +\infty[\to \mathcal{P}$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $d(\psi(t_n), q) \to 0$, $n \to +\infty$. Будем обозначать через $\Omega(\psi)$ множество всех ω-предельных точек для функции ψ. Движение называется **предкомпактным**, если его траектория относительно компактна в $(\mathcal{P}, d)$. **Носителем вероятности** $\nu \in \Omega(\psi)$ (обозначают $\mathrm{supp} \ \ \nu$) называют наименьшее замкнутое множество $F \in R^d$ такое, что $\nu(F) = 1$.

Лемма 3.1. *Пусть φ_x — предкомпактное движение уравнения (3.16) и $\|x(0)\| \leqslant M$ п. н., $M \in R_+$. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) *множество* $\Omega(\varphi_x)$ *непусто, и для любой точки* $q \in \Omega(\varphi_x)$ *существует слабое решение* $\hat{x}(t)$ *без взрывов уравнения* (3.16) *с начальной вероятностью* q, *принадлежащее множеству* M_V;

2) $d(\varphi_x(t), \Omega(\varphi_x)) \to 0$ *при* $t \to +\infty$;

3) $x(t) \underset{t\to\infty}{\overset{P}{\to}} \overline{\mathrm{supp}\quad \Omega(\varphi_x)}$, *где* $\overline{\mathrm{supp}\quad \Omega(\varphi_x)}$ *— замыкание множества носителей всех вероятностей из* $\Omega(\varphi_x)$.

Доказательство. 1) Непустота множества $\Omega(\psi)$ вытекает из предкомпактности движения φ_x.

Возьмем точку $q \in \Omega(\varphi_x) : \exists t_n \uparrow +\infty,\ d(\varphi_x(t_n), q) \to 0$. Если $y_n(t) = x(t + t_n)$, $W_n(t) = W(t + t_n) - W(t_n)$, $\mathfrak{F}_{n,t} = \mathfrak{F}_{t+t_n}$, $t \geqslant 0$, то для каждого $n \geqslant 1$ $(y_n(t), W_n(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_{n,t})$ — слабое решение уравнения (3.16) (см. доказательство свойства 2) в теореме 3.6). Так как $y_n(0) = x(t_n)$, то $d(P^{y_n(0)}, q) \to 0$. Определим $\tau^k = \inf\{t | \|x(t)\| > k\}$, $\tau_n^m = \inf\{t | \|y_n(t)\| > a_m\}$, $y_n^m(t) = y_n(t \wedge \tau_n^m)$, где $a_m \uparrow \infty$ при $m \to \to \infty$. Используя леммы 2.7—2.9, построим процессы $z_n^m(t), z^m(t), z(t)$, обладающие перечисленными в этих леммах свойствами. Возьмем произвольную точку $\bar{t} \in R_+$. Покажем, что для произвольных фиксированных n и $m \in N$ выполняется неравенство

$$E(V(x(t_n + (\bar{t} \wedge \tau_n^m)))) \leqslant E(V(x(0))) < \infty. \tag{3.17}$$

Действительно, используя формулу Ито, условие L) и лемму Фату, имеем

$$V(x((t_n + (\bar{t} \wedge \tau_n^m)) \wedge \tau^k)) - V(x(0)) =$$

$$= \int\limits_0^{(t_n+(\bar{t}\wedge\tau_n^m))\wedge\tau^k} BV(x(s))ds + \int\limits_0^{(t_n+(\bar{t}\wedge\tau_n^m))\wedge\tau^k} V_x'(x(s))g(x(s))dW(s), \quad k \in N,$$

$$E(V(x(t_n+(\bar{t}\wedge\tau_n^m)))) \leqslant \liminf_{k\to\infty} E(V(x((t_n+(\bar{t}\wedge\tau_n^m))\wedge\tau^k))) \leqslant E(V(x(0))).$$

Опять, используя формулу Ито, условие L) и лемму Фату, получаем

$$V(x((t_{n+1} + (\bar{t} \wedge \tau_{n+1}^m)) \wedge \tau^k)) = V(x((t_n + (\bar{t} \wedge \tau_n^m)) \wedge \tau^k)) +$$

$$+ \int\limits_{(t_n+(\bar{t}\wedge\tau_n^m))\wedge\tau^k}^{(t_{n+1}+(\bar{t}\wedge\tau_{n+1}^m))\wedge\tau^k} BV(x(s))ds + \int\limits_{(t_n+(\bar{t}\wedge\tau_n^m))\wedge\tau^k}^{(t_{n+1}+(\bar{t}\wedge\tau_{n+1}^m))\wedge\tau^k} V_x'(x(s))g(x(s))dW(s),$$

$$E(V(x(t_{n+1}+(\bar t\wedge\tau^m_{n+1})))|\mathcal{F}_{t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n)})\leqslant$$
$$\leqslant\liminf_{k\to\infty}E(V(x((t_{n+1}+(\bar t\wedge\tau^m_{n+1}))\wedge\tau^k))|\mathcal{F}_{t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n)})\leqslant$$
$$\leqslant\liminf_{k\to\infty}V(x((t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n))\wedge\tau^k))=V(x(t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n))). \qquad (3.18)$$

Аналогично показывается, что для любых s и t, $0\leqslant s\leqslant t$, $k\geqslant1$, справедливы неравенства

$$E(V(x(t\wedge\tau^k)))\leqslant E(V(x(s\wedge\tau^k)))\leqslant E(V(x(0))), \qquad (3.19)$$

$$E(V(x(t\wedge\tau^{k+1}))|\mathcal{F}_{t\wedge\tau^k})\leqslant V(x(t\wedge\tau^k)). \qquad (3.20)$$

Из соотношений (3.17) и (3.18) следует, что для фиксированных $\bar t\in\in R_+$, $m>0$, последовательность $(V(x(t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n))),\mathcal{F}_{t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n)}),n\geqslant1$, образует неотрицательный супермартингал. Из (3.19), (3.20) вытекает, что при каждом фиксированном $t\in R_+$ последовательность $(V(x(t\wedge\wedge\tau^k)),\mathcal{F}_{t\wedge\tau^k}),k\geqslant1$, также является неотрицательным супермартингалом. Согласно свойству 5) мартингалов, последовательности

$$(V(x(t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n))),n\geqslant1),(V(x(t\wedge\tau^k)),k\geqslant1)$$

являются равномерно интегрируемыми, что позволяет перейти к пределу под знаком математического ожидания в следующей цепочке соотношений $E(V(x(t_n+(\bar t\wedge\tau^m_n)))=E(V(y_n(\bar t\wedge\tau^m_n)))=E(V(y^m_n(\bar t)))==\widehat E(V(z^m_n(\bar t)))\to\widehat E(V(z^m(\bar t)))$, $n\to+\infty$, а также в неравенстве (3.19) при $k\to\infty$. В результате получаем неравенства $E(V(x(t)))\leqslant\leqslant E(V(x(s)))\leqslant E(V(x(0)))$, $t>s\geqslant0$, из которых вытекает существование конечного предела

$$\lim_{t\to\infty}E(V(x(t)))=I. \qquad (3.21)$$

Возьмем произвольную точку $\hat t\in R_+$ и выберем подпоследовательность t_{n_i} последовательности t_n такую, что $t_{n_{i+1}}-t_{n_i}\geqslant\hat t$ для всех $i\geqslant1$. Так как $E(V(x(t_{n_{i+1}})))\leqslant E(V(x(t_{n_i}+(\hat t\wedge\tau^m_{n_i}))))\leqslant E(V(x(t_{n_i})))$, то из соотношения (3.21) имеем $\widehat E(V(z^m(\hat t)))=I$. Отсюда и из соотношений $z^m(\bar t)=z(\bar t\wedge\varrho^m)$, $\widehat E(V(z(\bar t\wedge\varrho^m)))-\widehat E(V(z(0)))-$

$$-\widehat E\bigg(\int\limits_0^{\bar t\wedge\varrho^m}\Big(\frac{\partial V(z(\tau))}{\partial x}f(z(\tau))+\frac12\mathrm{tr}\big(\frac{\partial^2V(z(\tau))}{\partial x^2}gg^\top\big)\Big)\,d\tau\bigg)=0$$

следует, что слабое решение $z(t)$ принадлежит множеству M_V.

2) Предположим, что $d(\varphi_x(t), \Omega(\varphi_x) \not\to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда существуют последовательность $t_n \to \infty$ и постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $d(\varphi_x(t_n), \Omega(\varphi_x)) \geqslant \varepsilon_0$. Выбирая из последовательности $\varphi_x(t_n)$ сходящуюся подпоследовательность $\varphi_x(t_{n_k})$, видим, что $\varphi_x(t_{n_k}) \to q \in \Omega(\varphi_x)$, а это противоречит неравенству $d(\varphi_x(t_n), \Omega(\varphi_x)) \geqslant \varepsilon_0$.

3) Пусть $Q = \overline{\text{supp} \quad \Omega(\varphi_x)}$. Предположим, что утверждение 3) леммы 3.1 не имеет места, тогда $\exists \varepsilon_1 > 0, \exists \varepsilon_2 > 0$, $\exists t_n \to \infty$, $P\{x(t_n) \in \in R^d \setminus [Q]_{\varepsilon_1}\} \geqslant \varepsilon_2$. Выберем вещественную непрерывную функцию a, определенную на R^d, такую, что $0 \leqslant a \leqslant 1$, $a = 0$ на $[Q]_{\varepsilon_1/2}$ и $a = = 1$ на $R^d \setminus [Q]_{\varepsilon_1}$. Можно считать, что $\varphi_x(t_n) \to \nu \in \Omega(\varphi_x)$. Теперь имеем $\int_{R^d} a(x) d\varphi_x(t_n) \to \int_{R^d} a(x) d\nu \geqslant \varepsilon_2$. Отсюда следует, что $(R^d \setminus [Q]_{\varepsilon_1}) \bigcap \text{supp} \quad \nu \neq \varnothing$, но это противоречит определению Q.

Определение 3.1. *Нулевое решение называют устойчивым по вероятности, если для любых* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ *такое, что для любого слабого решения* $x(t)$ *с* $\|x(0)\| \leqslant \delta$ *п. н. имеем* $P\{\sup\limits_{t \geqslant 0} \|x(t)\| \geqslant \varepsilon_1\} \leqslant \varepsilon_2$.

Определение 3.2. *Нулевое решение называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и для любого* $K > 0$ *и для любого слабого решения* $x(t)$, *для которого* $\|x(0)\| < K$ *п. н., выполняется* $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{P} 0$.

Определение 3.3. *Нулевое решение называется* ϖ*-устойчивым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого слабого решения* $x(t)$ *уравнения* (3.16), *для которого* $\|x(0)\| \leqslant \delta$ *п. н., имеем* $E(\|x(t)\|^{\varpi}) \leqslant \varepsilon \ \ \forall t \geqslant 0$.

Определение 3.4. *Нулевое решение называется глобально асимптотически* ϖ*-устойчивым, если оно* ϖ*-устойчиво и для любого* $M > 0$ *и для любого слабого решения* $x(t)$, *для которого* $\|x(0)\| \leqslant M$ *п. н., выполняется* $\lim\limits_{t \to +\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi}) = 0$.

Предложение 3.1 [107, с. 151–152, 36, с. 57–59]. *Пусть функция* V *удовлетворяет условию* $V(x) \underset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ *и отображение* BV

непрерывно на множестве M_V. *Тогда для любого слабого решения* $x(t)$ *уравнения* (3.16) *такого, что* $E(V(x(0))) < \infty$, *имеем* $x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_V$ *п. н.*

Теорема 3.8 (о глобальной асимптотической устойчивости по вероятности). *Пусть функция* $V(x)$ *положительно определенная, т. е.* $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ *для* $x \neq 0$. *Тогда нулевое решение уравнения* (3.16) *устойчиво по вероятности. Если, кроме того,* $V(x) \to \infty$ *при* $\|x\| \to \infty$ *и множество* M_V *не содержит ненулевых слабых решений, то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

Доказательство. Возьмем произвольные $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$. Пусть $\min\limits_{\|x\|=\varepsilon_1} V(x) = m(\varepsilon_1)$. Существует $\delta > 0$ такое, что $V(x) < \varepsilon_2 m(\varepsilon_1)$, если $\|x\| < \delta$. Для любого слабого решения $x(t)$ такого, что $\|x(0)\| < \delta$, для любого $T > 0$ и для любого момента остановки $0 \leqslant \tau \leqslant T$ имеем $E(V(x(\tau))) \leqslant E(V(x(0)))$. Аналогичное неравенство установлено при доказательстве леммы 3.1, причем при его доказательстве предкомпактность движения φ_x не использовалась. По лемме 2.1, $P\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} V(x(t)) > m(\varepsilon_1)\} < \varepsilon_2$. Так как T произвольно, то $P\{\sup\limits_{0\leqslant t} V(x(t)) > m(\varepsilon_1)\} \leqslant \varepsilon_2$. Отсюда и из включения $\{\sup\limits_{0\leqslant t} V(x(t)) > m(\varepsilon_1)\} \supset \{\sup\limits_{0\leqslant t} \|x(t)\| > \varepsilon_1)\}$ получаем $P\{\sup\limits_{0\leqslant t} \|x(t)\| > \varepsilon_1\} \leqslant \varepsilon_2$. Устойчивость по вероятности нулевого решения доказана.

Аналогично, возьмем произвольные $K > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, если $\max\limits_{\|x\|\leqslant K} V(x) = M(K)$, то для любого слабого решения $x(t)$ такого, что $\|x(0)\| < K$ п. н., имеем $P\{\sup\limits_{0\leqslant t} \|x(t)\| > \varepsilon_1\} \leqslant \frac{M(K)}{m(\varepsilon_1)}$. Отсюда следует, что траектория любого такого слабого решения является предкомпактной. Согласно лемме 3.1, при выполнении условий теоремы множество $\Omega(\varphi_x)$ состоит из одной точки $\delta_{(0)}$, носитель которой совпадает с $x = 0$. Опять, по лемме 3.1, для любого слабого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0)$ таким, что $\|x(0)\| \leqslant K$ п. н., имеет место стремление $x(t) \underset{t\to\infty}{\xrightarrow{P}} 0$. Теорема 3.8 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть*: $k_1\|x\|^{\varpi}\leqslant V(x) \quad \forall x, \|x\|\geqslant a$, *где* k_1, a, ϖ — *положительные постоянные*; *не существует ненулевых слабых решений уравнения* (3.16), *принадлежащих множеству* M_V. *Тогда для любого слабого решения* $x(t)$, *для которого* $\|x(0)\|\leqslant M$ *п. н.,* $M = const$, *имеем* $\lim\limits_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi})=0$.

Доказательство. Допустим, что существует слабое решение x уравнения (3.16), для которого $\|x(0)\|\leqslant M < +\infty$ п. н., существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех T_n, $T_n\uparrow+\infty$, найдется момент $t_n\geqslant T_n$, для которого

$$E(\|x(t_n)\|^{\varpi})=\varepsilon. \tag{3.22}$$

Если $y_n(t)=x(t+t_n)$, $W_n(t)=W(t+t_n)-W(t_n)$, $\mathcal{F}_{n,t}=\mathcal{F}_{t+t_n}$, $t\geqslant 0$, то $(y_n(t), W_n(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_{n,t})$ — слабое решение уравнения (3.16) для каждого $n\geqslant 1$. При доказательстве теоремы 3.8 показано, что траектория $\varphi_x(t)$, соответствующая решению $x(t)$, предкомпактна. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 3.1, покажем, что последовательность $V(y_n(0))$ равномерно интегрируема, и построим слабое решение $z(t)$ уравнения, принадлежащее множеству M_V. Из соотношения (3.22), равномерной интегрируемости последовательности $V(y_n(0))$ и условий леммы 3.2 следует, что слабое решение $z(t)$ является ненулевым. Существование такого решения противоречит условиям леммы 3.2. Лемма доказана.

Теорема 3.9 (о глобальной асимптотической ϖ-устойчивости). *Пусть выполняются следующие условия*: 1) $k_1\|x\|^{\varpi}\leqslant V(x) \quad \forall x\in R^d$; ϖ, k_1 — *положительные постоянные,* 2) *не существует ненулевых слабых решений уравнения* (3.16), *принадлежащих множеству* M_V. *Тогда нулевое решение является глобально асимптотически* ϖ *- устойчивым.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.8 мы показали, что траектория любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\|\leqslant K$ п. н., $K=\text{const}$, предкомпактна. В этом случае, как показано при доказательстве леммы 3.1, имеет место неравенство $E(V(x(t)))\leqslant E(V(x(0)))$, из которого и из условия 1) теоремы вытекает, что нулевое решение ϖ-устойчиво. Если $\|x(0)\|\leqslant M$ п. н., $M=\text{const}$, то соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi})=0$ следует из леммы 3.2. Теорема 3.9 доказана.

Замечание 3.1. Если в уравнении (3.16) функция $f : R^d \to R^d$ кусочно непрерывна, а функция $g : R^d \to R^{d\times d}$ непрерывна, то проверку неравенства $BV(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in R^d$ в условии L) достаточно провести в областях непрерывности отображения f [102, с. 117].

Замечание 3.2. Если стохастическое дифференциальное уравнение (3.16) не удовлетворяет условию C), то построим многозначные отображения F_0 и A_0, участвующие в определении β-слабых решений уравнения (3.16), затем заменим условие L) на следующее условие L$'$) : существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V : R^d \to R_+$ такая, что $\forall x \in R^d$

$$DV(x) = \sup_{b\in F_0(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} b + \sup_{a\in A_0(x)} \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} a\right) \leqslant 0.$$

Положим

$$N_V = \{x \in R^d | DV(x) = 0\}.$$

Скажем, что β-слабое решение $(x(t), u(t), v(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ без взрывов принадлежит множеству N_V, если

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} u(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2} v(t)v^\top(t)) = 0$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$. Аналогично теоремам 3.8, 3.9 доказываются следующие утверждения.

1) Пусть уравнение обладает свойством слабого существования и функция $V(x)$ положительно определенная. Тогда нулевое решение уравнения (3.16) устойчиво по вероятности. Если, кроме того, $V(x) \to \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, множество N_V не содержит ненулевых β-слабых решений, то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.

2) Пусть уравнение обладает свойством слабого существования и выполняются следующие условия: $k_1\|x\|^\varpi \leqslant V(x) \ \ \forall x \in R^d$; ϖ, k_1 — положительные постоянные, не существует ненулевых β-слабых решений уравнения (3.16), принадлежащих множеству N_V. Тогда нулевое решение является глобально асимптотически ϖ-устойчивым.

Пример 3.1. Исследуем асимптотическую устойчивость системы

$$dx_1(t) = (-x_1(t) + x_2^3(t))\,dt,$$
$$dx_2(t) = \left(-x_1^3(t) - \frac{3}{2}x_2(t)\right)dt + x_2(t)\,dW(t).$$

Если $V = x_1^4 + x_2^4$, то $BV(x_1, x_2) = -4x_1^4 \leqslant 0$, $M_V(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \in R\}$. Из первого уравнения системы следует, что лишь нулевое слабое решение принадлежит множеству M_V. Согласно теореме 3.9, нулевое решение уравнения глобально асимптотически ϖ-устойчиво, $\varpi = 4$.

Пример 3.2. Рассмотрим теперь систему

$$dx_1(t) = (-x_1^3(t) + 2x_2^3(t))\,dt,$$
$$dx_2(t) = \left(-x_1(t) - \frac{3}{2}x_2^3(t)\right)dt + x_2^2(t)\,dW(t).$$

Пусть $V = x_1^2 + x_2^4$, тогда

$$BV(x_1, x_2) = -2x_1^4 \leqslant 0, \quad M_V(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \in R\}.$$

Из первого уравнения системы следует, что лишь нулевое слабое решение принадлежит множеству M_V. Согласно теореме 3.8, нулевое решение уравнения глобально асимптотически устойчиво по вероятности. Более того, по лемме 3.2, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leqslant M$ п. н., $M = \mathrm{const}$, имеем

$$\lim_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^2) = 0.$$

3.3. Исследование устойчивости стохастических дифференциальных уравнений по нелинейному приближению

Настоящий параграф посвящен исследованию устойчивости стохастических дифференциальных систем с помощью метода интегральных неравенств. В монографии [76] дано систематическое изложение этого метода и исследована устойчивость различных классов дифференциальных систем. В данном разделе для стохастических дифференциальных уравнений получен аналог формулы В. М. Алексеева, что позволило использовать метод интегральных неравенств и для этого класса систем.

Пусть $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times r}$, $q : R_+ \times R^d \to R^d$ — измеримые по Борелю локально ограниченные непрерывные по x отображения с компонентами $g^i_j(t,x)$, $q^i(t,x)$, $i = 1,\dots,d$, $j = 1,\dots,r$, а $f : R_+ \times \times R^d \to R^d$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция с компонентами $f^i(t,x)$, $i = 1,\dots,d$; $g(t,0) = 0$; $f(t,0) = 0$; $q(t,0) = 0$, $t \geqslant 0$. Будем исследовать устойчивость системы

$$dx(t) = (f(t,x(t)) + q(t,x(t)))dt + g(t,x(t))dW(t) \tag{3.23}$$

на основе свойств обыкновенной дифференциальной системы

$$\dot{y} = f(t,y). \tag{3.24}$$

Согласно теореме 2.2, для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ существует слабое решение уравнения (3.23) такое, что распределение $x(0)$ совпадает с ν. Если в определениях 3.3, 3.4 $\varpi = 2$, то нулевое решение называем соответственно **устойчивым в среднеквадратическом, глобально асимптотически устойчивым в среднеквадратическом**.

Непродолжаемое решение системы (3.24), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$, обозначим через $y(t;t_0,y_0)$, а его компоненты через $y_i(t;t_0,y_0)$, $i = 1,\dots,d$. В дальнейшем в этом параграфе предполагаем, что все решения системы (3.24) бесконечно продолжимы вправо. Составим уравнение в вариациях для уравнения (3.24)

$$\dot{Z} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t;t_0,y_0))Z. \tag{3.25}$$

Обозначим через $U(t;t_0,y_0)$ базисную матрицу для уравнения (3.25), нормированную при $t = t_0$, затем для каждого $i = 1,\dots,d$ построим матричное уравнение

$$\dot{V}_i = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t;t_0,y_0))V_i + U^\top(t;t_0,y_0)\frac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}(t, y(t;t_0,y_0))U(t;t_0,y_0). \tag{3.26}$$

Пусть $V_i(t;t_0,y_0)$ — решение уравнения (3.26), удовлетворяющее начальному условию $V_i(t_0;t_0,y_0) = 0$. Отметим, что [76, с. 160]

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t;t_0,y_0) = U(t;t_0,y_0),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_0}(t;t_0,y_0) = -U(t;t_0,y_0)f(t_0,y_0),$$

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_0^2}(t;t_0,y_0) = V_i(t;t_0,y_0). \tag{3.27}$$

Если $(x(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ — слабое решение уравнения (3.23) без взрывов, то случайный процесс $x(s)$ имеет стохастический дифференциал $dx(s) = (f(s,x(s)) + q(s,x(s)))ds + g(s,x(s))dW(s)$. Применим формулу Ито к процессам $y_i(t;s,x(s))$, $i = 1,\dots,d$, $0 \leqslant s \leqslant t$, получим равенство

$$dy_i(t;s,x(s)) = \Bigg(\frac{\partial y_i}{\partial t_0}(t;s,x(s)) + \frac{\partial y_i}{\partial y_0}(t;s,x(s))(f(s,x(s))+$$

$$+q(s,x(s))) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(g(s,x(s))g^\top(s,x(s))\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_0^2}(t;s,x(s))\right)\Bigg)ds+$$

$$+\frac{\partial y_i}{\partial y_0}(t;s,x(s))g(s,x(s))dW(s). \tag{3.28}$$

Из (3.27), (3.28) имеем соотношение

$$y_i(t;s,x(s)) = y_i(t;0,x(0)) + \int\limits_0^s \big(U_i(t;\tau,x(\tau))q(\tau,x(\tau))+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(g(\tau,x(\tau))g^\top(\tau,x(\tau))V_i(t;\tau,x(\tau))\right)\big)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^s U_i(t;\tau,x(\tau))g(\tau,x(\tau))dW(\tau) \quad \text{п. н.}, \tag{3.29}$$

где U_i — i-я строка матрицы U.

Полагая в (3.29) $s = t$, приходим к следующему интегральному представлению для слабого решения $x(t)$ системы (3.23):

$$x(t) = y(t;0,x(0)) + \int\limits_0^t \Big(U(t;\tau,x(\tau))q(\tau,x(\tau)) + Z(t;\tau,x(\tau))\Big)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t U(t;\tau,x(\tau))g(\tau,x(\tau))dW(\tau) \quad \text{п. н.}, \tag{3.30}$$

где

$$Z(t;\tau,x(\tau)) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(V_1(t;\tau,x(\tau))g(\tau,x(\tau))g^\top(\tau,x(\tau))),\ldots,\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(V_d)gg^\top\right)^\top.$$

Замечание 3.3. Представление слабого решения $x(t)$ системы (3.23) в виде (3.30) является аналогом формулы В. М. Алексеева [1], которая широко используется при исследованиях обыкновенных дифференциальных систем [76].

Замечание 3.4. Если в системе (3.24) правая часть линейна по y, т. е. $f(t,y)=f(t)y$, то формула (3.30) переходит в формулу Коши

$$x(t) = K(t)K^{-1}(0)x(0) + \int\limits_0^t K(t)K^{-1}(\tau)q(\tau,x(\tau))d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t K(t)K^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau) \quad \text{п. н.}, \tag{3.31}$$

где $K(t)$ — базисная матрица системы $\dot y = f(t)y$.

Замечание 3.5. Как показано в [76, с. 187—188], естественной оценкой для нормы матрицы $U(t;t_0,y_0)$ при $\|y_0\| \leqslant a, a>0$, является оценка

$$\|U(t;t_0,y_0)\| \leqslant L_1 m(t) l(t_0), \tag{3.32}$$

где $L_1 = \mathrm{const}$, m, l — непрерывные на $[0,\infty[$ функции.

Замечание 3.6. Если для матрицы $U(t;t_0,x_0)$ имеет место оценка (3.32) и $\|\frac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}(t,y)\| \leqslant p(t)\|y\|^\gamma$ для $\|y\| \leqslant a$, $\|y(t;t_0,y_0)\| \leqslant$ $\leqslant L_2 m_1(t) l_1(t_0)\|y_0\|^\delta$, p, m_1, l_1 — непрерывные функции, $L_2 = \mathrm{const}$, $\|y_0\| \leqslant a$, то для $\|y_0\| \leqslant a$

$$\|V_i(t,t_0,y_0)\| \leqslant L_1^2 L_2^\gamma m(t) l_1^\gamma(t_0) l^2(t_0) \|y_0\|^{\delta\gamma} \int\limits_{t_0}^t l(\tau) m^2(\tau) m_1^\gamma(\tau) p(\tau) d\tau.$$

Последнее неравенство вытекает из следующего представления для матрицы $V_i(t;t_0,y_0)$:

$$V_i(t;t_0,y_0) = \int\limits_{t_0}^{t} U(t;\tau,y_0)U^\top(\tau;t_0,y_0)\frac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}(\tau,y(\tau;t_0,y_0))U(\tau;t_0,y_0)d\tau.$$

Дальнейшие исследования основаны на следующих двух предложениях.

Предложение 3.2. *Пусть функции* $u(t), g(t), h(t)$ *при* $t \geqslant \alpha$ *непрерывны неотрицательны и*

$$u(t) \leqslant a + \int\limits_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds + \int\limits_{\alpha}^{t} h(s)u^p(s)ds, \quad t \geqslant \alpha, a \geqslant 0, p \geqslant 0.$$

Тогда а) *при* $p = 1$

$$u(t) \leqslant a\exp(\int\limits_{\alpha}^{t}(g(s)+h(s))ds), \quad t \geqslant \alpha; \tag{3.33}$$

б) *при* $0 \leqslant p < 1, \quad q = 1-p,$

$$u(t) \leqslant \left(a^q \exp\big(q\int\limits_{\alpha}^{t} g(s)ds\big) + q\int\limits_{\alpha}^{t} h(s)\exp\big(q\int\limits_{s}^{t} g(\tau)d\tau\big)ds\right)^{1/q} = l(t), t \geqslant \alpha;$$

в) *при* $p > 1 \qquad u(t) \leqslant l(t), t \in [\alpha, \beta[$, *где* β *— наименьший корень уравнения*

$$a^q + q\int\limits_{\alpha}^{t} h(s)\exp\big(q\int\limits_{s}^{t} g(\tau)d\tau\big)ds = 0, \quad q = 1-p. \tag{3.34}$$

Доказательство для случая $p \neq 1$. Пусть $y(t)$ — решение уравнения Бернулли $y^{'} = g(t)y + h(t)y^p, \quad y(\alpha) = a$. Проинтегрировав это уравнение, имеем ($q = 1-p$)

$$y(t) = \left(a^q \exp\big(q\int\limits_{\alpha}^{t} g(s)ds\big) + q\int\limits_{\alpha}^{t} h(s)\exp\big(q\int\limits_{s}^{t} g(\tau)d\tau\big)ds\right)^{1/q} = l(t). \tag{3.35}$$

При $0 \leqslant p < 1$ решение $y(t)$ определено при всех $t \geqslant \alpha$, при $p > 1$ решение определено лишь на промежутке $[\alpha, \beta[$, где β — наименьший корень уравнения (3.34). Так как $u(t) \leqslant y(t)$, то предложение 3.2 вытекает из равенства (3.35). При $p = 1$ доказательство аналогично случаю $p \neq 0$, только вместо уравнения Бернулли следует рассмотреть линейное уравнение $y' = (g(t) + h(t))y$. Неравенство (3.33) называется неравенством Гроноулла — Беллмана.

Предложение 3.3 [76, с. 28]. *Пусть непрерывные и неотрицательные функции* $u(t)$, $f(t)$, $v_i(t)$, $g_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, *удовлетворяют неравенству*

$$u(t) \leqslant f(t) + \sum_{i=1}^{n} v_i(t) \int_{\alpha}^{t} g_i(s)u(s)ds, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда справедлива оценка

$$u(t) \leqslant f(t) + V(t) \int_{\alpha}^{t} \sum_{i=1}^{n} g_i(r)f(r) \exp\left(\int_{r}^{t} \sum_{i=1}^{n} g_i(s)V(s)ds\right)dr,$$

где $V(t) = \sup\limits_{i \in [1,n]} v_i(t)$.

Условие M). Существуют непрерывные функции $m_i(t), l_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, и неотрицательные числа α, β, γ такие, что

$$\|U(t; \tau, y)q(\tau, y)\|^2 \leqslant m_1(t)l_1(\tau)\|y\|^{\alpha},$$

$$\|Z(t; \tau, y)\|^2 \leqslant m_2(t)l_2(\tau)\|y\|^{\beta},$$

$$\|U(t; \tau, y)g(\tau, y)\|^2 \leqslant m_3(t)l_3(\tau)\|y\|^{\gamma}$$

для любых $t, \tau, t \geqslant \tau \geqslant 0, \|y\| < a$.

Предполагаем, что рассматриваемые слабые решения уравнения (3.23) не имеют взрывов. Рассмотрим сначала случай, когда в условии M) $a = \infty$, $\alpha = \beta = \gamma = 2$ и решения системы (3.24) удовлетворяют оценке

$$\|y(t; 0, y_0)\|^2 \leqslant m(t)\|y_0\|^2, \tag{3.36}$$

где $m(t)$ — непрерывная на R_+ функция, $\|y_0\| < \infty$. Из представления слабого решения $x(t)$ в виде (3.30) получаем

$$\|x(t)\|^2 \leqslant 3(\|y(t;0,x(0))\|^2 + \|\int_0^t (Uq+Z)d\tau\|^2 + \|\int_0^t UgdW(\tau)\|^2). \quad (3.37)$$

Из неравенства (3.37) имеем

$$E(\|x(t)\|^2) \leqslant 3\,E\big(m(t)\|x(0)\|^2 + 2tm_1(t)\int_0^t l_1(\tau)\|x(\tau)\|^2 d\tau +$$

$$+2tm_2(t)\int_0^t l_2(\tau)\|x(\tau\|^2)d\tau + m_3(t)\int_0^t l_3(\tau)\|x(\tau)\|^2 d\tau\big). \quad (3.38)$$

Применяя к неравенству (3.38) предложение 3.3, получаем $E(\|x(t)\|^2) \leqslant$

$$\leqslant 3\,E(\|x(0)\|^2)\big(m(t) + M(t)\int_0^t l(\tau)m(\tau)\exp\big(\int_\tau^t l(s)M(s)ds\big)d\tau\big), \quad (3.39)$$

где $M(t) = \max(2tm_1(t); 2tm_2(t); m_3(t))$, $l(t) = l_1(t) + l_2(t) + l_3(t)$. Из оценки (3.39) вытекает

Теорема 3.10. *Пусть выполнены оценка* (3.36) *и условие* M)*, в котором* $\alpha = \beta = \gamma = 2$, $a = \infty$, *и пусть*

$$D(t) = m(t) + M(t)\int_0^t l(\tau)m(\tau)\exp(\int_\tau^t l(s)M(s)ds)d\tau.$$

Если функция $D(t)$ *ограничена на* R_+, *то нулевое решение системы* (3.23) *устойчиво в среднеквадратическом. Если* $D(t) \to 0$, $t \to +$ $+\infty$, *то нулевое решение системы* (3.23) *глобально асимптотически устойчиво в среднеквадратическом.*

Пример 3.3. Рассмотрим скалярное ($d = 1$) стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = \big(-\frac{1}{t+1}x(t) - x^3(t)\big)dt + r(t)x(t)dW(t), \quad (3.40)$$

где $r(t)$ — непрерывная на R_+ функция. Для уравнения (3.40)

$$y^2(t;t_0,y_0) = \frac{(t_0+1)^2y_0^2}{(1+2y_0^2(t_0+1))(t+1)^2+2(t+1)y_0^2(t_0+1)^2} \leqslant \frac{(t_0+1)^2y_0^2}{(t+1)^2},$$

$$Z^2(t;\tau,y) \leqslant \frac{(\tau+1)^2r^2(\tau)y^2}{(t+1)^2}, \quad (U(t;\tau,y)r(t)y)^2 \leqslant \frac{(\tau+1)^2r^2(\tau)y^2}{(t+1)^2},$$

$$D(t) = \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{18}{t+1}\int\limits_0^t (r^4(\tau)+r^2(\tau))\times$$

$$\times \exp\Big(\int\limits_\tau^t 18(s+1)(r^4(s)+r^2(s))ds\Big)d\tau.$$

Если $r^2(t) \leqslant \frac{N}{(t+1)^2}$, где $N = \text{const}$, $N < \frac{1}{18}$, то $D(t) \to 0$, $t \to \to +\infty$. По теореме 3.10, нулевое решение уравнения (3.40) глобально асимптотически устойчиво в среднеквадратическом.

Рассмотрим теперь случай, когда в условии M) $\alpha \geqslant 2, \beta \geqslant 2, \gamma \geqslant 2$ и $a = 1$. Предположим, что существует постоянная L такая, что

$$2tm_1(t) + 2tm_2(t) + m_3(t) \leqslant L, \quad \|y(t;0,y_0)\|^2 \leqslant L\|y_0\|^2 \tag{3.41}$$

$\forall t \geqslant 0, \|y_0\| \leqslant 1$. Для решения $x(t)$ системы (3.23) через $\sigma(\omega)$ обозначим случайную величину $\inf\{t \geqslant 0 | \|x(t,\omega)\| > 1\}$. Используя представление (3.30), легко видеть, что

$$E(\|x(t\wedge\sigma\|^2) \leqslant 3(E(\|y(t\wedge\sigma;0,x(0))\|^2)+$$

$$+2E((t\wedge\sigma)m_1(t\wedge\sigma)\int\limits_0^{t\wedge\sigma} l_1(\tau)\|x(\tau)\|^\alpha d\tau)+$$

$$+2(t\wedge\sigma)m_2(t\wedge\sigma)\int\limits_0^{t\wedge\sigma} l_2(\tau)\|x(\tau)\|^\beta d\tau) + E((t\wedge\sigma)\int\limits_0^{t\wedge\sigma} l_3(\tau)\|x(\tau)\|^\gamma d\tau))\leqslant$$

$$\leqslant 3\,L(E(\|x(0)\|^2) + \int\limits_0^t (l_1(\tau)+l_2(\tau)+l_3(\tau))E(\|x(\tau\wedge\sigma)\|^2)d\tau). \tag{3.42}$$

Применяя предложение 3.2 к неравенству (3.42), получим

$$E(\|x(t\wedge\sigma)\|^2)\leqslant 3LE(\|x(0)\|^2)\exp\Big(\int\limits_0^t l(\tau)d\tau\Big), \tag{3.43}$$

где $l(\tau)=l_1(\tau)+l_2(\tau)+l_3(\tau)$. Теперь, используя неравенство Чебышева, легко показать, что из оценки (3.43) вытекает

Теорема 3.11. *Пусть: выполнены неравенства* (3.41) *и условие* M)*, в котором* $\alpha\geqslant 2$, $\beta\geqslant 2$, $\gamma\geqslant 2$, $\|y\|\leqslant 1$; $\int_0^{+\infty} l(\tau)d\tau<\infty$. *Тогда нулевое решение уравнения* (3.23) *устойчиво по вероятности.*

Пример 3.4. Рассмотрим систему

$$dx_1(t)=-\frac{1}{t+1}x_1(t)dt+a_1(t)x_2(t)dW(t),$$

$$dx_2(t)=\frac{1}{t+1}x_1(t)dt+a_2(t)x_2^2(t)dW(t), \tag{3.44}$$

где a_1,a_2 — непрерывные на $[0,+\infty[$ функции. Для системы (3.44) $\|y(t;0,y_0)\leqslant L\|y_0\|^2$, $\|U(t;\tau,y)g(\tau,y)\|^2\leqslant L(a_1^2(t)+a_2^2(t))\|y\|^2$, $\|y\|\leqslant 1$, $L=\mathrm{const}>0$. Если интеграл $\int_0^\infty(a_1^2(\tau)+a_2^2(\tau))d\tau$ сходится, то, по теореме 3.11, нулевое решение системы (3.44) устойчиво по вероятности.

Пусть теперь в условии M) $\alpha=2,\beta=\gamma<2$, $a=\infty$ и выполняются неравенства (3.41) для $\|y_0\|<\infty$. Из представления слабого решения $x(t)$ системы (3.23) в виде (3.30) с помощью неравенства $E(\|x(t)\|^\beta)\leqslant(E(\|x(t)\|^2))^{\frac{\beta}{2}}$ получаем

$$E(\|x(t)\|^2)\leqslant 3L(E(\|x(0)\|^2)+\int\limits_0^t l_1(\tau)E(\|x(\tau)\|^2)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t(l_2(\tau)+l_3(\tau))(E(\|x(\tau)\|^2))^{\frac{\beta}{2}}d\tau). \tag{3.45}$$

Из неравенства (3.45), используя предложение 3.2, имеем

$$E(\|x(t)\|^2)\leqslant\Bigg(((3LE(\|x(0)\|^2))^q\exp(q\int\limits_0^t l_1(\tau)d\tau)+$$

$$+q\int_0^t (l_2(\tau)+l_3(\tau))\exp(q\int_\tau^t l_1(s)ds)d\tau\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad q = 1-\frac{\beta}{2}. \qquad (3.46)$$

Определение 3.5. *Решение* $x(t)$ *системы* (3.23) *называют ограниченным в среднеквадратическом, если существует постоянная* K *такая, что* $E(\|x(t)\|^2) \leqslant K \quad \forall t \geqslant 0$.

Из оценки (3.46) вытекает следующая теорема об ограниченности в среднеквадратическом решений системы (3.23).

Теорема 3.12. *Пусть*: *выполнены неравенства* (3.41) *для* $\|y_0\| < \infty$; *условие* M), *в котором* $\alpha = 2,\ \beta = \gamma < 2,\ a = \infty$; *функции* $\int_0^t l_1(\tau)d\tau,\ \int_0^t (l_2(\tau)+l_3(\tau))\exp(q\int_\tau^t l_1(s)ds)d\tau, \quad q = 1-\frac{\beta}{2}$, *ограничены на* R_+. *Тогда каждое решение системы* (3.23), *для которого* $E(\|x(0)\|^2) < \infty$, *ограничено в среднеквадратическом.*

Замечание 3.7. Утверждения, аналогичные теореме 3.12, с очевидными изменениями справедливы и в случаях $\alpha = \beta < 2, \gamma = 2$; $\alpha = \gamma < 2, \beta = 2$; $\alpha = \beta = 2, \gamma < 2$; $\alpha = \gamma = 2, \beta < 2$; $\beta = \gamma = 2, \alpha < 2$; $\alpha = \beta = \gamma < 2$.

3.4. Критерий ограниченности в среднеквадратическом решений линейных стохастических дифференциальных систем

В. Коппель [123] установил необходимые и достаточные условия существования по крайней мере одного ограниченного решения у обыкновенной дифференциальной системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ с каждой непрерывной ограниченной на R_+ функцией $b(t)$, а также с каждой функцией $b \in L_1(R_+, R^d)$. Р. Конти [121] обобщил эти результаты на системы с функциями $b \in L_p(R_+, R^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и рассмотрел случаи, когда все решения ограничены или когда только одно решение ограничено. В дальнейшем Н. А. Изобовым, Р. А. Прохоровой, Р. Конти эти результаты неоднократно обобщались, и этими же авторами детально исследовано свойство дихотомичности линейных систем, обеспечивающее наличие ограниченных решений [26]. В данном параграфе получен критерий ограниченности в среднеквадратическом всех решений линейных стохастических систем.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство; $(\mathcal{F}_t)$ — поток под-σ-алгебр из $\mathcal{F}$, $t \geqslant 0$; B_p — банахово пространство $(d \times r)$-матриц g, элементы которых $g_{ij} : R_+ \times \Omega \to \to R$ — измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы, удовлетворяющие условию $(\int_0^{+\infty} E(|g_{ij}(t,\omega)|^p)\,dt)^{1/p} < \infty$, если $1 \leqslant p < \infty$, или условию $(\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \geqslant 0} E(|g_{ij}(t,\omega)|^2))^{1/2} < \infty$, если $p = \infty$, с нормой $\|g\|_{B_p} = (\int_0^{+\infty} E(\|g(t,\omega)\|^p)\,dt)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$; $\|g\|_{B_\infty} = = (\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \geqslant 0} E(\|g(t,\omega)\|^2))^{1/2}$, $p = \infty$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы. В случае, когда $r = 1$, пространство B_∞ обозначаем через B.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + f(t)dW(t), \tag{3.47}$$

где $A : R_+ \to R^{d \times d}$ — непрерывное отображение, $f \in B_p$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $W(t)$ — r-мерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение с $W(0) = 0$ п. н.

Пусть x_0 — $(\mathcal{F}_0)$-измеримая случайная величина. В дальнейшем в этом параграфе рассматриваем лишь решения $x(t)$ с начальными условиями x_0, удовлетворяющими условию $E(\|x_0\|^2) < \infty$. Согласно теореме 2.1, для любого процесса $f \in B_{2p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и любого начального условия x_0 существует решение системы (3.47), которое можно представить в виде (замечание 3.4)

$$x(t) = Y(t)x_0 + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)dW(\tau), \tag{3.48}$$

где $Y(t)$ — базисная матрица системы $dx(t) = A(t)x(t)dt$, нормированная при $t = 0$, т. е. $Y(0) = I$ — единичная матрица. Так как $\forall T > 0 \quad E\big(\int_0^T \|Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)\|^2 d\tau\big) < \infty$, то интеграл в формуле (3.48) является мартингалом.

Лемма 3.3. *Если система* (3.47) *с каждой функцией* $g \in B_{2p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *имеет хотя бы одно ограниченное в среднеквадратическом решение, то существует постоянная* K *такая, что*

$$\int_0^t \|Y(t)Y^{-1}(\tau)\|^{2q} d\tau \leqslant K \quad \forall t \geqslant 0, \quad \text{если } 1 \leqslant q < \infty, \tag{3.49}$$

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|Y(t)Y^{-1}(\tau)\|\leqslant K\quad\forall t\geqslant 0,\quad \text{\textit{если} } q=\infty, \tag{3.50}$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Доказательство. Из представления решений $x(t)$ системы (3.47) в виде (3.48) и из того, что интеграл в формуле (3.48) является мартингалом, следует, что

$$E(\|x(t)\|^2)=E(\|Y(t)x_0\|^2)+E\biggl(\int_0^t\|Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)\|^2d\tau\biggr). \tag{3.51}$$

Поэтому если система (3.47) с каждой функцией $f\in B_{2p}$ имеет ограниченное в среднеквадратическом решение, то решение каждой из этих систем с начальным условием $x(0)=0$ п. н. также ограничено в среднеквадратическом. Определим отображение $G:B_{2p}\to B$, $G(f)=z(t)$, где $z(t)$ — решение системы (3.47) с начальным условием $z(0)=0$ п. н. Отображение G является линейным и имеет замкнутый график, т. е. из условий $\|f_n-f\|_{B_{2p}}\to 0$, $\|G(f_n)-y\|_B\to 0$ следует, что $G(f)=y(t)$. Действительно, пусть

$$y_n(t)=G(f_n)=\int_0^t A(\tau)y_n(\tau)\,d\tau+\int_0^t f_n(\tau)\,dW(\tau). \tag{3.52}$$

Из условия $\|y_n-y\|_B\to 0$ имеем $y_n(t)\xrightarrow{P}y(t)$ для каждого $t\geqslant 0$. Далее,

$$E\biggl(\biggl\|\int_0^t A(\tau)(y_n(\tau)-y(\tau))d\tau\biggr\|\biggr)\leqslant$$

$$\leqslant\biggl(\int_0^t\|A(\tau)\|^2d\tau\biggr)^{1/2}\biggl(\int_0^t E(\|y_n(\tau)-y(\tau)\|^2)d\tau\biggr)^{1/2}.$$

Отсюда с помощью неравенства Чебышева получаем

$$\int_0^t A(\tau)y_n(\tau)\,d\tau\xrightarrow{P}\int_0^t A(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, для всех достаточно больших n имеем

$$P\left\{\left\| \int\limits_0^t (f_n(\tau) - f(\tau))\, dW(\tau)\right\| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\left\{ \int\limits_0^t \|f_n(\tau) - f(\tau)\|^2\, d\tau > \delta\right\} \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \delta$$

(предложение 1.35), поэтому

$$\int\limits_0^t f_n(\tau)\, dW(\tau) \xrightarrow{P} \int\limits_0^t f(\tau)\, dW(\tau).$$

Существуют подпоследовательности y_{n_k} и f_{n_k} соответственно последовательностей y_n и f_n, для которых последние три предела имеют место с вероятностью 1. Заменяя y_n, f_n на y_{n_k}, f_{n_k} в равенстве (3.52) и переходя к пределу в (3.52) при $k \to \infty$, получаем, что $y(t)$ — решение системы (3.47) с $y(0) = 0$ п. н. и $G(f) = y(t)$. Из теоремы Банаха о замкнутом графике (предложение 1.6) следует существование постоянной $K \geqslant 0$ такой, что

$$\|z\|_B \leqslant K\|f\|_{B_{2p}}. \tag{3.53}$$

Зафиксируем $T > 0$, t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, и обозначим через $\lambda_{t_1}(\tau)$ максимальное характеристическое число матрицы $L^\top(t_1,\tau)L(t_1,\tau)$, где

$$L(t,\tau) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(\tau), & 0 \leqslant \tau < t, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \end{cases}$$

а через $V_{t_1}(\tau)$ — множество собственных векторов, соответствующих $\lambda_{t_1}(\tau)$, с евклидовой нормой, равной 1. Функция $\lambda_{t_1}(\cdot)$ кусочно непрерывна на $[0,T]$ и, следовательно, принадлежит $L_q([0,T],R)$ для каждого q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, кроме того, $\lambda_{t_1}(\tau) \geqslant 0$ $\forall \tau \in [0,T]$. Многозначное отображение $V_{t_1}(\cdot) : [0,T] \to \mathrm{comp}(R^n)$ полунепрерывно сверху, поэтому, по предложению 1.41, имеет измеримый селектор $b_{t_1}(\cdot)$, т. е. такое измеримое отображение $b_{t_1}(\cdot)$, что $b_{t_1}(\tau) \in V_{t_1}(\tau)$ для всех $\tau \in [0,T]$.

Пусть $1 < q < \infty$ (в случаях $q = 1$, $q = \infty$ дальнейшее доказательство аналогично $1 < q < \infty$ с очевидными изменениями). Возьмем функцию $g_{t_1}(\tau) = (\lambda_{t_1}(\tau))^{q-1}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, которая принадлежит $L_p([0,T],R)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \lambda_{t_1}(\tau) g_{t_1}(\tau)\, d\tau = \left(\int_0^T (\lambda_{t_1}(\tau))^q d\tau\right)^{1/q} \left(\int_0^T (g_{t_1}(\tau))^p d\tau\right)^{1/p}. \qquad (3.54)$$

Рассмотрим процесс

$$z(t) = \int_0^t Y(t) Y^{-1}(\tau) f_{t_1}(\tau)\, dW(\tau) = \int_0^T L(t,\tau) f_{t_1}(\tau)\, dW(\tau), \qquad (3.55)$$

где $f_{t_1}(\tau,\omega)$ — $(d \times r)$-матрица, первый столбец которой

$$f_{t_1}^{(1)}(\tau,\omega) = \begin{cases} \sqrt{g_{t_1}(\tau)}\, b_{t_1}(\tau), & 0 \leqslant \tau < T, \quad \forall \omega \in \Omega, \\ 0, & \tau > T, \quad \forall \omega \in \Omega, \end{cases}$$

а остальные столбцы нулевые. Процесс $z(t)$, определенный формулой (3.55), является решением системы (3.47) с $z(0) = 0$ п. н. и с $f(\tau) = f_{t_1}(\tau)$. Согласно неравенству (3.53),

$$E(\|z(t_1)\|^2)^{1/2} \leqslant (\sup_{t \geqslant 0} E(\|z(t)\|^2))^{1/2} \leqslant K \left(\int_0^T (g_{t_1}(\tau))^p d\tau\right)^{1/2p}. \qquad (3.56)$$

С другой стороны, из (3.54), (3.55) имеем

$$E(\|z(t_1)\|^2) = E\left(\int_0^T \|L(t_1,\tau) f_{t_1}(\tau)\|^2 d\tau\right) = \int_0^T \lambda_{t_1}(\tau) g_{t_1}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \left(\int_0^T (\lambda_{t_1}(\tau))^q d\tau\right)^{1/q} \left(\int_0^T (g_{t_1}(\tau))^p d\tau\right)^{1/p}. \qquad (3.57)$$

Сравнивая (3.56), (3.57), видим, что

$$\left(\int_0^T \lambda_{t_1}^q(\tau)\, d\tau\right)^{1/(2q)} = \left(\int_0^T \|L(t_1,\tau)\|_e^{2q}\, d\tau\right)^{1/(2q)} \leqslant K, \qquad (3.58)$$

где K не зависит ни от T, ни от t_1, а $\|\cdot\|_e$ — норма матрицы, подчиненная евклидовой векторной норме. Из (3.58) вытекает требуемое неравенство (3.49).

Лемма 3.4. *Если существуют постоянные* K *и* q, $K > 0$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *такие, что выполняется неравенство* (3.49), *если* $1 \leqslant q < \infty$, *или неравенство* (3.50), *если* $q = \infty$, *то для любой функции* $f \in B_{2p}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *все решения системы* (3.47) *ограничены в среднеквадратическом.*

Доказательство леммы 3.4 вытекает из равенства (3.51) и следующей леммы.

Лемма 3.5. *Пусть*: *отображение* $Y : [0, \infty[\to R^{d\times d}$ *непрерывно и матрица* $Y(t)$ *невырождена при каждом* $t \geqslant 0$; $t_1 > 0$; *существует постоянная* $K > 0$, *что*

$$\left(\int\limits_0^t \|Y(t)Y^{-1}(s)\|^{2q} ds\right)^{1/2q} \leqslant K \quad \forall t \geqslant 0, \quad 1 \leqslant 2q < \infty.$$

Тогда существует постоянная $M > 0$ *такая, что*

$$\|Y(t)\| \leqslant M \quad \textit{для} \quad t \in [0, t_1],$$

$$\|Y(t)\| \leqslant M t^{1/2p} \exp\left(-\frac{2q}{K} t^{1/2q}\right) \quad \textit{для} \quad t > t_1$$

в случае $2q > 1, \frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} = 1$;

$$\|Y(t)\| \leqslant M \exp\left(-\frac{t}{K}\right) \quad \textit{для} \quad t \geqslant 0$$

в случае $2q = 1$.

Доказательство для случая $1 < 1/2q < \infty$. Пусть $\varphi(t) = \frac{1}{\|Y(t)\|}$. Из тождества

$$\int\limits_0^t \varphi(s) ds Y(t) = \int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(s)Y(s)\varphi(s) ds$$

с помощью неравенства Гельдера получаем, что

$$\int\limits_0^t \varphi(s) ds \frac{1}{\varphi(t)} \leqslant K^{1/2q} t^{1/2p}.$$

Положим $\psi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$, тогда

$$\psi^{'}(t) = \varphi(t) \geqslant \frac{\psi(t)}{Kt^{1/2p}}.$$

Отсюда для $t \geqslant t_1$ имеем

$$\psi(t) \geqslant \psi(t_1)\exp(\frac{2q}{K}(t^{1/2q} - t_1^{1/2q}).$$

Теперь

$$\|Y(t)\| = \frac{1}{\varphi(t)} \leqslant \frac{Kt^{1/2p}}{\psi(t)} \leqslant \frac{Kt^{1/2p}}{\psi(t_1)}\exp(-\frac{2q}{K}(t^{1/2q} - t_1^{1/2q})), \quad t \geqslant t_1. \quad (3.59)$$

Если взять

$$M = \max\{\frac{K}{\psi(t_1)}\exp(\frac{2q}{K}t_1^{1/2q}), \max_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|Y(t)\|\},$$

то требуемое неравенство вытекает из неравенства (3.59).

Из лемм 3.3 и 3.4 сразу следует

Теорема 3.13 (критерий ограниченности в среднеквадратическом решений линейной системы). *Для того чтобы все решения системы* (4411) *с каждой функцией* $g \in B_{2p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *были ограничены в среднеквадратическом, необходимо и достаточно, чтобы система* $\dot{x} = A(t)x$ *удовлетворяла условию* (3.49), *если* $1 \leqslant q < \infty$, *или условию* (3.50), *если* $q = \infty$, *где* $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Рассмотрим теперь систему

$$dx(t) = Ax(t)\,dt + D\,dW(t), \qquad (3.60)$$

где A, D — постоянные $(d \times d)$-, $(d \times r)$-матрицы, $D \neq 0$. Обозначим через $h(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров n-порядка матрицы $(A - \lambda E, D)$, которая получается приписыванием к $A - \lambda E$ матрицы D, и пусть $\delta(\lambda) = h^{-1}(\lambda)\det(A - \lambda E)$.

Теорема 3.14. *Для того чтобы система* (3.60) *имела хотя бы одно ограниченное в среднеквадратическом решение, необходимо и достаточно, чтобы все корни многочлена* $\delta(\lambda)$ *имели отрицательные вещественные части.*

Доказательство. Система (3.60) имеет хотя бы одно решение, ограниченное в среднеквадратическом, тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^t \|e^{A(t-\tau)}D\|^2\,d\tau \leqslant K, \quad K = \mathrm{const}, \quad \forall t \geqslant 0,$$

что равносильно условию

$$\lim_{y\to+\infty} e^{Ay}D = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$ для каждого $i = 1,\ldots,r$, где $x_i(t)$ — решение задачи Коши $\dot{x} = Ax$, $x(0) = d_i$, d_i — i-й столбец матрицы D. Последнее утверждение, согласно результатам работы [6], имеет место, если и только если все корни многочлена $\delta(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

Следствие 3.1. *Все решения системы* (3.60) *ограничены в среднеквадратическом тогда и только тогда, когда система $\dot{x} = Ax$ устойчива и все корни многочлена $\delta(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.*

Приведем пример системы вида (3.60) с периодической матрицей $A(t)$, имеющей постоянные отрицательные собственные числа, все решения которой не являются ограниченными в среднеквадратическом:

$$dx(t) = \begin{pmatrix} 1-2\cos 4t & -2+2\sin 4t \\ 2+2\sin 4t & -1+2\cos 4t \end{pmatrix} x(t)\,dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW(t). \quad (3.61)$$

Легко видеть, что система $\dot{x} = A(t)x$ с матрицей $A(t)$ из системы (3.61) не является устойчивой [96]. Следующий пример показывает, что и асимптотическая устойчивость системы $\dot{x} = A(t)x$, вообще говоря, не является достаточным условием для существования по крайней мере одного ограниченного в среднеквадратическом решения системы вида (3.60) с переменной матрицей $A(t)$:

$$dx(t) = -\frac{x(t)}{t+1}dt + dW(t), \quad t \geqslant 0.$$

3.5. Асимптотическая эквивалентность в среднеквадратическом обыкновенного дифференциального уравнения и возмущенной стохастической дифференциальной системы

Исследование асимптотических характеристик стохастических уравнений является более сложной задачей, чем изучение аналогичных свойств обыкновенных дифференциальных систем. В этом параграфе устанавливаются условия, при которых для каждого решения возмущенной стохастической системы существует решение невозмущенного обыкновенного дифференциального уравнения со случайным начальным условием такое, что среднеквадратическое отклонение этих решений стремится к нулю при $t \to \infty$. Обыкновенные дифференциальные уравнения с аналогичным свойством называют асимптотически эквивалентными, и мы сохраним это название и для стохастических систем.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + g(t, x(t))dW(t), \tag{3.62}$$

где $A : R_+ \to R^{d\times d}$ и $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ — непрерывные функции. По теореме 2.3, для любой вероятности ν на $(R^d, \beta(R^d))$ уравнение (3.62) имеет слабое решение с начальным распределением ν.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\eta : \Omega \to R^d$ — случайная величина. Непрерывный процесс $y : \Omega \to C(R_+, R^d)$ называем решением системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{3.63}$$

с начальным условием η, если с вероятностью 1 выполняется равенство $y(t) = \eta + \int_0^t A(s)y(s)ds$ для всех $t \geqslant 0$.

Пусть L — подпространство R^d такое, что все траектории всех решений системы (3.63) с начальными условиями $y(0) \in L$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$, а P_0 — матрица оператора проектирования R^d на L в каноническом базисе пространства R^d, $Y(t)$ — базисная матрица системы (3.63), $Y(0) = I$ — единичная матрица.

Теорема 3.15. *Пусть*: a) *существуют постоянные* K *и* q, $1 < q \leqslant \infty$, *такие, что* $\forall t \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^t \|Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\|^{2q}d\tau + \int\limits_t^{+\infty} \|Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\|^{2q}d\tau \leqslant K,$$

когда $1 < q < \infty$, *или неравенство*

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} |Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\| + \sup_{\tau\geqslant t} \|Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\| \leqslant K,$$

когда $q = \infty$; b) $\|g(t,x)\| \leqslant n(t)$ $\forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, *где* $n : R_+ \to$ $\to R_+$ — *непрерывная функция такая, что* $n \in L_{2p}(R_+, R)$, $1/p +$ $+ 1/q = 1$. *Тогда для любого слабого решения* $(x(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, W(t), e)$ *уравнения* (3.62) *найдется решение* $y(t)$ *уравнения* (3.63) *такое, что*

$$\lim_{t\to\infty} E(\|x(t) - y(t)\|^2) = 0.$$

Доказательство. Пусть $1 < q < \infty$ (если $q = \infty$, то доказательство аналогично случаю $1 < q < \infty$ с очевидными изменениями). Пусть $(x(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, W(t), e)$ — слабое решение уравнения (3.62). Согласно теореме 2.10, $e = \infty$ п. н. С помощью неравенства Гельдера и условий a), b) теоремы 3.15 для любых $t, s, 0 \leqslant t \leqslant s$, имеем

$$E(\| \int\limits_0^s (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))dW(\tau)\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg(\int\limits_0^\infty \|(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\|^{2q}d\tau \Bigg)^{1/q} \Bigg(\int\limits_0^\infty n^{2p}(\tau)d\tau \Bigg)^{1/p} \leqslant k_1,$$

$$E(\| \int\limits_t^s Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))dW(\tau)\|^2) \leqslant k_2,$$

$k_1, k_2 = \mathrm{const}$, следовательно, с вероятностью 1 существуют конечные пределы (см. свойства мартингалов)

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_0^s (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))dW(\tau) = \int\limits_0^\infty (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))dW(\tau),$$

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_t^s Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau)=$$

$$=\int\limits_t^\infty Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau)$$

и

$$E\big(\|\int\limits_t^\infty Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau)\|^2\big)=$$

$$=E\big(\int\limits_t^\infty \|Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\|^2 d\tau\big).$$

Представим слабое решение $x(t)$ уравнения (3.62) в виде (замечание 3.4)

$$x(t)=Y(t)x(0)+\int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau)=$$

$$=Y(t)\big(x(0)+\int\limits_0^\infty (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau)\big)+\int\limits_0^t Y(t)P_0\times$$

$$\times Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau)-\int\limits_t^\infty Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau). \tag{3.64}$$

Возьмем решение $y(t)$ системы (3.63) с начальным условием

$$y(0)=x(0)+\int\limits_0^\infty (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))dW(\tau).$$

Из (3.64) следует

$$E(\|y(t)-x(t)\|^2)\leqslant 2\Big[\Big(\int\limits_0^a \|Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\|^{2q}d\tau\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_0^a n^{2p}(\tau)d\tau\Big)^{1/p}+$$

$$+\Big(\int\limits_a^t \|Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\|^{2q}d\tau\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_a^t n^{2p}(\tau)d\tau\Big)^{1/p}+$$

$$+\Big(\int\limits_t^\infty \|Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\|^{2q}d\tau\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_t^\infty n^{2p}(\tau)d\tau\Big)^{1/p}\Big],\quad 0\leqslant a\leqslant t. \tag{3.65}$$

Так как $n(\cdot)\in L_{2p}(R_+,R)$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существует a такое, что для всех $t\geqslant a$ второе слагаемое в (3.65) меньше ε. Зафиксируем одно из таких a. Так как $\|Y(t)P_0\|\to 0$ при $t\to\infty$, то первое слагаемое в (3.65) меньше ε для всех достаточно больших t. Третье слагаемое меньше ε для всех достаточно больших t в силу того, что $n(\cdot)\in L_{2p}(R_+,R)$. Теперь требуемое утверждение вытекает из (3.65).

3.6. Среднеквадратические характеристические показатели стохастических систем

В этом параграфе вводится старший среднеквадратический показатель стохастической дифференциальной системы и показывается, что верхний центральный показатель линейной невозмущенной дифференциальной системы является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя возмущенной стохастической системы.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t)=A(t)x(t)dt+g(t,x(t))dW(t), \tag{3.66}$$

где $A:R_+\to R^{d\times d}$ и $g:R_+\times R^d\to R^{d\times d}$ — непрерывные ограниченные функции. Для любого $x_0\in R^d$ уравнение (3.66) имеет слабое решение с начальным условием x_0.

Определение 4.8. Число $\varrho(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sup(2t)^{-1}\ln E(\|x(t)\|^2)$ называем верхним среднеквадратическим характеристическим показателем слабого решения $x(t)$ уравнения (3.66), а число $\sup\limits_{x\in A}\varrho(x)=\Lambda$, где A — множество всех слабых решений уравнения (3.66), — старшим среднеквадратическим показателем уравнения (3.66).

Число Ω' называется верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (3.66), если для любого

$\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции g, удовлетворяющей условию $\|g(t,x)\| \leqslant \delta\|x\|$ $\forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, старший среднеквадратический показатель системы (3.66) не превосходит $\Omega' + \varepsilon$.

Число $\bar{\Omega}$ называется достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического характеристического показателя системы (3.66), если оно является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется система (3.66) с функцией g, удовлетворяющей неравенству $\|g(t,x)\| \leqslant \delta\|x\| \quad \forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, и со старшим среднеквадратическим показателем, не меньшим чем $\bar{\Omega} - \varepsilon$.

Теорема 3.16. *Верхний центральный показатель* [26, 96] *системы*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{3.67}$$

является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (3.66).

Верхний центральный показатель диагональной системы (3.67) *является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы* (3.66).

Доказательство. Пусть $R(t)$ — верхняя функция для системы (3.67), т. е. для любого ε существует постоянная D_ε такая, что $\|Y(t)Y^{-1}(\tau)\| \leqslant D_\varepsilon \exp(\int_\tau^t (R(s) + (1/2)\varepsilon)ds)$, где $Y(t)$ — базисная матрица системы (3.67). Возьмем произвольное слабое решение $x(t)$ уравнения (3.66) с функцией g, удовлетворяющей неравенству $\|g(t,x)\| \leqslant (1/2)\varepsilon\|x\| \quad \forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, и представим его в виде (замечание 3.4)

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(0)x(0) + \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))dW(\tau).$$

Отсюда имеем

$$E(\|x(t)\|^2) \leqslant 2D_\varepsilon^2 E(\|x(0)\|^2) \exp\big(2\int_0^t (R(\tau) + \varepsilon)d\tau\big).$$

Из последнего неравенства вытекает первое утверждение теоремы.

Рассмотрим систему

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \Phi x(t)dW(t), \tag{3.68}$$

где $A(t) = \mathrm{diag}[p_i(t)]$, $p_i(t), i = 1, \ldots, d$, $t \geqslant 0$, — непрерывные ограниченные функции, Φ — $(d \times d)$-матрица, у которой все элементы, находящиеся под главной диагональю, равны $\delta > 0$, элемент, стоящий в первой строке и в последнем столбце, тоже равен δ, а остальные элементы — нулевые, $W(t)$ — одномерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение, заданное на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$. Используя метод последовательных приближений [8, с. 171], d-компоненту $x_d(t)$ сильного решения $x(t)$ системы (3.68) с начальным условием $x(0) = S \in R^d$, $S_i = s > 0, i = 1, \ldots, d$, можно представить в виде

$$x_d(t) = s \exp\Big(\int\limits_0^t p_d(\tau)d\tau\Big) + \sum_{r=1}^{\infty} \delta^r s J_d^r(t), \tag{3.69}$$

где

$$J_d^r(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_r} \int\limits_0^{t_{r-1}} \ldots \int\limits_0^{t_2} \exp(\int\limits_0^{t_1} p_{d-r}(\tau)d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} p_{d-r+1}(\tau)d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t_r}^{t} p_d(\tau)d\tau)dW(t_1)dW(t_2)\ldots dW(t_r),$$

где $d-i$ равняется $d-m$ для $i = kd+m, k \in N$, $0 \leqslant m \leqslant d-1$. Легко увидеть, что $E(J_d^r J_d^m) =$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_r} \int\limits_0^{t_{r-1}} \ldots \int\limits_0^{t_2} \exp\Big(2\big(\int\limits_0^{t_1} p_{d-r}d\tau + \ldots + \int\limits_{t_r}^{t} p_d d\tau\big)\Big)dt_1 \ldots dt_r, & m = r, \\ 0, & r \neq m. \end{cases} \tag{3.70}$$

Из соотношений (3.69), (3.70) следует $E(|x_d(t)|^2) \geqslant$

$$\geqslant s\,\delta^r \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_r} \int\limits_0^{t_{r-1}} \ldots \int\limits_0^{t_2} \exp\Big(2\big(\int\limits_0^{t_1} p_{d-r}(\tau)d\tau + \ldots + \int\limits_{t_r}^{t} p_d(\tau)d\tau\big)\Big)dt_1 \ldots dt_r.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы 3.16 надо повторить соответствующую часть доказательства теоремы 13.3.1 из книги [96].

ГЛАВА 4
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

4.1. Элементарные стохастические дифференциальные системы

В этом параграфе рассматриваем те стохастические дифференциальные уравнения, для которых возможно построение решений с помощью элементарных операций (арифметических действий, дифференцирований, интегрирований, разрешений аналитических соотношений). Несмотря на то что при этом получаются громоздкие формулы, содержащие интегралы Ито или Стратоновича, они все же дают возможность исследования свойств решений ССДУ.

1. Простейшие стохастические дифференциальные системы.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $f : R_+ \times \ \Omega \to R^d$ и $g : R_+ \times \ \Omega \to R^{d\times d}$ — процессы, принадлежащие соответственно пространствам L_1^{loc} и L_2^{loc}, $W(t)$ — d-мерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение, x_0 — d-мерная $(\mathcal{F}_0)$-измеримая случайная величина.

Простейшей системой стохастических дифференциальных уравнений называют систему вида

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dW(t), \quad x(0) = x_0. \tag{4.1}$$

Процесс

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t g(\tau)dW(\tau), \quad t \in R_+,$$

является сильным решением системы (4.1).

Будем говорить, что ССДУ является элементарной, если ее решения можно построить с помощью конечного числа элементарных операций (арифметических действий, дифференцирований, интегрирований, разрешений аналитических соотношений). Примером такой системы является простейшая стохастическая система.

При построении решений конкретных уравнений и систем пытаются прежде всего преобразовать их к более простым уравнениям. Чаще всего при этом используют замену переменных, т. е. дважды непрерывно дифференцируемую функцию $y = v(t, x)$, имеющую обратную функцию вида $x = u(t, y)$. Согласно формуле Ито, система

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t)$$

с помощью замены $y = v(t, x)$ приводится к системе

$$dy(t) = F(t, y(t))dt + G(t, y(t))dW(t),$$

где $F(t, y) = (v_t' + v_x' f + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(gg^\top v_{xx}''))\big|_{x=u(t,y)}$, $G(t, y) = v_x' g\big|_{x=u(t,y)}$.

2. Уравнения, приводимые к простейшим с помощью замены переменных.

Рассмотрим СДУ

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \tag{4.2}$$

$f : R_+ \times R \to R$, $g : R_+ \times R \to R$, $g(t, x) \neq 0$. Уравнение (4.2) приводимо к простейшему, если существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $y = v(t, x)$, имеющая обратную функцию вида $x = u(t, y)$, такая, что

$$(v_t' + v_x' f + \frac{1}{2} v_{x^2}'' g^2)(t, x) = a(t), \tag{4.3}$$

$$(v_x' g)(t, x) = b(t). \tag{4.4}$$

Продифференцируем (4.3) по x, предполагая, что f и g обладают производными требуемого порядка,

$$v_{tx}'' + (h_x' f + \frac{1}{2} g^2)_x' = 0. \tag{4.5}$$

Из (4.4) получаем

$$v_x' = \frac{b(t)}{g(t, x)}. \tag{4.6}$$

Отсюда

$$v''_{tx} = \frac{gb' - bg'_t}{g^2}, \tag{4.7}$$

$$v''_{x^2} = \frac{-bg'_x}{g^2}. \tag{4.8}$$

Подставляя (4.6)–(4.8) в (4.5) имеем

$$\frac{b'}{g} - b(\frac{g'_t}{g^2} - (\frac{f}{g})'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}) = 0$$

или

$$b' = bg(\frac{g'_t}{g^2} - (\frac{f}{g})'_x + \frac{1}{2}g_{x^2}''). \tag{4.9}$$

Левая часть (4.9) не зависит от x, поэтому

$$(g(\frac{g'_t}{g^2} - (\frac{f}{g})'_x) + \frac{1}{2}g_{x^2}'')'_x \equiv 0. \tag{4.10}$$

Пусть теперь выполнено тождество (4.10). Тогда из (4.9) может быть найдена функция $b(t)$, а затем из (4.6) можно определить v, которая обратима, т. к. $v'_x \neq 0$. Из (4.5) следует, что функция $f(t)$, найденная из (4.3), действительно не зависит от x. Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 4.1 [133]. *Уравнение* (4.2) *приводимо с помощью замены переменных к простейшему СДУ тогда и только тогда, когда выполнено тождество* (4.10).

Линейное однородное уравнение

$$dx(t) = f_1(t)x(t)dt + g_1(t)x(t)dW(t), x(0) = x_0, \tag{4.11}$$

приводимо к простейшему. Легко видеть, что процесс

$$x(t) = x_0 \exp(\int\limits_0^t (f_1(s) - 1/2g_1^2(s))ds + \int\limits_0^t g_1(s)dW(s))$$

является сильным решением уравнения (4.11).

Линейное неоднородное уравнение

$$dx(t) = (f_1(t)x(t) + f_2(t))dt + (g_1(t)x(t) + g_2(t))dW(t), x(0) = x_0, \tag{4.12}$$

в общем случае не приводимо к простейшему, но, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, его решения могут быть найдены методом вариации произвольных постоянных. Пусть $x_0(t)$ — сильное решение уравнения (4.11) с $x_0 = 1$. Решение уравнения (4.12) будем искать в виде $x(t) = y(t)x_0(t)$. Легко проверить, что $y(t)$ удовлетворяет простейшему уравнению

$$dy(t) = x_0^{-1}(t)((f_2(t) - g_1(t)g_2(t))dt + g_2(t)dW(t)), y(0) = x_0.$$

Процесс

$$x(t) = x_0(t)(x_0 + \int\limits_0^t x_0^{-1}(s)(f_2(s) - g_1(s)g_2(s))ds + \int\limits_0^t x_0^{-1}g_2(s)dW(s)) \tag{4.13}$$

является сильным решением уравнения (4.12). Таким образом, линейное неоднородное уравнение является элементарным.

3. Уравнения, приводимые к линейным неоднородным СДУ с помощью замены переменных.

Ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t), \quad g(x) \neq 0, \tag{4.14}$$

$$dy(t) = (\alpha + \beta y)dt + (\gamma + \delta y)dW(t), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R, \tag{4.15}$$

и автономной замены $y = v(x)$, предполагая, что функции f и g соответственно дважды и трижды непрерывно дифференцируемы. Уравнение (4.14) приводимо к (4.15) с $\delta \neq 0$, если для некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функции $v(x)$ имеют место равенства

$$fv^{'} + \frac{1}{2}g^2v^{''} = \alpha + \beta v, \quad gv^{'} = \gamma + \delta v. \tag{4.16}$$

Функцию $v(x)$ найдем из (4.16): $v(x) = ce^{\delta B(x)} - \frac{\gamma}{\delta}$, где $B(x) = \int_a^x \frac{dy}{g(y)}$, $a = \mathrm{const}, c = \mathrm{const}$. Подставляя найденную функцию $v(x)$ в первое из соотношений (4.16), получаем

$$(\frac{f}{g}\delta + \frac{1}{2}g^2(\frac{\delta^2}{g^2} - \frac{\delta g^{'}}{g^2}))ce^{\delta B(x)} = c\beta^{\delta B(x)} - \frac{\beta\gamma}{\delta} + \alpha.$$

Отсюда

$$((\frac{f}{g} - \frac{1}{2}g^{'})\delta + \frac{1}{2}\delta^2 - \beta)e^{\delta B(x)} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{c\delta}. \tag{4.17}$$

Обозначим $A(x) = \frac{f}{g} - \frac{1}{2}g^{'}$. Дифференцируя (4.17), имеем

$$(\frac{A(x)\delta + \frac{1}{2}\delta^2 - \beta}{g} + A^{'}(x))\delta e^{\delta B(x)} = 0.$$

Умножив последнее соотношение на $\frac{g}{\delta}\exp(-\delta B(x))$ и опять продифференцировав, приходим к тождеству

$$\delta A^{'}(x) + (gA^{'})^{'} \equiv 0. \tag{4.18}$$

Пусть $A^{'}(x) \neq 0$, тогда из (4.18) вытекает, что

$$(\frac{(gA^{'})^{'}}{A^{'}})^{'} \equiv 0. \tag{4.19}$$

Обратно, если выполняется тождество (4.19) и $A^{'}(x) \neq 0$, то замена $y = v(x) = ce^{\delta B(x)}$, $c = \text{const}$, $\delta = -\frac{(gA^{'})^{'}}{A^{'}}$, сводит уравнение (4.14) к линейному неоднородному уравнению (4.15).

Предложение 4.2 [133]. *Уравнение*

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t)$$

с $g(x) \neq 0$, $A^{'}(x) \neq 0$, *приводимо с помощью замены переменных к линейному неоднородному уравнению* (4.15) *тогда и только тогда, когда* $(\frac{(gA^{'})^{'}}{A^{'}})^{'} \equiv 0$, *где* $A(x) = \frac{f}{g} - \frac{1}{2}g^{'}$.

Замечание 4.1. Аналогичным образом показывается, что СДУ (4.14) с $g(x) \neq 0$ приводимо к (4.15) с $\delta = 0$, если и только если $(gA^{'})^{'} \equiv 0$.

Для уравнения

$$dx(t) = (ax^n(t) + bx(t))dt + kx(t)dW(t), \tag{4.20}$$

$n \neq 0, n \neq 1, a \neq 0, k \neq 0$, тождество (4.19) выполняется. Легко проверить, что уравнение (4.20) приводимо к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (a + (b + \frac{1}{2}k^2 n)y(t))dt + ky(t)dW(t)) \quad y = \frac{1}{1-n}x^{1-n}.$$

4. Сведение интегрирования СДУ к интегрированию уравнения в частных производных первого порядка и обыкновенного дифференциального уравнения [127].

Рассмотрим СДУ

$$dx(t) = (f(x(t)) + \frac{1}{2}g(x(t))g^{'}(x(t)))dt + g(x(t))dW(t), \quad x(0) = x_0. \tag{4.21}$$

Пусть функция $h(\alpha, \beta)$ является решением задачи

$$\frac{\partial h(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = g(h(\alpha, \beta)), \quad h(\alpha, 0) = \alpha. \tag{4.22}$$

Построим функцию $\varphi(\alpha, \beta) = (h^{'}_{\alpha}(\alpha, \beta))^{-1}$ и уравнение

$$\frac{dD}{dt} = \varphi(D, W(t))f(h(D, W(t))), \quad D(0) = x_0. \tag{4.23}$$

Покажем, что если $D(t)$ — решение задачи (4.23), то процесс $x(t) = h(D(t), W(t))$ является решением уравнения (4.21).

Действительно, применяя формулу Ито, имеем

$$x(t) - x_0 = \int\limits_0^t \frac{\partial h}{\partial \beta}(D(s), W(s))dW(s) + \int\limits_0^t \frac{\partial h}{\partial \alpha}(D(s), W(s))D^{'}(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(D(s), W(s))ds = \int\limits_0^t g(h(D(s), W(s)))dW(s) +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\partial h(D(s), W(s))}{\partial \alpha}(\frac{\partial h(D(s), W(s))}{\partial \alpha})^{-1} f(h(D(s), W(s)))ds =$$

$$= \int\limits_0^t g(x(s))dW(s) + \int\limits_0^t f(x(s))ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t gg^{'}(x(s))ds.$$

Таким образом, интегрирование СДУ (4.21) сводится к интегрированию уравнений (4.22) и (4.23).

В частности, если $g(x) = kx$, то $h(\alpha, \beta) = \alpha e^{k\beta}$, $\varphi(\alpha, \beta) = e^{-k\beta}$ и интегрирование СДУ

$$dx(t) = (f(x(t)) + \frac{1}{2}kx(t))dt + kx(t)dW(t), \quad x(0) = x_0,$$

сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{dD(t)}{dt} = e^{-kW(t)} f(D(t)e^{kW(t)}), \quad D(0) = x_0.$$

Пример 4.1. Проинтегрируем уравнение

$$dx(t) = (x^3(t) + 2x(t))dt + x^2(t)dW(t), \quad x(0) = x_0.$$

Уравнение (4.22) имеет вид $\frac{\partial h(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = h^2(\alpha, \beta)$, $h(\alpha, 0) = \alpha$. Легко найти, что $h(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$, $\frac{dD(t)}{dt} = 2D(t) - D^2(t)W(t)$, $D(0) = x_0$. Отсюда

$$D(t) = \frac{x_0}{e^{-2t} + 2x_0 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} W(\tau)d\tau}$$

и, следовательно,

$$x(t) = \frac{x_0 e^{2t}}{1 - x_0 e^{2t} + 2x_0 \int_0^t e^{2\tau} W(\tau)d\tau}.$$

5. Преобразование ССДУ с помощью теоремы Гирсанова [8, с. 180–186].

Пусть $(x(t), B(t))$, $t \in [0, T], T > 0,$ — слабое решение ССДУ

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))B(t) \tag{4.24}$$

на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $f : [0, T] \times \times R^d \to R^d$, $g : [0, T] \times R^d \to R^{d\times d}$ — измеримые по Борелю локально ограниченные отображения и пусть $\gamma(t, x) = = (\gamma_1(t, x), \ldots, \gamma_d(t, x))$ — измеримая по Борелю функция, удовлетворяющая условию $E(\exp(\frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma(s, x(s))\|^2 ds)) < \infty$ для каждого $t \in \in [0, T]$. Тогда процесс

$$M(t) = \exp(\int\limits_0^t \gamma(s, x(s))dB(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\gamma(s, x(s))\|^2 ds, t \in [0, T],$$

является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом [8, с. 183]. Определим меру Q на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ соотношением $dQ = M(T)dP$. Процесс $W(t) = B(t) - \int_0^t \gamma(s, x(s))ds$, $t \in [0, T]$, является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и

$$dx(t) = (f(t,x(t)) + g(t,x(t))\gamma(t,x(t)))dt+$$
$$+g(t,x(t))dW(t), t \in [0,T] \qquad (4.25)$$

(теорема Гирсанова, [8, с. 183]). Таким образом, интегрирование ССДУ (4.25) сводится к интегрированию системы (4.24).

Если уравнение $dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t)$ является элементарным, то таким же будет и уравнение $dx(t) = (f(t,x(t)) + + h(t,x(t))g(t,x(t)))dt + g(t,x(t))dW(t)$, где $h(t,x)$ — ограниченная измеримая по Борелю функция. В частности, уравнение $dx(t) =$

$$= (a(t)+b(t)x(t)+(c(t)x(t)+m(t))h(t,x(t)))dt+(c(t)x(t)+m(t))dW(t)$$

является элементарным.

Пример 4.2. Предложенный метод применим к уравнению

$$dx(t) = \sin x(t)dt + x(t)dW(t), x(0) = x_0. \qquad (4.26)$$

Возьмем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $B(t)$ и рассмотрим СДУ $d\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)dB(t)$, $x(0) = x_0$. Процесс $\tilde{x}(t) = x_0 \exp(B(t) - \frac{1}{2}t)$ является сильным решением последнего уравнения. Определим меру Q на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, $T > 0$, соотношением $dQ = M_T dP$, где

$$M_T = \exp(\int\limits_0^T \gamma(x_0 e^{B(s)-\frac{1}{2}s}))dB(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \gamma(x_0 e^{B(s)-\frac{1}{2}s})^2 ds,$$

$$\gamma(x) = -\frac{\sin x}{x}, x \neq 0, \gamma(0) = 1.$$

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$, процесс

$$W(t) = B(t) + \int\limits_0^t \frac{\sin(x_0 e^{B(s)-\frac{1}{2}s})}{x_0 e^{B(s)-\frac{1}{2}s}} ds$$

является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением, а процесс $(\tilde{x}(t), W(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является слабым решением СДУ (4.26).

6. Преобразование ССДУ с помощью замены времени.

Рассмотрим ССДУ

$$dx(t) = \rho(y(t), x(t)) f(y(t), x(t))dt + \rho^{\frac{1}{2}}(y(t), x(t))g(y(t), x(t))dW(t),$$

$$dy(t) = \rho(y(t), x(t))dt, \quad y(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \tag{4.27}$$

где $\rho : R_+ \times R^d \to R_{+,}$ $f : R_+ \times R^d \to R^d,$ $g : R_+ \times R^d \to \to R^{d\times d}$ — измеримые по Борелю локально ограниченные функции. Пусть $(x(t), y(t), \Omega, \mathfrak{F}, P, \mathfrak{F}_t, W(t), e)$ — слабое решение системы (4.27). Предположим, что $\rho(y(t), x(t)) > 0$. Траекториями процесса $y(t) = \int_0^t \rho(y(s), x(s)ds)$ являются непрерывные строго возрастающие функции. Пусть $\lim\limits_{t\to e-0} y(t) = l$. Существует непрерывный строго возрастающий процесс $\sigma(t)$, определенный на $[0, l[$ такой, что $y(\sigma(\tau)) = \tau$, $\sigma(y(t)) = t$. Пусть $\tilde{x}(t) = x(\sigma(t))$. Для каждой функции $h \in C_b^2(R^d)$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ процесс

$$h(x(t\wedge\sigma_n)) - h(x(0)) - \int\limits_0^{t\wedge\sigma_n} h_x'(x(s))\rho(y(s), x(s))f(y(s), x(s))ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t\wedge\sigma_n} \mathrm{tr}\big(h_{x^2}''(x(s))\rho(y(s), x(s))g(y(s), x(s))g^\top(y(s), x(s))\big)ds$$

является $(\mathfrak{F}_t)$-мартингалом, где $\sigma_n = \inf\{t|\sqrt{\|x(t)\|^2 + y^2(t)} > n\}$. По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$h(x(\sigma_n\wedge\sigma(t))) - h(x(0)) - \int\limits_0^{\sigma(t)\wedge\sigma_n} h_x'(x(s))\rho(y(s), x(s))f(y(s), x(s))ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sigma_n\wedge\sigma(t)} \mathrm{tr}\big(h_{x^2}''(x(s))\rho(y(s), x(s))g(y(s), x(s))g^\top(y(s), x(s))\big)ds$$

является $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$-мартингалом, где $\tilde{\mathfrak{F}}_t = \mathfrak{F}_{\sigma(t)}$. Можно видеть, что $\sigma(t)\wedge\ \sigma_n = \sigma(t\wedge\tilde{\sigma_n})$, где $\tilde{\sigma_n} = \inf\{t|\sqrt{\|\tilde{x}(t)\|^2 + t^2} > n\}$. Следовательно, $x(\sigma(t)\wedge\sigma_n) = \tilde{x}(t\wedge\tilde{\sigma}_n)$. Так как

$$t = \int\limits_0^t \frac{dy(\tau)}{\rho(y(\tau), x(\tau))},$$

то

$$\sigma(t) = \int\limits_0^{\sigma(t)} \frac{dy(\tau)}{\rho(y(\tau), x(\tau))} = \int\limits_0^t \frac{ds}{\rho(s, \tilde{x}(s))},$$

$$\int\limits_0^{\sigma_n \wedge \sigma(t)} \Big(h_x^{'}(x(s))\rho(y(s), x(s))f(y(s), x(s)) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(h_{x^2}^{''}(x(s))\rho(y(s), x(s))g(y(s), x(s))g^\top(y(s), x(s))\big)\Big)ds =$$

$$= \int\limits_0^{t\wedge\tilde{\sigma}_n} \Big(h_x^{'}(x(s))\rho(s, \tilde{x}(s))f(s, \tilde{x}(s)) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(h_{x^2}^{''}(\tilde{x}(s))\rho(s, \tilde{x}(s))g(s, \tilde{x}(s))g^\top(s, \tilde{x}(s))\big)\Big)\frac{1}{\rho(s, \tilde{x}(s))}ds.$$

Отсюда следует, что процесс $h(\tilde{x}(t \wedge \tilde{\sigma}_n)) - h(\tilde{x}(0)) -$

$$-\int\limits_0^{t\wedge\tilde{\sigma}_n} \Big(h_x^{'}(x(s))f(s, \tilde{x}(s)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(h_{x^2}^{''}(\tilde{x}(s))g(s, \tilde{x}(s))g^\top(s, \tilde{x}(s))\big)\Big)ds$$

является $(\tilde{\mathfrak{F}}_t)$-мартингалом. Согласно предложению 1.38, $\tilde{x}(t)$ — слабое решение системы

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t). \tag{4.28}$$

Таким образом, построение решений системы (4.28) может быть сведено к построению решений системы (4.27).

Если уравнение $dx(t) = f_1(x(t))dt + g_1(x(t))dW(t)$ является элементарным, то уравнение $dx(t) = v^2(x(t))f_1(x(t))dt + v(x(t))g_1(x(t))dW(t)$, где $v(x)$ — непрерывная функция, $v(x) > 0$, тоже элементарное, так же как и уравнения

$$dx(t) = (v^2(x(t))f_1(x(t)) + h(x(t))g_1(x(t))v(x(t)))dt + v(x(t))g_1(x(t))dW(t),$$

$$dx(t) = (f_1(x(t)) + h(x(t))g_1(x(t)))v^2(x(t))dt + v(x(t))g_1(x(t))dW(t),$$

где $h(x)$ — ограниченная измеримая по Борелю функция. В частности, элементарным является уравнение

$$dx(t) = (ax(t)+b+h(x(t))(cx(t)+d))v^2(x(t)))dt+v(x(t))(cx(t)+d)dW(t),$$

$a, b, c, d \in R$.

Пример 4.3. Найдем решение начальной задачи

$$dx(t) = x(t)(x^2(t)+1)^2dt + (x^2(t)+1)dW(t), x(0) = x_0. \qquad (4.29)$$

Система (4.27) для уравнения (4.29) имеет вид

$$\begin{cases} d\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)dt + dW(t), \quad x(0) = x_0, \\ d\tilde{y}(t) = \frac{dt}{(\tilde{x}^2(t)+1)^2}, \quad y(0) = 0. \end{cases} \qquad (4.30)$$

Процесс

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = x_0 e^t + \int_0^t e^{t-\tau} dW(\tau), \\ \tilde{y}(t) = \int_0^t \frac{ds}{((x_0 e^s + \int_0^s e^{t-\tau} dW(\tau))^2+1)^2} \end{cases}$$

является слабым решением системы (4.30). Пусть $\sigma(t)$ — процесс обратный к $y = \tilde{y}(t)$, тогда $x(t) = x_0 e^{\sigma(t)} + \int_0^{\sigma(t)} e^{\sigma(t)-\tau} dW(\tau)$ — слабое решение уравнения (4.29).

7. Переход к уравнению Стратоновича.

Рассмотрим ССДУ Стратоновича

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t, x(t)) \circ dW_i(t), \quad x(0) = x_0, \qquad (4.31)$$

$f : R_+ \times R^d \to R^d$, $g_i : R_+ \times R^d \to R^d$. В случае, когда функции f и g_i принадлежат соответственно классам $C^{1,0}$ и $C^{2,\delta}$, $\delta > 0$, то (предложение 2.4) решение $x = x(t)$ уравнения Стратоновича с начальным условием $x(0) = x_0$ является сильным решением уравнения Ито

$$dx(t) = (f(t, x(t) + c(t, x(t))))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t, x(t))dW_i(t), \qquad (4.32)$$

где $c(t, x) = (c_1(t, x)) \ldots c_d(t, x))^\top$,

$$c_j(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} g_{ki}(t, x(t))), j = 1, \ldots, d,$$

где g_{ji} — j-й элемент вектора g_i.

Обратно, сильное решение $x = x(t)$ уравнения Ито

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t, x(t))dW_i(t), \quad x(0) = x_0,$$

является решением уравнения Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + \sum_{i=1}^{d} g_i(t, x(t)) \circ dW_i(t), \quad x(0) = x_0.$$

В случае $d = r = 1$ уравнение Ито имеет вид

$$dx(t) = (f(t, x(t)) + \frac{1}{2} g(t, x(t)) g_x^{'}(t, x(t)))dt + g(t, x(t))dW(t).$$

Интегралы Стратоновича не являются мартингалами, каковыми являются интегралы Ито, что дает интегралам Ито важное преимущество при исследовании решений ССДУ, но интеграл Стратоновича более удобен при преобразованиях уравнений, так как вместо формулы Ито имеет место более привычная формула

$$dF(x(t)) = F^{'}(x(t)) f(t, x(t))dt + F^{'}(x(t)) g(t, x(t)) \circ dW(t),$$

если $F \in C^3(R)$, $dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t)$.

Пример 4.4. Для уравнения Ито

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t), \quad x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид $dx(t) = x^2(t) \circ dW(t)$. Последнее уравнение имеет решение $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 W(t)}$, которое является также сильным решением исходного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = f_1(t) r(x(t))dt + g_1(t) r(x(t)) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0. \tag{4.33}$$

Если $\frac{dR(x)}{dx} = \frac{1}{r(x)}$, то $d(R(x(t))) = f_1(t)dt + g_1(t) \circ dW(t)$. Процесс $x(t) = R^{-1}(R(x_0) + \int_0^t f_1(s)ds + \int_0^t g_1(s) \circ dW(s))$, где R^{-1} — функция, обратная к $R(x)$, является решением уравнения (4.33).

Уравнение $dx(t) = r(x(t))(a(t)R(x(t)) + b(t))dt + r(x(t))(m(t)R(x(t)) + n(t)) \circ dW(t)$, где $\frac{dR(x)}{dx} = \frac{1}{r(x)}$, с помощью замены $y = R(x)$ сводится к линейному неоднородному уравнению $dy(t) = (a(t)y(t) + b(t))dt + (m(t)y(t) + n(t)) \circ dW(t)$.

Пример 4.5.

$$dx(t) = \frac{x^3(t)+1}{x^2(t)}dt + \frac{2x^3(t)+3}{x^2(t)} \circ dW(t), \quad x(0)=1,$$

$$y = x^3, \quad dy(t) = 3(y+1)dt + 3(2y+3)\circ dW(t),$$

$$dy(t) = (21y+30)dt + 3(2y+3)dW(t), \quad y(0)=1,$$

$$y(t) = \exp(3t+6W(t))(1 - 24\int\limits_0^t \exp(-2s-6W(s))ds +$$

$$+ \int\limits_0^t 9\exp(-3s-6W(s))dW(s).$$

Пример 4.6. Уравнение $dx(t) = x(t)(\theta(t) - kln(x(t)) + \frac{\sigma^2}{2})dt +$ $+ \sigma x(t)dW(t), \quad x(0) = x_0 > 0,\ k, \sigma \in R_+, \theta \in C(R_+),$

называют уравнением Блэка — Карасинского. Перейдем к уравнению Стратоновича

$$dx(t) = x(t)(\theta(t) - k\ln(x(t)))dt + \sigma x(t) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0.$$

С помощью замены $u = \ln(x)$ последнее уравнение приводится к линейному уравнению

$$du(t) = (\theta(t) - kx(t))dt + \sigma \circ dW(t), \quad u(0) = \ln(x_0).$$

Решая его и возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$x(t) = \exp\left(\exp(-kt)\big(\ln(x_0) + \int\limits_0^t e^{-ks}\theta(s)ds + \sigma\int\limits_0^t e^{-ks}dW(s)\big)\right).$$

8. Построение решений СДУ с помощью интегралов уравнений Пфаффа.

Пусть $W(t)$ — $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $L, Q, H : R_+ \times R \times R \to R$ — заданные (достаточно гладкие) функции. Рассмотрим уравнение Стратоновича

$$dx(t) = \frac{L(t,x(t),W(t))}{Q(t,x(t),W(t))}dt + \frac{H(t,x(t),W(t))}{Q(t,x(t),W(t))} \circ dW(t) = 0, \qquad (4.34)$$

$x(0) = x_0, Q(0, x_0, 0) \neq 0$. Наряду с уравнением (4.34) рассмотрим уравнение Пфаффа

$$L(t, x, y)dt + Q(t, x, y)dx + H(t, x, y)dy = 0. \tag{4.35}$$

Пусть для (4.35) выполнено условие интегрируемости

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right)H + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)L + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)Q \equiv 0. \tag{4.36}$$

В частности, условие (4.36) имеет место, если $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} \equiv 0$, $\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \equiv$ $\equiv 0$, $\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial y} \equiv 0$. В этом случае существует функция $u(t, x, y)$ такая, что $du = Ldt + Qdx + Hdy$. В качестве $u(t, x, y)$ может быть взята функция

$$u(t, x, y) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(t,x,y)} L(\tau, \sigma, \beta)d\tau + Q(\tau, \sigma, \beta)d\sigma + H(\tau, \sigma, \beta)d\beta.$$

В общем случае, если выполнено условие (4.36), то существует интегрирующий множитель, т. е. такая функция $\mu(t, x, y)$, что $\mu Ldt + \mu Qdx +$ $+ \mu Hdy = du$ для некоторой функции u. Если функция $u(t, x, y)$ найдена, то неявная функция $x = x(t, y)$, определяемая соотношением $u(t, x, y) = u(0, x_0, 0)$, является двумерным решением уравнения Пфаффа, а тогда процесс $x(t, W(t))$ на некотором промежутке $t \in$ $\in [0, e[$ удовлетворяет условиям

$$x_t^{'}(t, W(t)) = -\frac{L(t, x(t, W(t)), W(t))}{Q(t, x(t, W(t)), W(t))},$$

$$x_y^{'}(t, W(t)) = -\frac{H(t, x(t, W(t)), W(t))}{Q(t, x(t, W(t)), W(t))}, \qquad x(0, W(0)) = x_0, \quad \text{п. н.}$$

и, следовательно, является решением уравнения (4.34).

Укажем еще один способ нахождения решений уравнения Пфаффа (4.35), который позволяет находить и решения уравнения Стратоновича (4.34). Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$P(t, x, 0)dt + Q(t, x, 0)dx = 0.$$

Пусть $x = x(t)$ — решение данного дифференциального уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$. Полагаем $t = \tau$ и рассматриваем уравнение

$$Q(\tau, x, y)dx + R(\tau, x, y)dy = 0. \tag{4.37}$$

Находим интеграл $l(\tau, x, y) = 0$ уравнения (4.37), удовлетворяющий условию $l(\tau, x(\tau), 0) = 0$. Теперь функция $x = h(t, y)$, определяемая соотношением $l(t, x, y) = 0$, является двумерным решением уравнения Пфаффа, а процесс $x = h(t, W(t))$ — решение уравнения (4.34).

Пример 4.7. Проинтегрируем уравнение

$$dx(t) = -\frac{x(t)(-1 + \ln(x(t)))}{1+t}dt - x(t)(-1 + \ln(x(t))) \circ dW(t),$$
$$x(0) = \exp(2).$$

Соответствующее уравнение Пфаффа

$$\frac{x(-1 + \ln(x))}{1+t}dt + dx + x(-1 + \ln(x))dy = 0$$

условиям интегрируемости удовлетворяет. Находим интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x(-1+\ln(x))}$ и функцию $u(t, x, y) = \ln(-1 + \ln(x)) + y + \ln(1 + t)$. Отсюда получаем решение рассматриваемого уравнения:

$$x(t) = \exp\left(1 + \frac{\exp(-W(t))}{1+t}\right).$$

Пример 4.8. Рассмотрим систему

$$dx_1(t) = dW(t), \quad x_1(0) = 1,$$
$$dx_2(t) = -\frac{x_2(t)}{t+1}dt - \frac{2x_2(t)}{x_1(t)} \circ dW(t), \quad x_2(0) = 1.$$

Из первого уравнения находим $x_1(t) = 1 + W(t)$. Для нахождения $x_2(t)$ рассматриваем уравнение Пфаффа

$$(1 + y)xdt + (1 + y)(1 + t)dx + 2x(1 + t)dy = 0.$$

Уравнение $xdt + (1 + t)dx = 0, \quad x(0) = 1$, имеет решение $x(t) = \frac{1}{1+t}$. Уравнение (4.37) в рассматриваемом случае имеет вид

$$(1 + y)(1 + \tau)dx_2 + 2x_2(1 + \tau)dy = 0,$$

а $x_2(1 + y)^2 - \frac{1}{1+\tau} = 0$ — искомый интеграл этого уравнения. Отсюда находим

$$x_2(t) = \frac{1}{(1 + t)(1 + W(t))^2}, \quad t \in [0, e[, \quad e = \inf\{t|W(t) = -1\}.$$

9. Преобразование броуновского движения.

Пусть $(x(t), B(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ — слабое решение ССДУ

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \tag{4.38}$$

$f : R_+ \times R^d \to R^d, g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$. Пусть $p(t, x)$ — измеримая по Борелю функция, значения которой $(d \times d)$-ортогональные матрицы. Тогда процесс

$$W(t) = \int\limits_0^t p(s, x(s))dB(s)$$

является $(\mathcal{F}_t)$-броуновским движением [8, с. 82–83], а $(x(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ — слабое решение уравнения [8, с. 97–98]

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))p^\top(t, x(t))dW(t).$$

10. Линейные системы стохастических дифференциальных уравнений [133].

Рассмотрим ССДУ

$$dx(t) = (f(t) + F(t)x(t))dt + \sum_{i=1}^r (g_i(t) + G_i(t)x(t))dW_i(t), \tag{4.39}$$

где $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_r(t))$ — r-мерное броуновское движение, $F(t), G_i(t)$ — $(d \times d)$-матричные, $f(t), g_i(t)$ — d-векторные измеримые по Борелю функции. Следующая формула аналогична формуле Коши для обыкновенных дифференциальных систем и доказывается так же, как формула (4.13). Процесс

$$x(t) = \Phi(t)(x(0) + \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(f(s) - \sum_{i=1}^r G_i(s)g_i(s))ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s) \sum_{i=1}^r g_i(s)dW_i(s)),$$

где $\Phi(t)$ — решение соответствующей однородной системы

$$d\Phi(t) = F(t)\Phi(t)dt + \sum_{i=1}^r G_i(t)\Phi(t)dW_i(t), \quad \Phi(0) = I, \tag{4.40}$$

является решением ССДУ (4.39). В общем случае, даже для постоянных матриц F и G_i решение системы (4.40) не может быть найдено в явном виде. Однако если матрицы F, G_i — постоянны и попарно коммутируют, т. е. $FG_i = G_iF$, $G_iG_j = G_jG_i$ для всех i, j, то

$$\Phi(t) = \exp((F - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} G_i^2)t + \sum_{i=1}^{r} G_i W_i(t)).$$

11. Стохастические дифференциальные уравнения, имеющие решения вида $x(t) = \varphi(x_0, t, \int_0^t a(s)dW(s))$ [144].

Лемма 4.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — вещественные непрерывно дифференцируемые отображения. Если функции $\varphi(x_0, t, u), a(t)$ удовлетворяют системе*

$$a(t)\varphi_u^{'} = g(\varphi), \tag{4.41}$$

$$\varphi_t^{'} + \frac{1}{2}a^2(t)\varphi_{u^2}^{''} = f(\varphi), \tag{4.42}$$

$$\varphi(x_0, 0, 0) = x_0, \tag{4.43}$$

то СДУ

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t), \quad x(0) = x_0, \tag{4.44}$$

имеет сильное решение

$$x(t) = \varphi(x_0, t, \int\limits_0^t a(s)dW(s)). \tag{4.45}$$

Доказательство. По формуле Ито,

$$dx(t) = (\varphi_t^{'}(x_0, t, \int\limits_0^t a(s)dW(s)) + \frac{1}{2}a^2(t)\varphi_{u^2}^{''}(x_0, t, \int\limits_0^t a(s)dW(s)))dt +$$

$$+a(t)\varphi_u^{'}(x_0, t, \int\limits_0^t a(s)dW(s))dW(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t).$$

Пусть коэффициент диффузии $g(x)$ задан, тогда можно установить, какими должны быть коэффициент сноса $f(x)$ и функции $a(t), \varphi$, чтобы они удовлетворяли системе (4.41)—(4.43).

Пусть $g(x) \neq 0, g \in C^1(R), \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{|g(x)|} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{|g(x)|} = \infty,\ G(x) = \int_0^x \frac{ds}{g(s)}$. Условия $g(x) \neq 0$ и (4.41) дают $a(t) \neq 0, \varphi_u^{'} \neq 0$. Из уравнения (4.41) следует, что

$$a(t)G(\varphi(x_0, t, u)) = u + h(x_0, t), \tag{4.46}$$

где h — некоторая функция с $h(x_0, 0) = a(0)G(x_0)$. Отсюда

$$\frac{1}{g(\varphi)}\varphi_t^{'} = \frac{\partial G(\varphi(x_0, t, u))}{\partial t} =$$

$$= \frac{h_t^{'}(x_0, t)a(t) - a^{'}(t)(u + h(x_0, t))}{a^2(t)} = \frac{h_t^{'}(x_0, t)}{a(t)} - \frac{a^{'}(t)}{a(t)}G(\varphi),$$

т. е.

$$\varphi_t^{'} = \Big(\frac{h_t^{'}(x_0, t)}{a(t)} - \frac{a^{'}(t)}{a(t)}G(\varphi)\Big)g(\varphi). \tag{4.47}$$

Дифференцируя (4.41), имеем

$$a(t)\varphi_{u^2}^{''} = g(\varphi)\varphi_u^{'} = g^{'}(\varphi)\frac{g(\varphi)}{a(t)}$$

или

$$\varphi_{u^2}^{''} = \frac{g(\varphi)g^{'}(\varphi)}{a^2(t)}. \tag{4.48}$$

Подставляя (4.47), (4.48) в (4.45), получаем

$$f(\varphi) = (\frac{h_t^{'}(x_0, t)}{a(t)} - \frac{a^{'}(t)}{a(t)}G(\varphi))g(\varphi) + \frac{1}{2}g(\varphi)g^{'}(\varphi). \tag{4.49}$$

Из (4.49) вытекает, что f зависит лишь от φ тогда и только тогда, когда

$$\frac{h_t^{'}(x_0, t)}{a(t)} = \alpha, \quad \frac{a^{'}(t)}{a(t)} = \beta, \tag{4.50}$$

где α и β — постоянные. Равенства (4.50) дают

$$a(t) = \exp(\beta t), \quad h(x_0, t) = \alpha \int\limits_0^t \exp(\beta s)ds + G(x_0). \tag{4.51}$$

Теперь из (4.51), (4.46) следует, что

$$\varphi(x_0, t, u) = G^{-1}(\exp(-\beta t)(u + \alpha \int\limits_0^t \exp(\beta s) ds + G(x_0))),$$

где G^{-1} — функция, обратная к G. Функцию $f(x)$ находим из (4.49)

$$f(x) = (\alpha - \beta G(x))g(x) + \frac{1}{2} g^{'}(x) g(x).$$

Приведенные рассуждения показывают, что функции

$$a(t) = \exp(\beta t), \quad f(x) = (\alpha - \beta G(x))g(x) + \frac{1}{2} g^{'}(x) g(x),$$

где α, β — постоянные,

$$\varphi(x_0, t, u) = G^{-1}(\exp(-\beta t)(u + \alpha \int\limits_0^t \exp(\beta s) ds + G(x_0)))$$

удовлетворяют системе (4.41)–(4.43). Следовательно, СДУ

$$dx(t) = (\alpha - \beta G(x(t)))g(x(t)) + \frac{1}{2} g^{'}(x(t)) g(x(t))) dt + g(x(t)) dW(t)$$

имеет сильное решение

$$x(t) = G^{-1}(\exp(-\beta t)(\int\limits_0^t \exp(\beta s) dW(s) + \alpha \int\limits_0^t \exp(\beta s) ds + G(x_0))).$$

Пусть теперь коэффициент диффузии удовлетворяет условиям

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0, g(0) = 0, g \in C^1(R), \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \gamma \neq 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{|g(x)|} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{|g(x)|} = \infty.$$

Построим функцию

$$\Psi(x) = x \exp(\int\limits_0^x \frac{\psi(z)}{z} dz), x \in R,$$

где $\psi(x) = \frac{\gamma x - g(x)}{g(x)}, x \neq 0, \psi(0) = 0$. Легко проверить, что функции $a(t) = \exp(\beta t)$, $\varphi = \Psi^{-1}(\mathrm{sign}(x_0)\exp(\gamma u \exp(-\beta t)) + h(x_0, t))$, $f(x) = \frac{g(x)}{\gamma}(-\beta \ln|\Psi(x)| + \alpha) + \frac{1}{2}g^{'}(x)g(x)$, где $h(x_0, t) = (\ln|\Psi(x_0)| + + \alpha \int_0^t \exp(\beta s)ds)\exp(-\beta t)$, α, β — постоянные, удовлетворяют системе (4.41)–(4.43). Следовательно, уравнение

$$dx(t) = (\frac{g(x(t))}{\gamma}(\alpha - \beta \ln|\Psi(x(t))|) + \frac{1}{2}g(x(t))g^{'}(x(t)))dt + g(x(t))dW(t)$$

имеет сильное решение

$$x(t) = \Psi^{-1}(\mathrm{sign}(x_0)\exp((\gamma \int\limits_0^t \exp(\beta s)dW(s) + \ln|\Psi(x_0)| +$$

$$+\alpha \int\limits_0^t \exp(\beta s)ds)\exp(-\beta t))).$$

Пример 4.9. Уравнение

$$dx(t) = x(t)(\alpha - \beta \ln|x(t)| + \frac{1}{2})dt + x(t)dW(t), \quad \alpha, \beta \in R,$$

имеет сильное решение $x(t) =$

$$= \mathrm{sign}(x_0)\exp((\int\limits_0^t \exp(\beta s)dW(s) + \ln|x_0| + \alpha \int\limits_0^t \exp(\beta s)ds)\exp(-\beta t))).$$

Ясно, что снос $f(x) = x(\frac{1}{2} + \alpha - \beta \ln|x|), x \neq 0, f(0) = 0$, не удовлетворяет условию Липшица и не имеет линейного порядка роста.

4.2. Уравнения Колмогорова

Уравнения Колмогорова устанавливают связь между стохастическими дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных. Они дают возможность находить основные характеристики ССДУ такие, как плотность вероятностей решений ССДУ, математические ожидания функционалов от решений и т. д.

1. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t),$$

где функции $f : R_+ \times R^d \to R^d$ и $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ таковы, что уравнение обладает свойством слабого существования. **Одномерной плотностью распределения** слабого решения $x(t)$ в момент t называют такую функцию $p(t, x)$, что

$$P^{x(t)}(B) = \int\limits_B p(t, x)dx \quad \forall B \in \beta(R^d),$$

где интегрирование проводится по мере Лебега в R^d.

Предложение 4.3 [18, с. 564]. *Пусть коэффициенты f и g уравнения измеримы по Борелю и локально ограничены, матрица $g(t, x)g^\top(t, x)$ обратима и функция $(g(t, x)g^\top(t, x))^{-1}$ локально ограничена. Если слабое решение $x(t)$ не имеет взрывов, то для почти всех t существует одномерная плотность распределения $p(t, x)$ слабого решения $x(t)$.*

Предложение 4.4 [85, с. 590 —592]. *Пусть для слабого решения $x(t)$ с начальным распределением ν при всех $t \geqslant 0$ существует одномерная плотность распределения $p(t, x)$. Если функции $p(t, x)$, $f(t, x)$, $g(t, x)$ достаточно гладкие, то $p(t, x)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]^\top \big[f(t, x)p(t, x)\big] +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]^\top [g(t, x)g^\top(t, x)p(t, x)]\Big\} \tag{4.52}$$

(здесь $[\frac{\partial}{\partial x}] = (\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_d})^\top$, $[\frac{\partial}{\partial x}][\frac{\partial}{\partial x}]^\top$ — матрица с элементами $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, d$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \times a = \frac{\partial a}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \times a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}$) и начальному условию $p(0, x) = h(x)$, где $h(x)$ — плотность вероятности ν.

Уравнение (4.52) называется прямым (вторым) уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова.

Допустим теперь, что для любых $(s, y) \in R_+ \times R^d$ уравнение

$$x(t) = y + \int\limits_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \int\limits_s^t g(\tau, x(\tau))dW(\tau) \tag{4.53}$$

имеет слабое решение $x = \varphi_{s,y}(t)$. Определим вероятности перехода для уравнения (4.53) $P_{s,y}(t, A) = P(\varphi_{s,y}(t) \in A)$. Допустим, что существует плотность $p_{s,y}(t, x)$ для вероятности $P_{s,y}(t, A)$, т. е. такая функция, что

$$P_{s,y}(t, B) = \int\limits_{B} p_{s,y}(t, x)dx \quad \forall B \in \beta(R^d).$$

Предложение 4.5 [85, с. 593–594]. *Если функции* $p_{s,y}(t, x)$, $f(t, x)$, $g(t, x)$ *достаточно гладкие, то функция* $p_{s,y}(t, x)$ *удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова*

$$\frac{\partial p_{s,y}(t, x)}{\partial t} = -\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]^{\top}\big[f(t, x)p_{s,y}(t, x)\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\bigg\{\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]^{\top}[g(t, x)g^{\top}(t, x)p_{s,y}(t, x)]\bigg\}, \quad t \geqslant s.$$

Пусть функции f и g в уравнении (4.53) достаточно гладкие и не зависят от t, тогда вероятности перехода $P_{t,y}(t+h, A)$ не зависят от t, так же как и их плотности, т. е. $p_{t,y}(t+h, x) = \pi(y, x, h)$. Если существует предел $\lim\limits_{h\to\infty} \pi(y, x, h) = \phi(y, x)$ и этот предел не зависит от y, т. е. $\phi(y, x) = q(x)$, то $q(x)$ называют стационарной плотностью вероятностей уравнения (4.53). Стационарные плотности вероятностей могут быть найдены из следующего уравнения, которое вытекает из уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова,

$$-\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]^{\top}\big[f(x)q(x)\big] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\bigg\{\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big]^{\top}[g(x)g^{\top}(x)q(x)]\bigg\} = 0.$$

В одномерном случае последнее уравнение имеет вид

$$-\frac{d(f(x)q(x))}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2(g^2(x)q(x))}{dx^2} = 0.$$

Отсюда

$$q(x) = \frac{c}{g^2(x)}\exp(2\int\limits_0^y \frac{f(\tau)}{g^2(\tau)}d\tau).$$

Пример 4.10. Пусть функции $\mu(t,r), \sigma(t,r)$ являются дрейфом и волатильностью краткосрочной процентной ставки $r(t)$, тогда $r(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению [78]

$$dr(t) = \mu(t,r(t))dt + \sigma(t,r(t))dW(t). \tag{4.54}$$

Если функции $\mu(t,r)$ и $\sigma(t,r)$ в уравнении (4.54) являются достаточно гладкими, то плотность распределения $f(t,r)$ процесса $r(t)$ находится из уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$f_t'(t,r) = \frac{1}{2}(\sigma^2(t,r)f(t,r))_{rr}'' - (\mu(t,r)f(t,r))_r'. \tag{4.55}$$

В случае, когда

$$\mu(t,r) = \alpha r + \beta, \quad \sigma^2(t,r) = \gamma r + \delta,$$

уравнение (4.55) принимает вид

$$f_t'(t,r) = \frac{1}{2}((\gamma r + \delta)f(t,r))_{rr}'' - ((\alpha r + \beta)f(t,r))_r' \tag{4.56}$$

и является хорошо изученным.

Предложение 4.6 [78, с. 172–173]. *Если $\gamma r + \delta > 0$, то плотность распределения $f(t,r)$ процесса $r(t)$, удовлетворяющего условию $r(s) = b, s < t$, имеет вид*

$$f(t,r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j+1}(r+\delta/\gamma)^{q+j}}{\Gamma(q+j+1)} e^{-c(r+\delta/\gamma)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_u(j) g_{q+j,c}(r+\delta/\gamma),$$

где $g_{q,c}(x) = \frac{c^{q+1}x^q}{\Gamma(q+1)}e^{-cx}$ — плотность вероятностей гамма-распределения с параметром формы q и параметром масштаба c, $x \geqslant 0$, $p_u(j) = \frac{u^j}{j!}e^{-u}$ — распределение вероятностей Пуассона с параметром $u > 0$, $j = 0, 1, \ldots$, $b_{q,\theta}(j) = \frac{\Gamma(q+j)}{j!\Gamma(q)}\theta^j(1-\theta)^q$ — отрицательное биномиальное распределение вероятностей с параметрами $q > 0, \theta \in (0,1)$, $j = 0, 1, \ldots$, $u = c(b+\delta/\gamma)e^{\alpha(t-s)}$, $q = 2\frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\gamma^2} - 1$, $c = \frac{2\alpha}{\gamma}(e^{\alpha(t-s)} - 1)^{-1}$.

2. Пусть $X_{s,x}(t)$ — сильное решение уравнения

$$X(t) = x + \int\limits_0^t f(s+r, X(r))dr + \int\limits_0^t g(s+r, X(r))dW(r) \qquad (4.57)$$

и пусть

$$F(s, X_{s,x}) = \int\limits_0^{T-s} a(s+t, X_{s,x}(t)) \exp(-\int\limits_0^t c(s+r, X_{s,x}(r)dr)dt +$$

$$+ b(X_{s,x}(T-s)) \exp(-\int\limits_0^{T-s} c(s+r, X_{s,x}(r))dr),$$

$$v(s,x) = E(F(s, X_{s,x})).$$

Предложение 4.7 [39, с. 164–167]. *Пусть действительные* $a(t,x)$, $b(x)$, $c(t,x)$, *векторная* $f(t,x)$, *матричная* $g(t,x)$ *функции дважды дифференцируемы по* x, *они сами, их первые и вторые производные по* x *непрерывны по* t,x *в полосе* $[0,T] \times R^d$, *а будучи умножены на функцию* $(1+\|x\|)^m$ *(функции и их производные) дают ограниченные функции в этой полосе. Тогда функция* $v(t,x)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $|v(t,x)| \leqslant N(1+\|x\|)^m$ *при всех* $t \in [0,T]$, $x \in R^d$, *где* N *не зависит от* (t,x);

2) $v(t,x)$ *дифференцируема по* t, *дважды дифференцируема по* x *и упомянутые производные непрерывны в полосе* $[0,T] \times R^d$;

3) *при всех* $(t,x) \in [0,T] \times R^d$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} g(t,x) g^\top(t,x)) +$$

$$+ \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} f(t,x) - c(t,x)v(t,x) + a(t,x) = 0, \quad v(T,x) = b(x). \qquad (4.58)$$

Кроме того, любая функция, обладающая теми же свойствами 1)–3), *совпадает с* v *в полосе* $[0,T] \times R^d$.

Уравнение (4.58) называется первым или обратным уравнением Колмогорова.

4.3. Дифференциальные уравнения для условных математических ожиданий

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство с потоком $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$; $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — два независимых между собой $(\mathcal{F}_t)$-броуновских движения, соответственно k-мерное и l-мерное; $a_0 : [0,T] \times R^k \to R^k$, $A_0 : [0,T] \times R^k \to R^l$, $a_1 : [0,T] \times R^k \to R^{k\times k}$, $A_1 : [0,T] \times R^k \to R^{l\times k}$, $b_1 : [0,T] \times R^k \to R^{k\times k}$, $b_2 : [0,T] \times R^k \to R^{k\times l}$, $B_1 : [0,T] \times R^k \to R^{l\times k}$ и $B_2 : [0,T] \times R^k \to R^{l\times l}$ — измеримые по Борелю отображения. Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\|A_1(t,y)\| \leqslant L, \quad \|a_1(t,y)\| \leqslant L \quad \forall (t,y) \in [0,T] \times R^l;$$

$$\int\limits_0^T (\|A_0(t,y)\|^2 + \|a_0(t,y)\| + \|b_1(t,y)\|^2 + \|b_2(t,y)\|^2 +$$
$$+\|B_1(t,y)\|^2 + \|B_2(t,y)\|^2)dt < \infty$$

при каждом фиксированном $y \in R^l$;

$$\|B_1(t,y) - B_1(t,z)\| + \|B_2(t,y) - B_2(t,z)\| \leqslant L\|y - z\|$$

$\forall (t,y), (t,z) \in [0,T] \times R^l$,

$$\|B_1(t,y)\|^2 + \|B_2(t,y)\|^2 \leqslant L(1 + \|y\|^2) \quad \forall (t,y) \in [0,T] \times R^l;$$

матрица $B_1 B_1^\top + B_2 B_2^\top$ — невырождена при каждых $(t,y) \in [0,T] \times R^k$ и обратная к ней матрица равномерно ограничена; x_0, y_0 — $(\mathcal{F}_0)$-измеримые случайные величины, не зависящие от W_1, W_2 $(L = \mathrm{const})$.

Пусть $(x(t), y(t))$ — сильное решение системы

$$dx(t) = (a_0(t,y(t)) + a_1(t,y(t))x(t))dt + \sum_{i=1}^{2} b_i(t,y(t))dW_i(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$dy(t) = (A_0(t,y(t)) + A_1(t,y(t))x(t))dt + \sum_{i=1}^{2} B_i(t,y(t))dW_i(t), \quad y(0) = y_0.$$

Предположим далее, что выполнены условия

$$\int\limits_0^T E(\|A_1(t,y(t))x(t)\|)dt<\infty, \quad E(\|x(t)\|)<\infty \quad \forall t, 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$\int\limits_0^T E(\|a_0(t,y(t))\|^4+\|b_1(t,y(t))\|^4+\|b_2(t,y(t))\|^4)dt<\infty, \quad E(\|x_0\|^4)<\infty,$$

$$P\Big\{\int\limits_0^T \|A_1(t,y(t))m(t)\|^2dt<\infty\Big\}=1, \quad \text{где} \quad m(t)=E(x(t)|\mathfrak{F}_t^y).$$

Предложение 4.8 [71, с. 474–475]. *Пусть выполнены условия, перечисленные перед формулировкой предложения, условное распределение* $P(x_0\leqslant a|y_0)$ *является гауссовским. Тогда вектор* $m(t) = E(x(t)|\mathfrak{F}_t^y)$ *и матрица* $n(t)=E((x(t)-m(t))(x(t)-m(t))^\top|\mathfrak{F}_t^y)$ *являются единственными непрерывными* $(\mathfrak{F}_t^y)$*-измеримыми при каждом* t *процессами, удовлетворяющими системе уравнений*

$$dm(t)=(a_0(t,y(t))+a_1(t,y(t))m(t))dt+$$
$$((b_1B_1^\top+b_2B_2^\top)(t,y(t))+n(t)A_1^\top(t,y(t)))\times$$
$$\times(B_1B_1^\top+B_2B_2^\top)^{-1}(t,y(t))(dy(t)-(A_0(t,y(t))+A_1(t,y(t))m(t))dt,$$
$$dn(t)=(a_1(t,y(t))n(t)+n(t)a_1^\top(t,y(t))+$$
$$+((b_1b_1^\top+b_2b_2^\top)(t,y(t))-(b_1B_1+b_2B_2^\top(t,y(t))+n(t)A_1^\top(t,y(t)))\times$$
$$\times(b_1B_1^\top+b_2B_2^\top)^{-1}(t,y(t))((b_1B_1+b_2B_2^\top)(t,y(t))+n(t)A_1^\top(t,y(t))))dt$$

и начальным условиям $m_0=E(x(0)|y_0)$, $n_0=E((x(0)-m(0))(x(0)-m(0))^\top|y_0)$.

Замечание 4.2 [71, с. 404]. Если $k=1, l=1$, $a_1(t,y)=a(t)$, $a_0=0$, $A_0=0, A_1(t,y)=A(t)$, $b_1(t,y)=b(t), b_2=0$, $B_1=0$, $B_2(t,y)=B(t)$, то уравнения для $m(t), n(t)$ имеют вид

$$dm(t)=a(t)m(t)dt+\frac{n(t)A(t)}{B^2(t)}(dy(t)-A(t)m(t)dt),$$

$$dn(t)=(2a(t)n(t)-\frac{A^2(t)n^2(t)}{B^2(t)}+b^2(t))dt$$

и называются фильтром Калмана — Бьюси.

Предложение 4.9 [71, с. 476]. *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_k)$ *— k- мерная случайная величина с* $E(\|x\|^4 < \infty)$. *Предположим, что* $y(t)$ *— сильное решение системы*

$$dy(t) = (A_0(t, y(t)) + A_1(t, y(t))x)dt + B_2(t, y(t))dW_2(t), \quad y(0) = y_0,$$

где коэффициенты A_0, A_1, B_2 *удовлетворяют условиям предложения 4.8, а условное распределение* $P(x \leqslant a|y_0)$ *является гауссовским* $N(m_0, n_0)$. *Тогда* $m(t) = E(x|\mathcal{F}_t^y)$, $n(t) = E((x - m(t))(x - m(t))^\top|\mathcal{F}_t^y)$ *задаются формулами*

$$m(t) = \left(I + n_0 \int\limits_0^t A_1^\top(s, y(s))(B(s, y(s))B_2^\top(s, y(s)))^{-1} A_1(s, y(s))ds\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(m_0 + n_0 \int\limits_0^t A_1^\top(s, y(s))(B(s, y(s))B_2^\top(s, y(s)))^{-1}(dy(s) - A_0(s, y(s))ds)\right),$$

$$n(t) = \left(I + n_0 \int\limits_0^t A_1^\top(s, y(s))(B(s, y(s))B_2^\top(s, y(s)))^{-1} A_1(s, y(s))ds\right)^{-1} n_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев, В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений /В. М. Алексеев // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. — 1961. — № 2. — С. 28—36.

2. *Барбашин, Е. А.* Дисперсные динамические системы / Е. А. Барбашин // Успехи мат. наук.— 1950. — Т. 5. — Вып. 4 (32). — С. 138—139.

3. *Барбашин, Е. А.* Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1967. — 223 с.

4. *Бернштейн, С. Н.* Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений / С. Н. Бернштейн // Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1934. — Т. 5. — С. 95—124.

5. *Богданов, Ю. С.* Исследования дифференциальных систем с помощью обобщенных характеристических чисел/ Ю. С. Богданов. — Минск: БГУ, 2001. — 155 с.

6. *Булатов, В. И.* Влияние обратной связи на спектр линейной системы / В. И. Булатов // Вестн. БГУ. Сер. 1, Математика. Физика. Механика. — 1977. — № 1. — С. 81—82.

7. *Булгаков, Н. Г.* Обобщения теорем второго метода Ляпунова / Н. Г. Булгаков, Б. С. Калитин // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. — 1978. — № 3. — С. 32—36; 1979. — № 1. — С. 70—74.

8. *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М.: Наука, 1986. — 445 с.

9. *Вентцель, А. Д.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. — М.: Наука, 1979. — 424 с.

10. *Веретенников, А. Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений/ А. Ю. Веретенников // Мат. сб. — 1980. — Т. 11. — Вып. 3. — С. 434—452.

11. *Веретенников, А. Ю.* О стохастических уравнениях с вырождающейся по части переменных диффузией / А. Ю. Веретенников // Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1983. — Т. 47, № 1. — С. 188—196.

12. *Гальчук, Л. И.* О существовании и единственности решений для стохастических уравнений по полумартингалам / Л. И. Гальчук // Теория вероят. и ее применения. — 1978. — Т. 23, № 4. — С. 782—795.

13. *Гирсанов, И. В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры / И. В. Гирсанов // Теория вероят. и ее применения. — 1960. — Т. 5, № 3. — С. 314—330.

14. *Гирсанов, И. В.* О стохастических интегральных уравнениях Ито / И. В. Гирсанов // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 138, № 1. — С. 18—21.

15. *Гихман, И. И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями / И. И. Гихман // Укр. мат. журн. — 1950. — Т. 2, № 4. — С. 37—63.

16. *Гихман, И. И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов / И. И. Гихман // Укр. мат. журн. — 1951. — Т. 3, № 3. — С. 317—339.

17. *Гихман, И. И.* Теория случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1971. — Т. 1. — 664 с.

18. *Гихман, И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — Киев: Наукова думка, 1982. — 611 с.

19. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

20. *Евланов, Л. Г.* Системы со случайными параметрами / Л. Г. Евланов, В. М. Константинов. — М.: Наука, 1976. — 568 с.

21. *Егоров, А. Д.* Об аппроксимации функциональных интегралов по мерам, порожденным решениями стохастических уравнений по мартингалам / А. Д. Егоров // Докл. АН БССР. — 1991. — Т. 35, № 1. — С. 32—35.

22. *Звонкин, А. К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос / А. К. Звонкин // Мат. сб. — 1974. — Т. 93. — Вып. 1. — С. 129—149.

23. *Звонкин, А. К.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений / А. К. Звонкин, Н. В. Крылов // Тр. школы-семинара по теории случайных процессов. Друскининкай, 25–30 нояб. 1974 г. — Вильнюс, 1975. — Ч. 2. — С. 9—88.

24. *Изобов, Н. А.* Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 8. — С. 2034—2055.

25. *Изобов, Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова / Н. А. Изобов. — Минск: БГУ, 2006. — 319 с.

26. *Изобов, Н. А.* Линейные дифференциальные системы Коппеля — Конти / Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова. — Минск: Белорусская наука, 2008. — 230 с.

27. *Иоффе, А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 479 с.

28. *Кац, И. Я.* Об устойчивости систем со случайными параметрами / И. Я. Кац, Н. Н. Красовский // Прикл. математика и механика. — 1960. — Т. 24. — Вып. 5. — С. 809—823.

29. *Келли, Д. Л.* Общая топология / Д. Л. Келли. — М.: Наука, 1981. — 431 с.

30. *Клепцына, М. Л.* О сильных решениях стохастических уравнений с вырождающимися коэффициентами / М. Л. Клепцына // Теория вероят. и ее применения. — 1984. — Т. 29. — Вып. 2. — С. 392—396.

31. *Клепцына, М. Л.* Теоремы сравнения, существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений / М. Л. Клепцына // Теория вероят. и ее применения. — 1985. — Т. 30. — Вып. 1. — С. 147—152.

32. *Колмановский, В. Б.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

33. *Колмогоров, А. П.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. П. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 496 с.

34. *Кореневский, Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии / Д. Г. Кореневский. — Киев: Наукова думка, 1989. — 208 с.

35. *Красовский, Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 211 с.

36. *Кушнер, Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление / Г. Дж. Кушнер. — М.: Мир, 1969. — 198 с.

37. *Крылов, Н. В.* Диффузия на плоскости с отражением. Краевая задача / Н. В. Крылов // Сиб. мат. журн. — 1969. — Т. 10, № 2. — С. 355—372.

38. *Крылов, Н. В.* Об одной оценке из теории стохастических интегралов / Н. В. Крылов // Теория вероят. и ее применения. — 1971. — Т. 16, № 3.— С. 446—457.

39. *Крылов, Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа / Н. В. Крылов. — М.: Наука, 1977. — 398 с.

40. *Крылов, Н. В.* Об эволюционных стохастических уравнениях / Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. — М.: ВИНИТИ, 1979. — Т. 14. — С. 71—146.

41. *Крылов, Н. В.* Экстремальные свойства решений стохастических уравнений / Н. В. Крылов // Теория вероят. и ее применения. — 1984. — Т. 29. — Вып. 2. — С. 209—221.

42. *Крылов, Н. В.* Простое доказательство существования решения уравнения Ито с монотонными коэффициентами / Н. В. Крылов // Теория вероят. и ее применения. — 1990. — Т. 35. — Вып. 3. — С. 576—580.

43. *Куратовский, К.* Топология: в 2 т. / К. Куратовский. — М: Мир, 1986. — Т. 2. — 624 с.

44. *Куренок, В. П.* Существование решения стохастического дифференциального уравнения без сноса при локальной интегрируемости коэффициента "a"/ В. П. Куренок // Вестн. БГУ. Сер.1, Физика. Математика. Механика. — 1990. — № 1. — С. 43—46.

45. *Ладыженская, О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

46. *Лазакович, Н. В.* Аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений конечно-разностными / Н. В. Лазакович // Докл. АН Беларуси. — 1995. — Т. 39, № 3. — С. 20–22.

47. *Лазакович, Н. В.* Аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений и интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович, С. П. Сташуленок // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 1995. — Т. 39, № 6. — С. 34—38.

48. *Лазакович, Н. В.* О приближении решений одного класса стохастических уравнений / Н. В. Лазакович, О. Л. Яблонский // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 1. — С. 87–102.

49. *Лазакович, Н. В.* Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением / Н. В. Лазакович, О. Л. Яблонский // Теория вероятностей и ее применения. — 2005. — Т. 50. — Вып. 4. — С. 711–732.

50. *Леваков, А. А.* Теорема существования для стохастических дифференциальных включений / А. А. Леваков // VI конф. математиков Беларуси: тез. докл. Гродно, 29 сент. — 2 окт. 1992 г. — Гродно, 1992. — Ч. 3. — С. 51.

51. *Леваков, А. А.* Устойчивость стохастических дифференциальных систем. Метод интегральных неравенств / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 2. — С. 213—219.

52. *Леваков, А. А.* Компактность множества вероятностных законов слабых решений стохастических дифференциальных включений / А. А. Леваков // Материалы респ. науч.-метод. конф., посвящ. 25-летию факультета прикл. математики. Минск, 10—14 апр. 1995 г. — Минск, 1995. — Ч. 2. — С. 100.

53. *Леваков, А. А.* Стохастические дифференциальные включения / А. А. Леваков // Вторые респ. науч. чтения по обыкновенным дифференц. уравнениям, посвящ. 75-летию Ю. С. Богданова: тез. докл. Минск, 5—9 дек. 1995 г. — Минск, 1995. — С. 45.

54. *Леваков, А. А.* Стохастические дифференциальные включения / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 2. — С. 212—220.

55. *Леваков, А. А.* Асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных включений / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 2. — С. 204—210.

56. *Леваков, А. А.* Теорема существования сильных решений и теорема Барбашина — Красовского для стохастических дифференциальных систем / А. А. Леваков // International Conference "Dinamical systems: stability, control, optimization": Abstracts. Minsk, 1998. — Vol. 2. — P. 173—175.

57. *Леваков, А. А.* Теоремы существования сильных решений стохастических дифференциальных уравнений и включений / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 84—89.

58. *Леваков, А. А.* Теоремы существования решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 1. — С. 47—53.

59. *Леваков, А. А.* Слабые решения стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 8.— С. 1041—1048.

60. *Леваков, А. А.* Ограниченные решения линейных стохастических систем / А. А. Леваков // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. — 2003. — № 1. — С. 88—92.

61. *Леваков, А. А.* Теоремы существования жизнеспособных решений стохастических дифференциальных уравнений / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 210—216.

62. *Леваков, А. А.* Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и с отражением от границы / А. А. Леваков // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 4. — С. 465—471.

63. *Леваков, А. А.* Применение метода знакопостоянных функций Ляпунова для исследования устойчивости полудинамических систем / А. А. Леваков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2003. — № 2. — С. 45—51.

64. *Леваков, А. А.* Теоремы существования для стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями / А. А. Леваков // Докл. НАН Беларуси. — 2003. — № 5. — С. 33—38.

65. *Леваков, А. А.* Теоремы существования для стохастических дифференциальных включений / А. А. Леваков // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 2003. — № 4. — С. 84—89.

66. *Леваков, А. А.* Среднеквадратические характеристические показатели стохастических систем / А. А. Леваков // Вестн. БГУ. Сер.1, Физика. Математика. Информатика. — 2004. — № 1. — С. 113—115.

67. *Леваков, А. А.* Асимптотическая эквивалентность в среднеквадратическом обыкновенного дифференциального уравнения и возмущенной стохастической системы / А. А. Леваков // Вестн. БГУ. Сер.1, Физика. Математика. Информатика. — 2005. — № 2. — С. 109—111.

68. *Леваков, А. А.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений / А. А. Леваков, Т. А. Новик, Д. Б. Поляков // XII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям "Еругинские чтения — 2007": тез. докл. — Минск, 2007. — С. 44—45.

69. *Леваков, А. А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1029—1042.

70. *Леваков, А. А.* Существование β-слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с измеримыми правыми частями / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 10. — С. 1324—1333.

71. *Липцер, Р. Ш.* Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 1974. — 696 с.

72. *Ляпунов, А. М.* Собрание сочинений: в 6 т. / А. М. Ляпунов. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 2. — 473 с.

73. *Мазаник, С. А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем / С. А. Мазаник. — Минск: БГУ, 2008. — 175 с.

74. *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.: Наука, 1966. — 590 с.

75. *Маркус, М.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. — М.: Наука, 1972. — 232 с.

76. *Мартынюк, А. А.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств / А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лила. — Киев: Наукова думка, 1989. — 272 с.

77. *Мартынюк, А. А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений / А. А. Мартынюк, Д. Като, А. А. Шестаков. — Киев: Наукова думка, 1990. — 255 с.

78. *Медведев, Г. А.* Математические основы финансовой экономики / Г. А. Медведев. — Минск: БГУ, 2003. — Ч. 2. — 293 с.

79. *Мейер, П.* Вероятность и потенциалы / П. Мейер. — М.: Мир, 1973. — 324 с.

80. *Мельников, А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения: негладкость коэффициентов, регрессионные модели и стохастическая аппроксимация / А. В. Мельников // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51. — Вып. 5 (311). — С. 43—136.

81. *Миллионщиков, В. М.* К теории характеристических показателей Ляпунова / В. М. Миллионщиков // Мат. заметки. — 1970. — Т. 7, № 4. — С. 503—513.

82. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа: в 2 т. / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1975. — Т. 2. — 407 с.

83. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М.: Мир, 2000. — 400 с.

84. *Понтрягин, Л. С.* О статистическом рассмотрении динамических систем / Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, Д. А. Витт // ЖЭТФ. — 1933. — Т. 3, № 3. — С. 165—180.

85. *Пугачев, В. С.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. — М.: Наука, 2000.

86. *Самойленко, А. М.* Принцип сведения в теории устойчивости инвариантных множеств стохастических систем типа Ито / А. М. Самойленко, А. Н. Станжицкий // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 631—636.

87. *Сибирский, К. С.* Полудинамические системы / К. С. Сибирский, А. С. Шубэ. — Кишинев: Штиинца, 1987. — 271 с.

88. *Скороход, А. В.* Исследования по теории случайных процессов / А. В. Скороход. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. — 212 с.

89. *Скороход, А. В.* Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами / А. В. Скороход // Теория вероят. и ее применения. — 1961. — Т. 6. — Вып. 3. — С. 287—298.

90. *Скороход, А. В.* Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами / А. В. Скороход // Теория вероят. и ее применения. — 1962. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 5—25.

91. *Скороход, А. В.* О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений / А. В. Скороход // Сиб. мат. журн. — 1961. — Т. 2, № 1. — С. 129—137.

92. *Скороход, А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — Киев: Наукова думка, 1987. — 327 с.

93. Стохастическое исчисление / С. В. Анулова [и др.] // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. — М.: ВИНИТИ, 1989. — Т. 45. — С. 7—253.

94. *Струк, Д. В.* Диффузионные процессы с непрерывными коэффициентами. I / Д. В. Струк, С. Р. С. Варадан // Математика: сб. переводов. — 1971. — 15:6. — С. 66—113.

95. *Струк, Д. В.* Диффузионные процессы с непрерывными коэффициентами. II / Д. В. Струк, С. Р. С. Варадан // Математика: сб. переводов. — 1972. — 16:1. — С. 100—142.

96. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов [и др.]. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

97. *Толстоногов, А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А. А. Толстоногов. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.

98. *Уткин, В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / В. И. Уткин. — М.: Наука, 1981. — 367 с.

99. *Филиппов, А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 1959. — № 2. — С. 25—32.

100. *Филиппов, А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов // Мат. сб. — 1960. — Т. 51, № 1.— С. 99—128.

101. *Филиппов, А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью / А. Ф. Филиппов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, Механика. — 1967. — № 3. — С. 16—26.

102. *Филиппов, А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 223 с.

103. *Хасьминский, Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

104. *Хилле, Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.

105. *Царьков, Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.

106. *Черный, А. С.* О сильной и слабой единственности для стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Черный // Теория вероят. и ее применения. — 2001. — Т. 46. — Вып. 3. — С. 483–497.

107. *Шестаков, А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами / А. А. Шестаков. — М.: Наука, 1990. — 316 с.

108. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 1989. — 638 с.

109. *Эдвардс, Р.* Функциональный анализ / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.

110. *Aldous, D.* Stopping times and tightness / D. Aldous // Annals of probability. — 1978. — Vol. 6, № 2. — P. 335–340.

111. *Aubin, J. P.* Set-valued analysis / J. P. Aubin, H. Frankovska. — Boston; Basel: Birkhauser, 1990.

112. *Aubin, J. P.* Stochastic viability and invariance / J. P. Aubin, G. Da Prato // Annali Scuola Normale Supereriore di Pisa. — 1990. — Vol. 17. — P. 595—613.

113. *Aubin, J. P.* The viability theorem for stochastic differential inclusions / J. P. Aubin, G. Da Prato // Stochastic Analysis and Appl. — 1998. — Vol. 16. — P. 1–15.

114. *Aubin, J. P.* Characterization of stochastic viability of any nonsmooth set involving its generalized contingent curvature / J. P. Aubin, H. Doss // Stochastic analysis and applications. — 2003. — Vol. 21, № 5. — P. 955–981.

115. *Barlow M.T.* One-dimensional stochastic differential equations involving a singular increasing process / M. T. Barlow, E. Perkins // Stochastics. — 1984. — Vol. 12. — P. 229—249.

116. *Bertram, J. E.* On the stability of systems with random parametres / J. E. Bertram, P. E. Sarachir // Trans. IRE-PGCT. — 1959. — Vol. 5.

117. *Castaing, M. C.* Convex analysis and measurable multifunctions / M. C. Castaing, M. Valadier. // Lecture Notes in Math., № 580. — Berlin: Springer, 1977. — 278 p.

118. *Cépa, E.* Equations differentielles stochastiques multivoques / E. Cépa // Séminaire Probabilités. Berlin: Springer, 1995. — Vol. 29. — P. 86—107.

119. *Cépa, E.* Problem de Skorohod multivoque / E. Cépa // The Annals of Probability. – 1998. — Vol. 26, № 2. — P. 500—532.

120. *Cherny, A.S.* On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes / A. C. Cherny // Stochastics Stochastics Rep. — 2000. — Vol. 70, № 3—4. — P. 213—219.

121. *Conti, R.* On the boundedness of solutions of ordinary differential equations / R. Conti // Funkcialaj Ekvacioj. — 1966. — Vol. 9, № 1. — P. 23—26.

122. *Conway, E. D.* Stochastic equations with discontinuous drift / E. D. Conway // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 157. — P. 235—245.

123. *Coppel, W. A.* Stability and asymptotic behavior of differential equation / W. A. Coppel. — Boston: Heath. Math. Monographs, 1965. — 166 p.

124. *Da Prato, G.* Stochastic viability for compact sets in terms of the distance function / G. Da Prato, H. Frankowska // Dinamic systems and applications. — 2001. — Vol. 10. — P. 117—184.

125. *Da Prato, G.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabszyk. — Cambridge university press, 1992. — 449 p.

126. *Diestel, J.* Remarks on weak compactnees in $L_1(\mu, X)$ / J. Diestel // Glasgow math. J. — 1977. — Vol. 18, № 1. — P. 87—91.

127. *Doss, H.* Liens entre equations differentielles stochastiques et ordinaires / H. Doss // Ann. Inst. Henri Poincare. — 1977. — Vol. 13, № 2. — P. 99—125.

128. *Engelberg, H. J.* On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift / H. J. Engelberg, W. Schmidt // Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. — 1985. — Vol. 69. — P.143—145.

129. *Engelberg, H. J.* Strong Markov continuous local martingals and solutions of one-dimentional stochastic differential equations, I,II,III / H. J. Engelberg, W. Schmidt // Math. Nachr. — 1989. — Vol. 143. — P. 167–184; Vol. 144. — P. 241–281; Vol. 151. — P. 149–197.

130. *Engelberg, H. J.* On multidimensional SDEs without drift and with a time-dependent diffusion matrix / H. J. Engelberg, V. P. Kurenok // Georgian Math. J. — 2000. — Vol. 7, № 4. — P. 643—664.

131. *Hartman, P.* On invariant sets and on a theorem of Wazewski / P. Hartman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 32. — P. 511—520.

132. *Gasanenko, V. A.* On invariant sets for stochastic differential equations / V. A. Gasanenko // Theory of Stochastic Processes. — 2003. — Vol. 9 (25), № 1—2. — P. 60—64.

133. *Gard, T. C.* Introduction to stochastic differential equations / T. C. Gard. — 1988. — 234 p.

134. *Gautier, S.* Viability for constrained stochastic differential equations / S. Gautier, L. Thibault // Differential and Integral Equations. — 1993. — Vol. 6, № 6. — P. 1395—1414.

135. *Ito, K.* Stochastic integral / K. Ito // Proc.Imperial Acad. Tokyo. — 1944. — P. 519—524.

136. *Ito, K.* On a stochastic integral equation / K. Ito // Proc. Japan Acad. — 1946. — Vol. 22. — P. 32—35.

137. *Kallianpur, G.* Stochastic differential equations in infinite dimensional spaces / G. Kallianpur, Jie Xiong. — California: Hayward, 1995. — 342 p.

138. *Karatzas, I.* Methods of mathematical finance / I. Karatzas, S. E. Shreve. — New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. — 415 p.

139. *Kisielewicz, M.* Diffrential inclusions and optimal control / M. Kisielewicz. — Warszawa; Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. and Polish Sci. Publ., 1991. — 240 p.

140. *Kisielewicz, M.* Properties of solution set of stochastic inclusions // Journal of Appl. Math. and Stochastic Analysis. — 1993. — Vol. 6, № 3. — P. 217—236.

141. *Kisielewicz, M.* Viability theorems for stochastic inclusions / M. Kisielewicz // Discussiones Mathematicae — Differential Inclusions. — 1995. — Vol. 15. — P. 61—74.

142. *Kisielewicz, M.* Strong and weak solutions to stochastic inclusions / M. Kisielewicz // Banach Center Publ. — 1995. — Vol. 32. — P. 277—286.

143. *Kisielewicz, M.* Weak compactness of solution sets to stochastic difftrential inclusions with non-convex right-hand sides / M. Kisielewicz // Stochastic analysis and applications. — 2005. — Vol. 23. — P. 871—901.

144. *Kouritzin, M. A.* On explicit solutions to stochastic differential equations / M. A. Kouritzin, Li Deli // Stochastic analysis and applications. — 2000. — Vol. 18(4). — P. 571—580.

145. *Kree, P.* Diffusion equation for multivalued stochastic differential equation / P. Kree // J. Funct. Anal. — 1982. — Vol. 49. — P. 73—90.

146. *Kunita, H.* Stochastic flows and stochastic differential equations / H. Kunita. — Cambridge University Press, 1990. — 346 p.

147. *Lions, P. L.* Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions / P. L. Lions, A. S. Sznitman // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1984. — Vol. 37. — P. 511—537.

148. *Liu, K.* Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications / K. Liu. — London; New York; Singapore: Chapman and Hall, 2006. — 297 p.

149. *Mao, X.* Stochastic differential equations and their applications / X. Mao. — Chichester: Horwood Publishing, 1997.

150. *Michta, M.* High order stochastic inclusions and their applications / M. Michta, J. Motul // Stochastic analysis and applications. — 2005. — Vol. 23. — P. 401 – 420.

151. *Milian A.* Invariance for stochastic equations with regular coefficients / A. Milian // Stochastic analysis and applications. — 1997. — Vol. 15. — P. 91—101.

152. *Mishura, Y. S.* Stochastic calculus for fractional brownian motion and related processes / Y. S. Mishura. — Springer, 2008. — 389 p.

153. *Nagumo, N.* Uber die lage der integralkurven gewohnlicher differentialgleichungen / N. Nagumo // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. — 1942. — Vol. 24. — P. 551—559.

154. *Nisio, M.* On the existence of solutions of stochastic differential equations / M. Nisio // Osaka J. Math. — 1973. — Vol. 10, № 1. — P. 185—208.

155. *Pardoux, E.* Sur des equations aux derivees partielles stochastique monotones / E. Pardoux // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1972. — Vol. 275, № 2. — P. 101—103.

156. *Peszat, S.* Stochastic partial differential equations with Levy noise / S. Peszat, J. Zabczyk. — Cambridge university press, 2007. — 418 p.

157. *Pettersson, R.* Approximations for stochastic differential equations with reflecting convex boundaries / R. Pettersson // Stochastic Process. Appl. — 1995. — Vol. 59. — P. 295—308.

158. *Pettersson, R.* Yosida approximations for multivalued stochastic differential equation / R. Pettersson // Stochastics and Stochastics Reports. — 1995. — Vol. 52. — P. 107—120.

159. *Pettersson, R.* Existence theorem and Wong-Zakai approximations for multivalued stochastic differential equations / R. Pettersson // Probability and Mathematical Statistics. — 1997. — Vol. 17, № 1. — P. 29—45.

160. *Protter, Ph.* Stochastic integration and differential equations / Ph. Protter. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1990. — 302 p.

161. *Rozkosz, A.* On existence and stability of solutions of multidimensional stochastic differential equations with measurable coefficients / A. Rozkosz, L. Slominski // Stochastic Processes and their Appl. — 1991. — Vol. 37. — P. 187—197.

162. *Rozkosz, A.* On stability and existance of solutions of SDE with reflection at the boundary / A. Rozkosz, L. Slominski // Stochastic Processes and their Applications. — 1997. — Vol. 68. — P. 285—302.

163. *Rozkosz, A.* On a decomposition of symmetric diffusions with reflecting boundary conditionss / A. Rozkosz // Stochastic processes and their applications. — 2003. — Vol. 103. — P. 101—122.

164. *Saisho, Y.* Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary / Y. Saisho // Probability Theory and Related Fields. — 1987. — Vol. 74. — P. 455—477.

165. *Slominski, L.* On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDE with reflecting boundary conditions / L. Slominski // Ann. Inst. Henri Poincare. — 1993. — Vol. 29, № 2. — P. 163—198.

166. *Stroock, D. W.* Diffusion processes with boundary conditions / D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan // Comm. Pure Appl. Math. — 1971. — Vol. 24. — P. 147—225.

167. *Tanaka, H.* Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions / H. Tanaka // Hiroshima Math. J. — 1979. — Vol. 9. — P. 163—177.

168. *Tolstonogov, A. A.* Differential inclusions in a Banach space / A. A. Tolstonogov. — Dordrecht; Hardbound: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 320 p.

169. *Yablonski, A. L.* Differential equations with generalized coefficients / A. L. Yablonski // Nonlinear Anal., Theory, Methods, Appl. — 2005. — Vol. 63. — P. 171–197.

170. *Yamada, T.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations.I / T. Yamada, S. Watanabe // J. Math. Kyoto Univ. — 1971. — Vol. 11, № 1. — P. 155—167.

171. *Yamada, T.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations.II / T. Yamada, S. Watanabe // J. Math. Kyoto Univ. — 1971. — Vol. 11, № 3.— P. 553—563.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное издание

Леваков Анатолий Афанасьевич

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В авторской редакции

Художник обложки *Т. Ю. Таран*

Технический редактор *Г. М. Романчук*

Корректор *Л. С. Мануленко*

Ответственный за выпуск *А. Г. Купцова*

Подписано в печать 30.11.2009. Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная. Гарнитура *Roman*. Печать офсетная. Усл.печ.л. 13,48. Уч.-изд.л. 11,26. Тираж 100 экз. Зак.1280

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, Минск, 220030.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
"Издательский центр Белорусского Белорусского государственного университета".
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, Минск, 220030.