КНІГІ
ВЫДАВЕЦТВА
БДУ

В. М. Ширяев

ISBN 978-985-518-197-3 (т.1)
ISBN 978-985-518-198-0

Деп. в БелИСА 27.10.09,
№ Д200934

НУЛЬ-СИММЕТРИЧНЫЕ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ ПОЧТИКОЛЬЦА

В 3 томах

Том 1

2009

В. М. Ширяев

НУЛЬ-СИММЕТРИЧНЫЕ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ ПОЧТИКОЛЬЦА

В трех томах

Том 1

МИНСК
БГУ
2009

УДК 512.55

Ширяев, В. М. Нуль-симметричные мультиоператорные почти-кольца. В 3 т. Т. 1 [Электронный ресурс] / В. М. Ширяев. – Минск : БГУ, 2009. – 271 с.: ил. – ISBN 978-985-518-197-3. – Деп. в БелИСА 27.10.09, № Д200934

Автор известен в научном мире как специалист по теории полугрупп и теории решеток, и в данной монографии он применил свой опыт в создании основ теории *m*-колец. Главной темой монографии, состоящей из трех томов, является исследование свойств прямых разложений *m*-колец и модулей над ними (получивших общее название *m*-алгебр) на простые и минимальные под-*m*-алгебры и построение систем инвариантов для некоторых классов *m*-алгебр.

Адресуется преподавателям, научным работникам, аспирантам и студентам математических специальностей.

Ил. 13. Библиогр.: 77 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор *В. И. Берник*;
доктор физико-математических наук,
зав. кафедрой прикладной математики
и экономической кибернетики БГЭУ *И. В. Белько*

ISBN 978-985-518-197-3 (т. 1)
ISBN 978-985-518-198-0

Памяти профессора
Зенона Ивановича Боревича
посвящается

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная монография является продолжением книги автора [39] о так называемых *m*-кольцах (мультиоператорных почтикольцах [29], по-другому, $\mathcal{M}$-кольцоидах над многообразием $\mathcal{M}$ ассоциативных коммутативных колец [4]), которые представляют из себя ассоциативные коммутативные кольца с дополнительной ассоциативной операцией суперпозиции, дистрибутивной справа относительно сложения и умножения. Для тех, кто занимается прикладными задачами, связанными с вычислениями в коммутативном ассоциативном кольце, важно иметь представление о строении полугрупп преобразований такого кольца, замкнутых относительно поаргументного сложения и умножения преобразований. Цель данной книги – познакомить читателей с достижениями теории *m*-колец и заполнить некоторый пробел в литературе по этому вопросу. Также некоторым стимулом послужило активное в последние десятилетия развитие теории почтиколец (понятие, близкое к понятию *m*-кольца и означающее группу, снабженную дополнительной ассоциативной операцией суперпозиции, дистрибутивной справа относительно умножения) и Ω-групп [22]. В связи с этим представляет интерес вопрос о том, аналоги каких теорем, верные для почтиколец, проходят для *m*-колец. Так как всякое *m*-кольцо является Ω-группой (по-другому, *T*-группой [27]), то общие понятия и утверждения об Ω-группах используются для *m*-колец. В частности, обычным образом определяются под-*m*-кольца, гомоморфизмы, конгруэнции, идеалы, фактор-*m*-кольца. Категория $\mathcal{K}$ *m*-колец и их гомоморфизмов, а также ее полная подкатегория $\mathcal{K}_0$, порожденная нуль-симметричными *m*-кольцами (у которых 0 является нулевым элементом относительно суперпозиции) являются нормальными, т. е. выполняются четыре теоремы о гомоморфизмах, и вместе с тем мальцевскими (т. е. с перестановочными конгруэнциями) многообразиями универсальных алгебр. Материал данной книги ограничивается рассмотрением только нуль-симметричных *m*-колец и их представлений. С одной стороны, по мнению автора, при этом не очень много теряется в общности, с другой стороны, категория K-*Mod* представлений (K-модулей) *m*-кольца K при этом условии становится нормальной и многие утверждения об объектах обоих категорий $\mathcal{K}_0$ и K-*Mod* оказываются аналогичными, что оправдывает применяемое в тексте общее название *m*-алгебры для *m*-кольца и K-модуля.

Монография разбита на три тома. Основная тема первого тома – исследование свойств прямых разложений m-алгебр на простые и минимальные под-m-алгебры и построение систем инвариантов для некоторых классов m-алгебр, именно для строго приводимых m-колец, модульно строго приводимых m-колец и строго приводимых К-модулей (гл. II). Центральной здесь является теорема об изоморфизме двух тел, одно из которых происходит из геометрических свойств решетки под-m-алгебр, а другое – из внутренних свойств минимальных m-алгебр.

Во втором томе исследуются различные условия простоты идеалов m-кольца, условия, близкие к коммутативности, условия регулярности и периодичности, изучаются разные типы минимальных представлений m-колец, радикалы типа Джекобсона, приводятся аналоги теорем плотности для колец. Основное направление движения здесь состоит в реализации разложений рассматриваемых m-колец в прямое или подпрямое произведение m-колец более простой структуры.

В третьем томе обширное место занимают сведения о радикалах типа Хёнке и Куроша-Амицура, о свойствах радикальных и полупростых классов m-алгебр. В конце третьего тома представлены результаты об m-кольцах с условиями конечности.

Разумеется, при формировании содержания книги использовались общие понятия и утверждения об Ω-группах, а также достижения теории почтиколец и колец для построения аналогов (во многом с не очевидными доказательствами) теорем для m-алгебр, тем не менее нельзя сказать, что это полностью покрывает материал книги, специфика m-колец проявляется и какая-то ее часть имеет оригинальный характер, к примеру, теоремы § 4 гл. I о под-m-алгебрах прямых произведений, теоремы § 2 гл. II об инвариантах строго приводимых m-алгебр, теорема 3.2.1 гл. II об изоморфизме двух тел, теоремы § 1 гл. IV об операции умножения в m-кольцах с делением, результаты § 2 гл. IV о периодических, автоламинарных и γ-коммутативных m-кольцах, результаты § 4 гл. IV и гл. VII об m-кольцах с условиями регулярности, в частности, об интрарегулярных m-кольцах, теорема 1.1.1 гл. VI о строении псевдоконстантных m-колец и др.

ВВЕДЕНИЕ

Первый том состоит из трех глав. В первой главе исследуются некоторые предварительные свойства m-колец и К-модулей.

В § 1 собраны некоторые сведения, нужные в дальнейшем. Именно в п. 1.1 приводятся основные обозначения, определения и некоторые леммы. В п. 1.2 сосредоточен нужный в гл. II материал из теории решеток, особенно в части геометрических решеток. В п. 1.3 формулируются теоремы о гомоморфизмах для m-алгебр, а в п. 1.4 – теоремы типа Шрейера и Жордана-Гельдера.

Содержание § 2 состоит в описании конструкций, обычных для универсальных алгебр и Ω-групп. Именно в п. 2.1 приводится конструкция свободного К-модуля, более обширный п. 2.2 посвящен прямым произведениям и прямым суммам, в п. 2.3 речь идет о полупрямых произведениях m-алгебр, а в п. 2.4 – о подпрямых произведениях семейств m-алгебр. В конце этого пункта показано, что при некоторых предположениях подпрямо неразложимое m-кольцо оказывается полем относительно операций сложения и суперпозиции. В п. 2.5 приводится конструкция свободного произведения m-алгебр.

В § 3 обсуждаются понятия, связанные с коммутаторами. В п. 3.1 вводится понятие абелевой m-алгебры как и для любой Ω-группы, выводятся некоторые свойства. В п. 3.2 определяется взаимный коммутант в смысле Куроша двух под-m-алгебр, перечисляются некоторые свойства. В п. 3.3 на основе определения взаимного коммутатора двух конгруэнций универсальной алгебры из мальцевского многообразия выводится описание взаимного коммутатора в смысле Смита двух идеалов m-алгебры. В общем случае взаимный коммутант в смысле Куроша и взаимный коммутатор двух идеалов m-алгебры не обязаны совпадать, однако это будет в случае когда эти идеалы совпадают с исходной m-алгеброй. В этом случае мы приходим к понятию коммутанта m-алгебры. В очередном п. 3.5 вводится понятие отношения централизуемости двух идеалов и приводятся его свойства. Это приводит далее к определению центрального идеала и центрального произведения m-алгебр. В конце пункта доказано, что любой гомоморфный образ прямого произведения двух m-алгебр является центральным произведением некоторых гомоморфных образов этих m-алгебр. В п. 3.6 определяется центр m-алгебры как наибольшего центрального идеала. Доказываются некоторые утверждения с участием центра и коммутанта, отношения прямого подобия и центрального изоморфизма двух идеалов. Представлены примеры m-алгебр с крайними значениями центра и коммутанта.

В § 4 вводятся и исследуются классы нильпотентных и разрешимых m-алгебр. Так, в п. 4.1 с помощью центральных цепей определяется понятие нильпотентной m-алгебры, указываются некоторые свойства. Например, замкнутость класса нильпотентных m-алгебр относительно взятия под-m-алгебр, гомоморфных образов, конечных прямых произведений, центральных изотопий и др. Или, к примеру, установлено, что под-m-алгебра Фраттини нильпотентной m-алгебры является ее идеалом и фактор-m-алгебра по нему является абелевой m-алгеброй. В п. 4.2 приводится конструкция под-m-алгебр и идеалов прямого произведения m-алгебр в зависимости от под-m-алгебр компонент и вводится понятие конгруэнц-правильной m-алгебры (без косых конгруэнций) как m-алгебры, для которой любой идеал прямого произведения конечного семейства экземпляров этой m-алгебры является прямым произведением его проекций на компоненты. Выработан критерий конгруэнц-правильности m-алгебры. В качестве следствия доказано, что конгруэнц-правильность m-алгебры A равносильна тому, что любой ее гомоморфный образ является m-алгеброй без центра. Другое следствие состоит в том, что наличие правой или левой единицы у m-кольца оказывается достаточным условием его конгруэнц-правильности. В конце пункта приводится характеризация конгруэнций на m-алгебре как под-m-алгебре ее декартовой степени (упражнение 1). В п. 4.3 с помощью ряда коммутантов вводится понятие разрешимой m-алгебры, выявляются некоторые свойства таких m-алгебр. В частности, класс разрешимых m-алгебр замкнут относительно взятия под-m-алгебр, гомоморфных образов и строго включает в себя класс нильпотентных m-алгебр.

В § 5 рассматриваются некоторые свойства категорий $\mathcal{K}_0$ и К-*Mod*. В п. 5.1 доказано, что в этих категориях нет других инъективных объектов, кроме нулевых. В п. 5.2 отмечаются некоторые свойства проективных m-алгебр, в частности, что все они являются ретрактами свободных m-алгебр. В п. 5.3 фиксируются свойства образующих и кообразующих объектов названных выше категорий.

В § 6 вводятся в рассмотрение разного вида дополнения к под-m-алгебрам и идеалам как вспомогательный материал к дальнейшим главам. В п. 6.1 по аналогии с кольцами вводятся и исследуются понятия существенной и косущественной под-m-алгебры, а также близкие понятия по отношению к идеалам. На основе этого в п. 6.2 определяются близкие к понятию прямого дополнения аддитивные дополнения и дополнения по пересечениям.

Глава II посвящена прямым разложениям и изоморфизмам прямых разложений. В § 1 рассматриваются m-алгебры, разложимые в прямое произведение минимальных или простых m-алгебр. В п. 1.1 имеются некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся чистых К-модулей – это когда m-кольцо К действует нулевыми преобразованиями. В п. 1.2 выделяется класс гамильтоновых m-алгебр, это таких m-алгебр, у которых каждая под-m-алгебра является идеалом. Свойства гамильтоновых m-алгебр затем используются при описании строго приводимых m-алгебр. Как раз о таких m-алгебрах говорится в п. 1.3. Именно m-алгебру A называем строго приводимой, если любая ее под-m-алгебра выделяется прямым слагаемым, класс таких m-алгебр обозначаем через $\mathcal{S}$, называем вполне разложимой, если m-алгебра A либо нулевая, либо разлагается в прямую сумму минимальных m-алгебр, класс вполне разложимых m-алгебр обозначаем через $\mathcal{R}$; m-алгебру A называем ретрактной, если любая ее под-m-алгебра является ретрактом, класс ретрактных m-алгебр обозначаем через $\mathcal{P}$; m-алгебру A называем вполне приводимой, если любой ее идеал выделяется прямым слагаемым, класс таких m-алгебр обозначаем через $\mathcal{B}$; наконец, класс гамильтоновых m-алгебр обозначается через $\mathcal{H}$. В п. 1.3 выявляются некоторые свойства строго приводимых m-алгебр. В п. 1.4 приводятся основные сведения о вполне приводимых m-алгебрах. В п. 1.5 обсуждаются свойства отношений между перечисленными выше классами этих классов, именно установлены соотношения : $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} = \mathcal{P} \subseteq \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{H} = \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$. При этом в общем случае включения являются строгими.

Тема § 2 − изоморфизмы прямых разложений. Именно в п. 2.1 доказываются теоремы об изоморфизмах прямых разложений строго приводимых, вполне разложимых и вполне приводимых m-алгебрах, аналогичных соответствующим теоремам в теории колец. В п. 2.2 и 2.3 строятся системы инвариантов для строго приводимых m-колец и К-модулей. В п. 2.4 с помощью конструкции матричной степени тела выявляется строение m-кольца К, у которого естественный К-модуль строго приводим. В систему инвариантов входит введенная конструкция матричной степени тела, последовательности простых чисел, соответствующие наборам конечных простых полей и конечных простых колец с нулевым умножением.

В § 3 исследуются свойства решетки L под-m-алгебр строго приводимой m-алгебры. В частности, в п. 3.2 установлено, что такая решетка является модулярной геометрической и разлагается в прямое произведение решеток, компоненты которого являются либо булевыми (такая компонента может быть только одна), либо прямо неразложимыми геометрическими решетками. Далее в пп. 3.3–3.7 рассматриваются частные случаи таких разложений. Именно в п. 3.3 показано, что если все компоненты не изоморфны между собой, то L является булевой решеткой, причем в случае К-модуля имеет не более чем счетное множество атомов. В случае разложения в прямое произведение изоморфных между собой минимальных компонент (более, чем одной), строится некоторое тело D' исходя из строения *m*-кольца К. С другой стороны, в этом случае решетка L прямо неразложима и изоморфна решетке подпространств векторного пространства $V(D, \mathbf{m})$ над телом D размерности **m.** Основная теорема 3.7.1 сообщает о том, что тело D' изоморфно телу D и кардинал $\mathbf{m}$ − это мощность множества компонент данного разложения. Таким образом, в случае *m*-колец решетка L полностью определяется мощностью **m** множества компонент и некоторым простым числом, а в случае К-модуля − кардиналом **m** и некоторым фактормодулем естественного К-модуля.

В § 4 определяются радикалы *m*-алгебр, связанные с гомоморфизмами на строго приводимые и вполне приводимые *m*-алгебры, а также исследуются свойства *m*-алгебр с условиями конечности. В п. 4.1 определяется строго приводимый радикал *radA* *m*-алгебры A как пересечение ее максимальных под-*m*-алгебр, являющихся идеалами, а в п. 4.2 определяется вполне приводимый радикал *i-radA* *m*-алгебры A как пересечение ее максимальных идеалов и исследуются некоторые их начальные свойства. В п. 4.3 вводится в рассмотрение примитивный радикал *m*-кольца как пересечение его примитивных идеалов, являющихся максимальными идеалами и обсуждается взаимодействие этого понятия с понятиями введенных ранее радикалов. В п. 4.4. обычным образом определяется цоколь *m*-алгебры как сумма минимальных под-*m*-алгебр. В п. 4.5 рассматриваются свойства полупростых *m*-алгебр по отношению к введенным выше радикалам. В п. 4.6 выясняются некоторые связи между радикалами *m*-кольца К и радикалами его К-модулей. В частности, доказано, что строго приводимый радикал $rad_{К}$К естественного К-модуля совпадает с радикалом Джекобсона *Rad*К данного *m*-кольца К, определенного в предыдущей книге автора как пересечение ядер всех неприводимых представлений *m*-кольца К.

В главе III исследуются свойства *m*-алгебр с условиями конечности. В § 1 вводятся понятия артиновой, *i*-артиновой, нетеровой, *i*-нетеровой *m*-алгебры в соответствии с условиями минимальности или максимальности, наложенными на решетку под-*m*-алгебр или идеалов *m*-алгебр. Доказываются некоторые свойства, например, следствие 1.2.1 о разложении артиновой и *i*-нетеровой *m*-алгебры в полупрямое произведение образа и ядра некоторого ее эндоморфизма.

В п. 1.3 доказано обобщение теоремы Гильберта о базисе, именно утверждается, что если R – коммутативное ассоциативное нетерово кольцо с единицей 1 и кольцо $A = R[x]$ или $A = R[x]x$ рассматривается как К-модуль, где К = $R[x]x$ – *m*-кольцо многочленов от переменной x над кольцом R без свободного члена, то A – *i*-нетеров К-модуль.

В § 2 обсуждаются различные сочетания условий конечности, строгой приводимости, вполне приводимости и полупростоты. Например, в п. 2.1 показывается, что в случае строгой приводимости m-алгебры понятия артиновости, i-артиновости, нетеровости, i-нетеровости равнообъемны. В п. 2.2 рассматриваются свойства введенных выше радикалов и цоколя для конечно-порожденных и конечно-копорожденных m-алгебр. В п. 2.3 доказывается, к примеру, градуированность решетки под-m-алгебр полупростой конечно-копорожденной m-алгебры. Параграф заканчивается теоремой о том (теорема 2.4.1), что радикал Джекобсона m-кольца К в случае артиновости и гамильтоновости его естественного К-модуля 0-нильпотентен, т. е. суперпозиция нескольких экземпляров этого радикала является нулевым идеалом (что соответствует понятию нильпотентного идеала кольца).

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НУЛЬ-СИММЕТРИЧНЫХ *m*-КОЛЕЦ И К-МОДУЛЕЙ НАД НИМИ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Терминология и обозначения

Будем использовать определения и обозначения книги [39], теории множеств и отношений [7, 21, 32]…, теории решеток [5, 11, 30, 55, 64]…, теории универсальных алгебр [19, 26, 28, 33, 46, 51, 52],…, теории групп и Ω-групп [16, 22, 23, 29, 37, 50, 54, 63], теории колец [6, 8, 13, 17, 36, 48],… , теории почтиколец [45, 47, 67], …, теории полугрупп [18, 24, 25, 38]…, теории категорий [4, 35, 36], …, геометрии и геометрической алгебры [2, 10, 55, 59]…, и др.

По мере необходимости также вводятся определения и обозначения в тексте параграфов. Ссылки оформляются следующим образом, к примеру, ссылаясь в другом пункте этой же главы на предложение 1, п. 4.3, гл. I , записываем его как предложение 4.3.1, в другой главе − предложение 4.3.1, гл. I.

Ниже приводятся некоторые из используемых обозначений. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$ – множество всех неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N}_2$ – множество всех натуральных чисел, больших 1, $\mathbb{Z}$ – множество всех целых рациональных чисел. Для $m \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$**,** $n \in \mathbb{N}_2$ C_n^m означает число сочетаний из n по m. Если X – множество, то 2^X означает множество всех его подмножеств, $|X|$ – мощность множества X, $FinX$ – множество всех конечных подмножеств множества X. Для двух множеств X и Y как обычно, обозначаются $X \times Y$ – декартово произведение множеств X и Y, $X \cup Y$ – объединение, $X \cap Y$ – пересечение, множеств X и Y (в случае, если они находятся в общем множестве), $X \bigsqcup Y$ – дизъюнктное объединение множеств X и Y. Если $f : X \to Y$ – отображение и $Z \subseteq X$, то через $f|_Z$ обозначается ограничение (сужение) f на Z. Для $y \in Y$ через c_y обозначается постоянное отображение со значением y, где c_y: $x \mapsto y$ для любого $x \in X$, а через IdX – тождественное преобразование множества X, т. е. $IdX : x \mapsto x$ для любого $x \in X$. Если $\rho \subseteq X \times X$, то $\rho^{-1} = \{ (x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in \rho \}$, $\Delta_X = \{ (x,x) \mid x \in X \}$ –

диагональ множества X. Для двух бинарных отношений ρ и σ определяется их *свертка*

$$\rho\circ\sigma = \{ (x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X ((x, z) \in \sigma, (z, y) \in \rho\}.$$

Если $\Delta_X \subseteq \rho = \rho^{-1} = \rho\circ\rho$, то ρ является отношением эквивалентности на X или разбиением множества X. Все такие отношения образуют полную решетку (по включению) $(PartX, \cap, \vee)$, где "$\cap$" – пересечение отношений, и для $\rho, \sigma \in PartX$ их наименьшая общая мажоранта $\rho \vee \sigma$ есть объединение отношений вида $\rho\circ\sigma\circ\ldots\circ\rho\circ\sigma$. Эта решетка называется решеткой разбиений множества X. Если A − множество с выделенным элементом 0 (в частности, когда $(A, +)$ − абелева группа), то используем обозначение $A^* = A \setminus \{0\}$. В последнем случае, если $B \in FinA$, то через $\sum B$ обозначает сумму всех элементов из множества B.

Пусть $(L, \leq)$ – (частично) упорядоченное множество. Для $a \in L$ положим $\downarrow a = \{b \in L \mid b \leq a\}$ – множество всех минорант элемента a, $\uparrow a = \{b \in L \mid a \leq b\}$ – множество всех мажорант элемента a, $[a, b] = \uparrow a \cap \downarrow b$. Также если $M \subseteq L$, то пишем $\uparrow M = \bigcup_{a \in M} \uparrow a$, $\downarrow M = \bigcup_{a \in M} \downarrow a$. Если $|[a, b]| = 2$, то говорим, что b *покрывает* a и пишем $a \prec b$.

Если $(A, +)$ – группа и $X \subseteq A$, то через $< X >_+$ обозначаем наименьшую среди подгрупп этой группы, содержащих подмножество X. Если $(К, +, \cdot)$ – кольцо и $X \subseteq A$, то через $< X >_r$ обозначаем наименьшее среди подколец этого кольца, содержащих подмножество X, а через $<< X >>_r$ – наименьший идеал, содержащий подмножество X.

Пусть $\mathcal{G}$ − некоторый класс универсальных алгебр с операциями из множества Φ и пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ − произвольное семейство алгебр из этого класса с непустым множеством индексов I. *Декартовым произведением* [14] $\overline{\prod_{i\in I} A_i}\,(\pi_i)$ *семейства* $\{A_i\}_{i \in I}$. называется множество $A = \overline{\prod_{i\in I} A_i}\,(\pi_i)$ всех отображений $f : I \to \bigsqcup A_i$, где для $i \in I$ $f(i) \in A_i$, с поаргументными операциями из множества Φ. Здесь для $i \in I$ и $f \in A$ $\pi_i: f \mapsto f(i)$ – *естественная проекция* A на A_i.

Перейдем к основному объекту изучения данной книги. Напомним [39], что универсальная алгебра $(К, +, \cdot, \circ)$ называется *m-кольцом* (*мультиоператорным почтикольцом*), если $(К, +, \cdot)$ – коммутативное и ассоциативное кольцо (с операциииями сложения и умножения) (которое называется *редуктом m-кольца* $(К, +, \cdot, \circ)$ [39]), а операция суперпозиции "$\circ$"

ассоциативна и дистрибутивна справа относительно кольцевых операций сложения и умножения. Таким образом, имеем при этом три полугруппы : (К, +), (К, $\cdot$) и (К, $\circ$). Первую называем *аддитивной группой*, вторую – *мультипликативной полугруппой*, третью – o*-полугруппой т-кольца* К. Если последняя является группой с внешне присоединенным нулем [18], то *т*-кольцо (К, +, $\cdot$,$\circ$) называется *т-кольцом с делением.* Для $a\in$К преобразование вида $\psi_a : x \mapsto x\circ a$ называется *внутренним правым сдвигом т-кольца* К, *индуцированным элементом а*, оно является эндоморфизмом редукта этого *т*-кольца. Соответственно преобразование $\varphi_a : x \mapsto a\circ x$ называется *внутренним левым сдвигом т-кольца* К, *индуцированным элементом а*. Элемент $a\in$ К называется *инъективным справа (слева)*, если преобразование ψ_a (соответственно, преобразование φ_a) инъективно. Элемент $a\in$ К называется *идемпотентом т-кольца* К, если он является идемпотентом o-полугруппы этого *т*-кольца. Множество всех идемпотентов *т*-кольца К обозначается через E(К), Множество всех идемпотентов полугруппы (К, $\cdot$) обозначается через I (К). В частности, $a\in E$(К), если $a = 0$ или a является единицей (правой, левой) o-полугруппы этого *т*-кольца, если таковая имеется. В этом случае a называется *единицей* (соответственно *правой, левой*) *т-кольца* К. *Ad hoc,* если a – единица полугруппы (К, $\cdot$), то $a\in I$ (К) и называется *мультипликативной единицей т*-кольца К. Понятия под-*т*-кольца, идеала, гомоморфизма, конгруэнции *т*-колец определяются обычным образом как для Ω-групп. Более подробно, *идеал т-кольца* (К, +, $\cdot$,$\circ$) [39] − это такой идеал I редукта этого *т*-кольца, который *инвариантен справа*, т. е. $I\circ$К $\subseteq I$ и *стабилен слева*, т. е. удовлетворяет соотношению $\forall x,y\in$ К $\forall a\in I\ (x\circ(y+a) - x\circ y)\in I$. В этом случае пишем $I \trianglelefteq$ К. Наименьшее под-*т*-кольцо *т*-кольца (К, +, $\cdot$, $\circ$) среди содержащих подмножество $X\subseteq$ К, обозначается через $< X >$, наименьший идеал – через $<< X >>$. Решетка под-*т*-колец *т*-кольца К обозначается через *Sub*К, решетка идеалов − через $\Im$(К), решетка конгруэнций − через *Con*К. Каждый идеал есть смежный класс единственной конгруэнции, тем самым устанавливается изоморфизм решеток $\Im$(К) и *Con*К. Обе они являются полными алгебраическими и модулярными решетками. Последнее ввиду перестановочности конгруэнций. В соответствии с терминологией теории почтиколец [67] *т*-кольцо К называется *нуль-симметричным* [39], если К$\circ\{0\} = \{0\}$, иначе говоря, 0 является нулевым элементом его o-полугруппы. Категория всех *т*-колец и их гомоморфизмов обозначается через $\mathcal{K}$. Ее полная подкатегория, состоящая из нуль-симметричных *т*-колец обозначается через $\mathcal{K}_0$. Далее в этой книге все *т*-кольца предполагаются нуль-симметричными. Типичный пример, если $(A, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо (пример 1.3.3 из книги [39]), то множество A_0^A всех преобразований кольца A, сохраняющих 0, образует нуль-симметричное *т*-кольцо относительно поаргументного сложения и умножения и операции суперпозиции (композиции) преобразований (пример 1.3.3 из [39]). Тройка $(К, A, \alpha)$ называется *т-тройкой* или К-*модулем*, если К есть *т*-кольцо, $(A, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо и α – гомоморфизм *т*-кольца К в *т*-кольцо A_0^A. В этом случае вместо $(К, A, \alpha)$ пишем ${}_К A$ или просто A, если известно, о каком гомоморфизме α идет речь. Группа $(A, +)$ называется *аддитивной группой* К-*модуля* ${}_К A$, полугруппа $(A,)$ – *мультипликативной полугруппой* К-*модуля* ${}_К A$, а кольцо $(К, +, \cdot)$ – *редуктом* К-модуля ${}_К A$. Через $I(A)$ обозначается множество всех идемпотентов полугруппы $(A, \cdot)$. Для упрощения записей в этой ситуации введем следующие обозначения. Если $x \in К$ и $a \in A$, то записываем $\alpha(x)(a)$ как $x\square a$, т. е. операцию $\alpha(x)$: $A \to A$ переобозначаем как $x\square - : a \mapsto x\square a = \alpha(x)(a)$. Если $(К, +, \cdot, \circ)$ − *т*-кольцо, то *естественный* К-*модуль* ${}_К К$ [39] определяется как кольцо $(К, +, \cdot)$ с действием элементов из К на этом кольце по формуле

$$\forall\, x, a \in К\ (x\square a = x\circ a). \qquad (1.1.1)$$

Из определений тогда следуют следующие свойства операции “□” :
$К \times A \to A$. Если $x, y \in К$, $a \in A$, то

1) $(x + y)\square a = x\square a + y\square a$;
2) $(x\, y)\square a = (x\square a)(y\square a)$;
3) $(x\square(y\square a) = (x \circ y)\square a$;
4) $0\square a = 0 = x\square 0$;
5) $(-x)\square a = -(x\square a)$.

Для двух К-модулей ${}_К A$ и ${}_К B$ гомоморфизм φ кольца $(A, +, \cdot)$ в кольцо $(B, +, \cdot)$ называется *гомоморфизмом* К-*модулей* или К-*гомоморфизмом*, если выполняется условие : $\forall\, x \in К\ \forall\, a \in A\ (\varphi(x\square a) = x\square \varphi(a))$. Множество всех гомоморфизмов из К-модуля A в К-модуль B будем обозначать через $Hom_К(A, B)$ или проще $Hom(A, B)$, если понятно, о каком *т*-кольце К идет речь. *Подмодулями* К-*модуля* A являются те подкольца его редукта, которые *устойчивы* [39], т. е. $К\square B \subseteq B$. В этом случае используем запись

$A \leq B$ или $A < B$, если $A \neq B$. Множество всех подмодулей К-модуля A будет обозначаться через SuA. Это полная [5] алгебраическая решетка с операциями пересечения "$\cap$" подмодулей и "$\vee$" – взятия наименьшего подмодуля среди содержащих исходные подмодули. Если $X \subseteq A$, то через ${}_{К}\!< X >$ обозначается наименьший подмодуль К-модуля A, содержащий множество X. В частности, для любого семейства подмодулей $\{ B_\alpha \}_{\alpha\in\Lambda}$ имеем $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha .= {}_{К}\!< \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha >$. *Идеалами* К-*модуля* A являются *стабильные* [39] идеалы B его редукта, т. е. те, для которых выполняется условие: $\forall\, x\in К\ \forall\, a\in A\ \forall\, b\in B\ (x\square(a + b) - x\square a\in B)$. В этом случае пишем $B \trianglelefteq A$ или $B \vartriangleleft A$, если $A \neq B$.

Идеалы К-модуля A образуют полную алгебраическую решетку по включению с операциями пересечения "$\cap$" и суммирования "+" или "$\sum$" – взятия наименьшего идеала, содержащего исходные идеалы. Если $X \subseteq A$, то через ${}_{К}\!\ll X \gg$ обозначается наименьший идеал, содержащий множество X. В частности, для двух идеалов B и C имеем $B + C = {}_{К}\!\ll B \cup C \gg$, и для любого семейства идеалов $\{ B_\alpha \}_{\alpha\in\Lambda}$ имеем $\sum_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha = {}_{К}\!\ll \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \gg$. Эта решетка обозначается через StA. Если $B\in StA$, то факторкольцо A / B становится К-модулем, если действие элемента $x\in К$ на смежный класс $a + B$, где $a\in A$, определить следующим образом: $x\square(a + B) = x\square a + B$. Этот К-модуль называется *фактормодулем* К-*модуля* A *по идеалу* B и обозначается через A / B. Каждый идеал есть смежный класс единственной конгруэнции, тем самым устанавливается изоморфизм решетки StA и решетки $Con\ A$ конгруэнций К-модуля A (определяемых как разбиения вида $\varphi^{-1}\circ\varphi$, где φ – гомоморфизм).

Если A есть К-модуль и B, $C \subseteq A$ ($B \subseteq A$, $C \subseteq К$), то *правое* (соответственно *левое*) *частное* $(B : C)$ (соответственно $(B \div C)$ *от деления подмножества* B *на подмножество* C определяются по формулам :

$$(B : C) = \{ x\in К \mid x\square C \subseteq B \}. \tag{1.1.2}$$

$$(B \div C) = \{ a\in A \mid C\square a \subseteq B \}. \tag{1.1.3}$$

Первое из этих понятий наиболее употребительно для случая, когда ${}_{К}A = {}_{К}К$ – естественный К-модуль. В этих обозначениях приведем несколько лемм, нужных в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть A есть К-модуль и $\varnothing \neq X \subseteq$ К. Тогда

$$X\Box A = 0 \Rightarrow ({}_{\text{К}}{<<}X{>>})\Box A = 0. \tag{1.1.4}$$

Доказательство. Так как $X\Box A = 0$, то согласно (1.1.3) $X \subseteq (0{:}\ A)$, а ввиду предложения 9.1.2 книги [39] $(0{:}\ A) \in \mathfrak{I}(\text{К})$, поэтому $<<X>> \subseteq$ $\subseteq (0{:}\ A)$ и $<<X>>\Box A = 0$. ◊

Лемма 2. Пусть A есть К-модуль и $\varnothing \neq X \subseteq$ К. Если $X\circ\text{К} \subseteq X$, то $<<X>> = {}_{\text{К}}{<<}X{>>}$.

Доказательство. Так как $X\circ\text{К} \subseteq X \subseteq {}_{\text{К}}{<<}X{>>}$, то согласно (1.1.4) $X \subseteq ({}_{\text{К}}{<<}X{>>}{:}\ \text{К})$, а так как ${}_{\text{К}}{<<}X{>>} \in St_{\text{К}}\text{К}$, а $\text{К} \in \mathfrak{I}(\text{К})$, то согласно предложению 9.1.2 книги [39] $({}_{\text{К}}{<<}X{>>}{:}\ \text{К}) \circ \mathfrak{I}(\text{К})$, поэтому ${}_{\text{К}}{<<}X{>>} \subseteq$ $\subseteq ({}_{\text{К}}{<<}X{>>}{:}\ \text{К})$ и, значит, ${}_{\text{К}}{<<}X{>>} \circ \text{К} \subseteq {}_{\text{К}}{<<}X{>>}$. Это приводит к тому, что ${}_{\text{К}}{<<}X{>>}$ – инвариантный справа и стабильный слева идеал кольца (К, +, $\cdot$), т. е. является идеалом m-кольца К. Таким образом, ${}_{\text{К}}{<<}X{>>} = {<<}X{>>}$.◊

В ситуации естественного К-модуля ${}_{\text{К}}$К имеем похожие утверждения, как показывает следующая

Лемма 3. Пусть $\varnothing \neq X, B \subseteq$ К, $P \in St_{\text{К}}\text{К}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

а) $X\circ B \subseteq P \Rightarrow {}_{\text{К}}{<<}X{>>}\circ B \subseteq P$.

б) $(B \in Su_{\text{К}}\text{К})$ & $(X\circ B \subseteq P) \Rightarrow {<<}X{>>}\circ B \subseteq P$.

Доказательство. Пусть $X\circ B \subseteq P$. Тогда согласно (1.1.3) $X \subseteq (P{:}\ B)$. Теперь благодаря стабильности слева идеала P согласно утверждениям 3) и 5) предложения 9.1.2 книги [39] $(P{:}\ B) \in St_{\text{К}}\text{К}$, поэтому ${}_{\text{К}}{<<}X{>>} \subseteq (P{:}\ B)$ и ${}_{\text{К}}{<<}X{>>}\circ B \subseteq P$. Аналогично, если $B \in Su_{\text{К}}\text{К}$, то согласно утверждениям 3), 5) и 6) того же предложения 9.1.2 $(P{:}\ B) \in \mathfrak{I}(\text{К})$, поэтому ${<<}X{>>}\circ B \subseteq P$.◊

Упражнение 1. Доказать, что если A есть К-модуль, $a \in A$ и $L \in St_{\text{К}}\text{К}$, то $\text{К}\Box a \in Su_{\text{К}}\text{К}$ и $L\Box a \in St(\text{К}\Box a)$.◊

Упражнение 2. Доказать, что если К есть m-кольцо, $I \in \mathfrak{I}(\text{К})$ и $a \in (0{:}\ \text{К})$, то $<<a>> \subseteq (I : \text{К})$.

Категория К-модулей и их гомоморфизмов обозначается через К-*Mod*. Ввиду нуль-симметричности m-кольца К каждый К-модуль A является Ω-группой, что позволяет высказывать утверждения, общие для Ω-групп. В частности, решетка StA уже является подрешеткой решетки SuA. В дальнейшем некоторые утверждения будут верны как для класса нуль-симметричных m-колец, так и для класса К-модулей, поэтому в целях экономии места обозначение $\mathcal{Z}$ будет использоваться как для категории $\mathcal{K}_0$, так и для категории К-*Mod* и в этом случае объекты этих категорий называем *m-алгебрами*. *Под-m-алгебры, идеалы, фактор-m-алгебры по идеалу, конгруэнции, эндоморфизмы m-алгебры A*, *гомоморфизмы m-алгебр* имеют очевидный смысл. Решетку под-m-алгебр m-алгебры A в этом случае обозначаем через $SubA$, решетку идеалов − через $\mathfrak{I}(A)$, решетку конгруэнций − через $ConA$. Если $X \subseteq A$, то наименьшую среди под-m-алгебру m-алгебры A, содержащих X, обозначаем через $< X >$, а наименьший среди идеалов m-алгебры A, содержащих X, обозначаем через $<< X >>$. m-алгебра A называется *конечнопорожденной* (*идеально конечнопорожденной*), если $A = < X >$ (соответственно $A = << X >>$) для некоторого конечного подмножества $X \subseteq A$. Множество всех гомоморфизмов из m-алгебры A в m-алгебру B обозначаем через $Hom(A, B)$. m-алгебра A называется *простой*, если $| \mathfrak{I}(A) | = 2$ и *минимальной*, если $| SubA) | = 2$. В частности, *минимальные* К-*модули* − это в точности неприводимые К-модули [39]. Подкласс $\mathcal{M}$ класса $\mathcal{Z}$ называется *замкнутым слева* (*справа*), если любая под-m-алгебра (соответственно любой гомоморфный образ) m-алгебры A из класса $\mathcal{M}$ принадлежит классу $\mathcal{M}$. Также подкласс $\mathcal{M}$ класса $\mathcal{Z}$ называется *наследственным*, если для любой m-алгебры из класса $\mathcal{M}$ каждый ее идеал принадлежит классу $\mathcal{M}$ и называется *замкнутым относительно расширений*, если для любой m-алгебры A из класса $\mathcal{Z}$, и любого ее идеала B, если B и A / B – обе m-алгебры из класса $\mathcal{M}$, то m-алгебра A принадлежит классу $\mathcal{M}$. Отметим одно из часто применяемых свойств m-алгебр, выполняющихся для любой Ω-группы.

С л е д с т в и е 1. Для любой m-алгебры A все ее конгруэнции перестановочны и решетка $\mathfrak{I}(A)$ модулярна.◊

1.2. Некоторые сведения из теории решеток

При изучении некоторых классов m-алгебр (в частности, строго приводимых), на которых в основном сосредоточено внимание этой главы, особую роль играет решетка $SubA$, которая оказывается геометрической и во многом определяет структуру таких m-алгебр. В связи с этим приведем некоторые касающиеся этой темы определения и утверждения теории решеток ([2, 5, 11, 27],…).

Пусть $(L, \wedge, \vee)$ – полная решетка. Ее *компактные элементы* – это такие элементы, которые будучи наименьшей мажорантой какого-либо множества, являются наименьшей мажорантой некоторого конечного подмножества этого множества. Множество компактных элементов обозначается через $CompL$. Если это множество порождает L как полную верхнюю полурешетку, то решетка L называется *алгебраической*. В частности, для m-алгебры A алгебраическими решетками являются решетки $L = SubA$ и $L = \mathfrak{I}(A)$. Здесь $CompL$ в первом случае состоит из *конечно порожденных m-алгебр*, во втором – из *конечно порожденных идеалов*.

Далее несколько специфических решеточных обозначений. Как обычно, через 0 обозначают наименьший, а через 1 – наибольший элемент решетки L. Теперь $\mathcal{M}i\,L = \{\, a \in L \mid 0 \prec a \,\}$ – множество всех *атомов решетки* L, $\mathcal{M}aL = \{\, a \in L \mid a \prec 1 \,\}$ – множество всех *коатомов решетки* L. Элемент $a \neq 0$ решетки L называется $\vee$*-неразложимым*, если для любых элементов $b, c \in L$ из того, что $a = b \vee c$ следует, что $a \in \{b, c\}$. Если при этом решетка L удовлетворяет условию максимальности (т. е. любые возрастающие цепи конечны), то для каждого $\vee$-неразложимого элемента a существует единственный покрываемый им элемент, называемый *предшественником элемента a* и обозначаемый через $a^{\vee}$. Неодноэлементная решетка L называется *атомной*, если $\uparrow \mathcal{M}i\,L = L \setminus \{0\}$. Решетка L называется *атомичной* (*атомно порожденной*), если каждый ее ненулевой элемент представляется в виде наименьшей общей мажоранты некоторого подмножества атомов. Двойственно определяются *коатомные и коатомичные решетки*. Пусть $a, b \in L$ и $a < b$. Предположим, что существует $n \in \mathbb{N}$ и последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_n \in L$ такая, что

$$a = a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n = b. \tag{1.2.1}$$

Тогда говорят, что последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$ образует *максимальную цепь*, *соединяющую элементы a* и *b*, а число n называют *длиной* этой цепи. Если среди таких длин существует наибольшая, то ее называют *высотой элемента b по отношению к a* и обозначают $l(a, b)$. Высоту элемента b по отношению к 0 называют проще *высотой элемента b* и обозначают через $l(b)$. Если для любых $a, b \in L$ таких, что $a < b$, существует $l(a, b)$, то решетку L называют *градуированной*.

Решетка L называется *полумодулярной* (*сверху*), если

$$\forall\, a, b, c \in L\ (a \prec b \Rightarrow (a \vee c = b \vee c) \vee (a \vee c \prec b \vee c),$$

называется *модулярной*, если

$$\forall\, a, b, c \in L\ (b \leq a \Rightarrow (a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)),$$

и дистрибутивной, если

$$\forall\, a, b, c \in L\ (a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

Важное свойство полумодулярных сверху рещеток выражает следующая

Теорема 1 (теорема Жордана-Гельдера (теорема 1, § 2 гл. IV [11])). В полумодулярной сверху решетке любые две максимальные цепи, соединяющие два элемента, имеют одинаковую длину.◊

Алгебраическая решетка L называется *геометрической*, если она полумодулярна и множество компактных элементов которой состоит в точности из конечных объединений атомов. Решетка L с наибольшим элементом 1 и наименьшим элементом 0 называется *решеткой с дополнениями*, если для каждого элемента $a \in L$ существует элемент $b \in L$ (*дополнение элемента* a) такой, что $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Если к тому же дополнение единственно для каждого $a \in L$, то решетка L называется *решеткой с единственными дополнениями*. Решетка L называется *решеткой с относительными дополнениями*, если для любых $a, b \in L$ таких, что $a < b$ ее подрешетка $[a, b]$ является решеткой с дополнениями, и называется *решеткой с интервальными дополнениями*, если для каждого $a \in L$ идеал $\downarrow a$ является решеткой с дополнениями. Решетка L называется *булевой*, если она дистрибутивна и с единственными дополнениями, и *обобщенной булевой*, если каждого $a \in L$ идеал $\downarrow a$ является булевой решеткой относительно индуцированных операций. Решетка L называется *прямо неразложимой*, если ее нельзя представить в виде декартова произведения неодноэлементных решеток. Решетка L является *подпрямо неразложимой*, если решетка $ConL$ ее конгруэнций атомна и имеет единственный атом, который называется *сердцевиной* или *монолитом решетки* L.

Из теоремы 4, § 3 гл.IV [11] имеем

Теорема 2. Любая геометрическая решетка является решеткой с относительными дополнениями. ◊

Теорема 3. (Теорема Маеды, теорема 5, § 3 гл. IV [11, 59, 70]).

Любая геометрическая решетка разлагается в декартово произведение прямо неразложимых геометрических решеток. ◊

Элементы a, $b \in L$ называются *перспективными* (пишем $a \sim b$), если они имеют общее дополнение. Из теорем 6 и 6' § 3 гл. IV [11] получаем

С л е д с т в и е 1. В геометрической решетке отношение перспективности атомов транзитивно. ◊

С л е д с т в и е 2. Геометрическая решетка прямо неразложима тогда и только тогда, когда любые ее два атома перспективны.◊

Подмножество J решетки L называется *идеалом*, если

$$\forall\ a, b \in J\ (a \vee b \in J) \text{ и } \forall\ a \in J\ (\downarrow a \subseteq J).$$

Множество всех идеалов $\mathrm{J}(L)$ решетки L замкнуто относительно любых пересечений и образуют полную решетку по включению. Для $J \in \mathrm{J}(L)$

через $\theta(J)$ обозначается наименьшая конгруэнция решетки L, для которой все элементы из J попадают в один смежный класс. Идеал J называется *стандартным*, если выполняется условие

$$\forall J_1, J_2 \in \mathrm{J}(L)\ (J \cap (J_1 \vee J_2) = (J \cap J_1) \vee (J \cap J_2))$$

Конгруэнция $\theta \in Con\ L$ называется *стандартной*, если $\theta = \theta(J)$ для некоторого стандартного идеала J. В этом случае такая конгруэнция может быть описана следующим образом.

Теорема 4. (Теорема 5, § 3, гл. III [11]). Пусть $\theta = \theta(J)$, где J – стандартный идеал. Тогда

$$\forall a, b \in L\ ((a, b) \in \theta \Leftrightarrow \exists i \in J\ ((a \wedge b) \vee i = a \vee b)). \lozenge$$

Также из теоремы 5, § 3, гл. III [11] получаем

Следствие 3. В решетке L с интервальными дополнениями любая конгруэнция стандартна. ◊

Решетка L называется *простой*, если $| ConL | = 2$.

Теорема 5. (Теорема 2 § 4, гл. IV, [11]).0 Для любого множества X решетка его разбиений $PartX$ является простой и геометрической. ◊

Решетка L называется *представимой*, если существует инъективный гомоморфизм γ (*представление*) из L в решетку $PartX$ для некоторого множества X. Будем говорить, что представление γ: $L \to PartX$ *имеет тип* 3, если $\forall a, b \in L\ (\gamma(a \vee b) \subseteq \gamma(a) \circ \gamma(b) \circ \gamma(a) \circ \gamma(b))$, *имеет тип* 2, если $\forall a, b \in L\ (\gamma(a \vee b) \subseteq \gamma(a) \circ \gamma(b) \circ \gamma(a)$, и *имеет тип* 1, если $\forall a, b \in L$ $(\gamma(a \vee b) \subseteq \gamma(a) \circ \gamma(b)$.

Теорема 6. (Теорема 4, § 4, гл. IV [11]). Всякая решетка имеет представление типа 3. ◊

Теорема 7. (Теорема 8, § 4, гл. IV [11, 51]). Решетка L модулярна тогда и только тогда, когда имеет представление типа 2. ◊

Что касается представлений типа 1, то, очевидно, ими обладают решетки конгруэнций алгебр, которые перестановочны, в частности, решетки конгруэнций Ω-групп. Отсюда получаем

Следствие 4. Для любой m-алгебры A решетка $\Im(A)$ имеет представление типа 1. ◊

С представлением типа 1 связан важный класс определенных ниже решеток. Именно решетка L называется *арговой*, если для любых $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 \in L$

$$(x_0 \vee y_0) \wedge (x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \leq ((z \vee x_1) \wedge x_0) \vee ((z \vee y_1) \wedge y_0),$$

где

$$z = (x_0 \vee x_1) \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (((x_0 \vee x_2) \wedge (y_0 \vee y_2)) \vee \vee ((x_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee y_2))).$$

Теорема 8. (Теорема 10, § 4, гл. IV [11, 55]). Любая решетка, имеющая представление типа 1, аргова. ◊

Отсюда получаем

С л е д с т в и е 5. Для любой *m*-алгебры *A* решетка $\Im(A)$ аргова.◊

Обратимся снова к геометрическим решеткам. Из следствия 2 § 3, гл. IV [11] получаем

С л е д с т в и е 6. Пусть *L* − геометрическая решетка. Тогда множество *F*, состоящее из ее элементов конечной высоты, является ее идеалом. Решетка *F* полумодулярна и каждый ее элемент представим в виде конечного объединения атомов. Решетка *L* изоморфна решетке J(*F*) всех идеалов решетки *F*. ◊

Теперь из рассмотрений § 3, гл. IV [11] выводим

С л е д с т в и е 7. Пусть *L* − прямо неразложимая геометрическая решетка. Тогда решетка *ConL* подпрямо неразложима. Ее единственным атомом (сердцевиной) является конгруэнция $\theta = \theta(F)$. ◊

С геометрическими решетками тесно связан определенный вид пространств замыканий, называемых геометриями. *Пространством замыкания на множестве* $M \neq \varnothing$ называется пара (M, $\overline{\ }$), где $\overline{\ } : X \mapsto \overline{X}$ – преобразование множества 2^M, удовлетворяющее условиям: для любых $X \in 2^M$

1) $X \subseteq \overline{X}$ (экстенсивность);

2) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (монотонность);

3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ (идемпотентность).

Подмножество *X* множества *M* называется *замкнутым* или *подпространством*, если $X = \overline{X}$. Из рассмотрений § 3, гл. IV [11] или гл. V [5] получаем

Лемма 1. Пусть (M, $\overline{\ }$) пространство замыканий. Тогда множество $L(M, \overline{\ }) = \{\overline{X} \mid X \in 2^M\}$ является полной решеткой по включению, замкнутое относительно любых пересечений. Обратно, если $L \subseteq 2^M$ и *L* замкнуто относительно любых пересечений, то положив для $X \in 2^M$ $\overline{X} = \bigcap\{Y \mid Y \in L, X \subseteq Y\}$, получим пространство замыканий (M, $\overline{\ }$), для которого $L(M, \overline{\ }) = L$. ◊

Геометрией на *M* называется такое пространство замыканий (M, $\overline{\ }$), для которого выполняются еще следующие условия:

4) $\forall x \in M\, (\overline{\{x\}} = \{x\})$ (точечность);

5) если $x, y \in M$, $X \in 2^M$ и $x \in \overline{X \cup \{y\}}$, $x \notin \overline{X}$, то $y \in \overline{X \cup \{x\}}$ (условие замены Штейница);

6) $\forall X \in 2^M\ \forall x \in \overline{X}\ \exists Y \in Fin X (x \in \overline{Y})$ (алгебраичность).

Соответствие между геометриями и геометрическими решетками выражает следующая

Лемма 2. Пусть $(M, \overline{})$ есть геометрия, тогда решетка $L(M, \overline{})$ является геометрической решеткой. Обратно, пусть L – геометрическая решетка. Положим $M = \mathcal{M}i\, L$ и для $X \in 2^M$ пусть $\overline{X} = \{x \in M \mid x \le \vee X\}$. Тогда пара $(M, \overline{})$ является геометрией, причем решетка L изоморфна решетке $L(M, \overline{})$ подпространств этой геометрии.◊

В указанном выше случае геометрия $(M, \overline{})$ считается *ассоциированной* с решеткой L.

Если $X \in L(M, \overline{})$, то *ранг* или *размерность подпространства* X определяется как высота $l(X)$ элемента X в решетке $L(M, \overline{})$. В частности, $l(\varnothing) = 0$, $l(\{x\}) = 1$ для $x \in M$. В последнем случае одномерное подпространство $\{x\}$ отождествляется с x и называется *точкой*. *Прямые* – это двумерные подпространства. Если $x \in M$, $\{x\} \subseteq p$, где p – прямая, то будем говорить, что *точка x принадлежит прямой p* или что *прямая p проходит через точку x* и писать $x < p$. Прямую p, проходящую через две различные точки x и y, обозначаем через $x \vee y$, что соответствует наименьшей общей мажоранте (объединению) атомов $\{x\}$ и $\{y\}$ в решетке $L(M, \overline{})$. Отсюда видно, что существует только одна прямая, проходящая через данные две различные точки. В этом контексте понятно, что означает точка пересечения двух различных прямых (если пересечение не пусто).

Далее предполагаем, что L – модулярная геометрическая решетка и $(M, \overline{})$ – ассоциированная с ней геометрия. Из леммы 1 § 5, гл. IV [11] имеем

Лемма 3. Элементы $x, y \in M$, где $x \ne y$, рассматриваемые как атомы решетки L перспективны тогда и только тогда, когда существует $z \in$ M такой, что $z \notin \{x, y\}$ и $z \le x \vee y$. ◊

Будем считать, что точки $x, y, z \in M$. Из леммы 2 § 5, гл. IV [11] получаем

Лемма 4. (Аксиома Паша). Пусть $x, y \in M$ и $x \ne y$. Если прямая $x \vee y$ пересекает две стороны $u \vee v$ и $v \vee w$ треугольника с вершинами u, v, $w \in M$, то она пересекает и третью сторону $u \vee w$.:◊

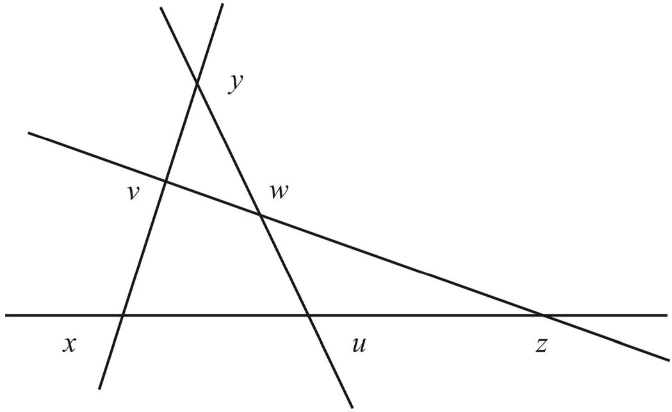


Рис.1.2.1

Из этих утверждений видно, что важные свойства геометрий, ассоциированных с модулярными геометрическими решетками, выражаются только с помощью понятий точек и прямых. Это лежит в основе следующего определения. Пусть M – множество и $\mathcal{P} \subseteq 2^M$. Пара $(M, \mathcal{P})$ называется *проективным пространством*, если выполняются следующие условия.

P1. Любое множество $p \in \mathcal{P}$ имеет не менее двух элементов.

P2. Для любых двух различных элементов $x, y \in M$ существует и только одно $p \in \mathcal{P}$ такое, что $x, y \in p$.

P3. Для любых элементов $x, y, u, v, w \in M$ и подмножеств $p, q \in \mathcal{P}$ таких,что $\{x, y, v\} \subseteq p$ и $\{y, u, w\} \subseteq q$, существуют $z \in M$ и $r, s \in \mathcal{P}$ такие, что $\{x, u, z\} \subseteq r$ и $\{v, w, z\} \subseteq s$.

Элементы множества M называем *точками*, а элементы множества $\mathcal{P}$– *прямыми*. Для любых точек $x, y \in M$, если $x \neq y$, то $x + y$ есть единственная прямая, проходящая через точки x и y. Если $p, q \in \mathcal{P}$ и $p \neq q$, то через $p \wedge q$ обозначаем единственную точку пересечения этих прямых.

Подмножество $X \subseteq M$ называется *линейным подпространством проективного пространства* $(M, \mathcal{P})$, если для любых точек $x, y \in X$ из того, что $x \neq y$, следует, что все точки прямой $x + y$ содержатся в X. Из теоремы 5 § 5, гл. IV [11] имеем

Лемма 5. Линейные подпространства проективного пространства образуют по включению модулярную геометрическую решетку, замкнутую относительно всех пересечений, обозначаем ее через $L(M, \mathcal{P})$. Соответствующее пространство замыканий $(M, \overline{})$ является геометрией. При этом подпространствами этой геометрии являются в точности линейные подпространства проективного пространства (M, $\mathcal{P}$), так что $L(M, \mathcal{P}) = L(M, \overline{\ })$. ◊

Геометрия (M, $\overline{\ }$) называется *проективной*, если она соответствует в определенном выше смысле некоторому проективному пространству. Будем говорить в этом случае, что *проективное пространство* (M, $\mathcal{P}$) *и геометрия* (M, $\overline{\ }$) *ассоциированы*. Теперь из теоремы 6 § 5, гл. IV [11] получаем

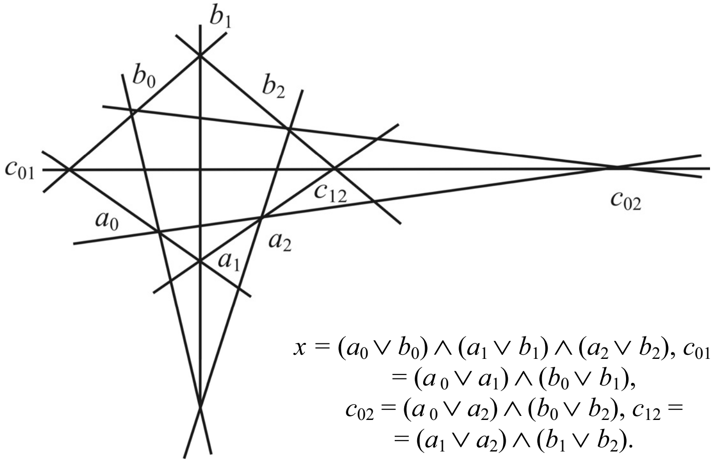
Лемма 6. Существует взаимнооднозначное соответствие между проективными пространствами (определяемыми точками и прямыми) и проективными геометриями (определяемыми как геометрии с модулярными решетками подпространств). При этом соответствии решетка линейных подпространств проективного пространства отображается изоморфно на решетку подпространств проективной геометрии. ◊

Проективное пространство (M, $\mathcal{P}$) называется *невырожденным*, если $\mathcal{P} \neq \varnothing$ и любая прямая $p \in \mathcal{P}$ имеет не менее трех точек. Ассоциированная с таким проективным пространством геометрия также называется *невырожденной*. Из следствия 3 следует, что решетки подпространств невырожденных геометрий прямо неразложимы. Отметим, что в случае $\mathcal{P} = \varnothing$ множество M состоит из одной точки. Тогда ассоциированная с таким проективным пространством геометрия имеет двухэлементную решетку подпространств, которая также прямо неразложима.

Из этого и теоремы Маеды (теорема 3) выводим

Следствие 8. Всякая модулярная геометрическая решетка разложима в прямое произведение прямо неразложимых геометрических решеток каждая из которых либо двухэлементна, либо изоморфна решетке подпространств невырожденной проективной геометрии. ◊

В некотором смысле универсальными моделями прямо неразложимых модулярных геометрических решеток в случае невырожденных геометрий являются решетки подпространств векторных пространств над телом. Именно из рассмотрений § 5, гл. IV [11] следует, что если $V = V(D, \mathfrak{m})$ – векторное пространство над телом D с мощностью базиса (размерностью) $\mathfrak{m} > 1$, то решетка $L = L(D, \mathfrak{m})$ его подпространств является модулярной геометрической решеткой и ассоциированная с ней геометрия является невырожденной. Соответствующее проективное пространство обозначается через $\mathcal{P}(D, \mathfrak{m})$. Точками этого пространства являются одномерные подпространства, а прямыми – двумерные подпространства. Множество точек, как и выше, обозначаем через M, а множество прямых – через $\mathcal{P}$. Как сказано в § 5, гл. IV [11], в проективном пространстве $\mathcal{P}(D, \mathfrak{m})$, и в ассоциированной геометрии (M, $\overline{\ }$) выполняется теорема Дезарга, которая состоит в том, *grosso modo, что* для двух треугольников если существует такая биекция вершин одного треугольника на вершины другого, что три прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке, то три точки пересечения соответствующих сторон этих треугольников находятся на одной прямой.



$$x = (a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2),\ c_{01} = (a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1),$$
$$c_{02} = (a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2),\ c_{12} = (a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2).$$

Рис. 1.2.2

С теоремой Дезарга тесно связано аргово тождество, рассмотренное выше перед теоремой 7. Именно, из теоремы 8 § 5, гл. IV [11] получаем

Теорема 9. Модулярная геометрическая решетка является арговой тогда и только тогда, когда ассоциированная с ней проективная геометрия удовлетворяет теореме Дезарга. ◊

В связи с этим из теоремы 15 § 5, гл. IV [11] получаем.

Теорема 10. Пусть L – прямо неразложимая аргова геометрическая решетка, содержащая элементы высоты не менее трех. Тогда существует единственное (с точностью до изоморфизма) тело D и единственное кардинальное число $\mathbf{m}$ такое, что L изоморфна решетке $L(D, \mathbf{m})$ подпространств векторного пространства $V(D, \mathbf{m})$ над телом D размерности $\mathbf{m}$.

Такое тело D называем *связанным с решеткой* L. Приведем эскиз доказательства этой теоремы. Для построения тела D, исходя из решетки L, рассматривается соответствующее проективное пространство $(M, \mathcal{P})$, где $M = \mathcal{M}i\,L$ (точки), $\mathcal{P}$ – множество элементов высоты 2 (прямые). Зафиксируем некоторую прямую $p \in \mathcal{P}$ и выберем на ней три различные точки b_0, b_1, b_∞. Определим на множестве $D = p \setminus \{ b_\infty \}$ сложение и умножение, используя способ

Штаудта [11]. Предположим, что $x, y \in D$. Зафиксируем на прямой p две такие точки, что $b_0 \in u \vee v$. Далее рассмотрим точки $r = (x \vee u) \wedge (v \vee b_\infty)$ и $s = (x \vee b_\infty) \wedge (y \vee v)$. Тогда положим $x + y = (r \vee s) \wedge p$. Для задания произведения $x{\cdot}y$ выберем две различные точки $u \neq v$ вне прямой p такие, что $b_\infty \in u \vee v$.Определим $r = (b_1 \vee u) \wedge (v \vee y)$, $s = (b_0 \vee r) \wedge (u \vee x)$. Положим $x{\cdot}y = (s \vee u) \wedge p$. Эти действия иллюстрируются на рис. 1.2.3 и 1.2.4.: Утверждается, что алгебра $(D, +, \cdot)$ является телом с нулем b_0 и единицей b_1.

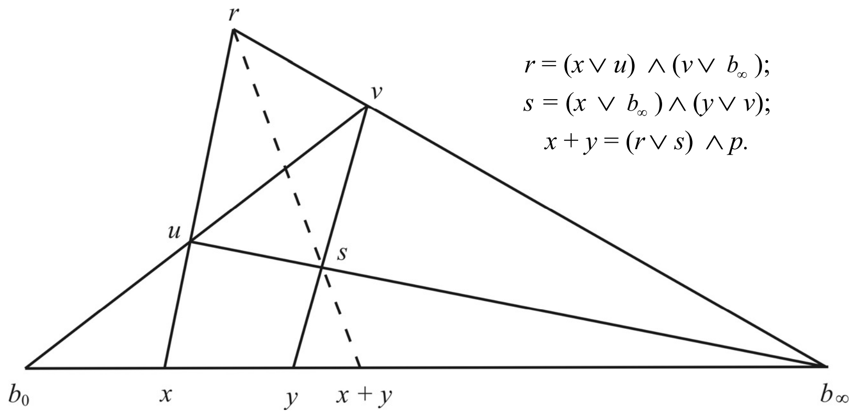


Рис. 1.2.3

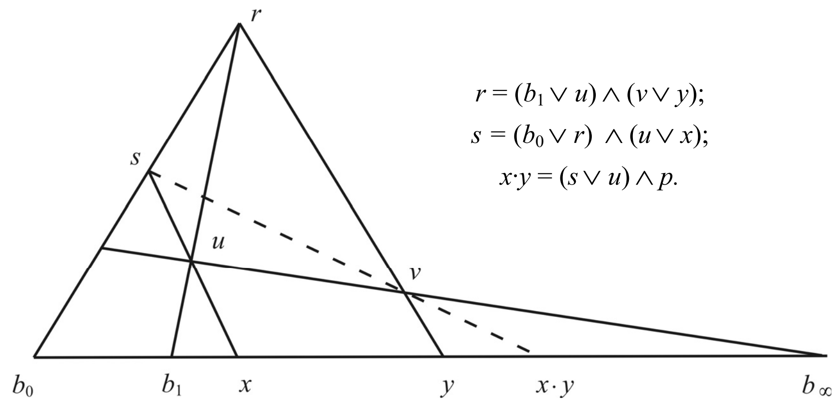


Рис. 1.2.4

Теперь для построения векторного пространства $V = V(D, \mathfrak{m})$ выберем максимальное независимое множество M атомов решетки L. (независимость M означает, что для любых двух не пересекающихся подмножеств $X, Y \subseteq M$ имеет место равенство $(\vee X) \wedge (\vee Y) = \varnothing$). Положим $\mathfrak{m} = |M|$. Рассмотрим векторное пространство $V = V(D, \mathbf{m})$. Это векторное пространство представляем как векторное пространство отображений из M в D с конечным носителем и с поаргументным сложением и умножением на скаляр**.** Решетка его подпространств обозначается через $L(D, \mathbf{m})$. Далее строится изоморфизм решетки L на $L(D, \mathbf{m})$. Для этого каждому атому $x \in M$ поставим в соответствие отображение $d_x : M \to D$ следующим ниже способом.

Зафиксируем точки $u, v \in M$, $u \neq v$, и положим $p = u \vee v$. Выберем точку $t \leq p$ так, чтобы $t \neq u$ и $t \neq v$. Определим, как и выше, тело D на прямой p так, чтобы u представлял нуль, v представлял единицу тела D, а элементу t отвечал символ бесконечности. Теперь для любого атома $y \in M \setminus \{u, v\}$ зафиксируем точку y_1 на прямой $u \vee y$ так, чтобы $y_1 \notin \{u, y\}$. В этом случае соответствие $\psi_y : x \mapsto (x \vee ((v \vee y) \wedge (t \vee y_1)) \wedge p$ задает биекцию прямой $u \vee y$ на прямую p так, что и $\psi_y : (u) = u$ и $\psi_y(y_1) = t$. Определим теперь отображение $d_x : M \to D$ для любой точки $x \in M$. Предположим сначала, что x не мажорируется элементом $\bigvee M \setminus \{u\}$ решетки L и в то же время $x \leq \bigvee M_1$ для некоторого $M_1 \in FinM$ и пусть M_1 – минимальное подмножество множества M с этим свойством. Согласно предположению $u \in M_1$. Положим $d_x(u) = 1$ (единица тела D) и для $s \in M \setminus M_1$ $d_x(s) = 0$ (нуль тела D). Для $s \in M_1 \setminus \{u\}$ положим

$$d_x(s) = \psi_s((x \vee \bigvee M_1 \setminus \{u\}) \wedge (u \vee y)) \in D.$$

В случае $x \leq \bigvee M \setminus \{u\}$ пусть $x \leq \bigvee M_1$, где $M_1 \in FinM$ и M_1 – минимальное подмножество множества M с этим свойством. По предположению $u \notin M_1$. Пусть $s \in M \setminus \{u, x\}$ и $s \leq u \vee x$. Тогда s не мажорируется элементом $\bigvee M \setminus \{u\}$ решетки L. Отсюда следует, что отображение уже определено. Положим для $y \in M$ $d_x(y) = d_s(y)$, если $y \neq u$, и $d_x(y) = 0$, если $y = u$. Утверждается, что $d_x \in V(D, \mathbf{m})$ и соответствие $x \mapsto d_x$ есть отображение множества M на множество отображений из $L(D, \mathbf{m})$, представляющих атомы этой решетки, причем оно сохраняет коллинеарность точек (т. е. принадлежность одной прямой). Отсюда следует, что оно может быть продолжено до изоморфизма решетки L на решетку $L(D, \mathbf{m})$. ◊

1.3. Теоремы о гомоморфизмах

В данном пункте рассматриваем категорию $\mathcal{Z}$, которая, как сказано выше, означает либо категорию К-*Mod* , либо категорию $\mathcal{K}_0$. Как уже отмечено в п. 1.1, каждую алгебру из $\mathcal{Z}$ можно рассматривать как Ω -группу, поэтому в категории $\mathcal{Z}$ выполняются теоремы о гомоморфизмах, сформулированные ниже.*Eo ipso,* категория $\mathcal{Z}$ является нормальной Если $\varphi \in Hom(A, B)$, то это записываем так же, как $\varphi : A \to B$. Далее, $Ker\varphi$ = $= \varphi^{-1}(0)$ – ядро гомоморфизма φ, $Im\varphi = \varphi(A)$ – образ гомоморфизма φ. Если $J \in \Im(A)$, то через ν_J обозначается естественный гомоморфизм *m*-алгебры A на фактор-*m*-алгебру A / J, где для $a \in A$ $\nu_J(a) = a + J$. Через $Sub_J A$ обозначается подрешетка $\uparrow J$ решетки $SubA$ Соотношение $A \approx B$ означает, что *m*-алгебры A и B изоморфны.

Теорема 1. (Первая теорема о гомоморфизмах). Пусть $\varphi \in Hom(A, B)$. Тогда $A / Ker\varphi \approx Im\varphi$. ◊

Теорема 2. (Вторая теорема о гомоморфизмах). Пусть $J \in \Im(A)$. Тогда соответствие $\nu_J^{-1} : C \mapsto \nu_J^{-1}(C)$, которое относит каждой под-*m*-алгебре $C \in Sub(A / J)$ ее прообраз при естественном гомоморфизме $\nu_J^{-1} : A \to A / J$, является изоморфизмом решетки $Sub(A / J)$ на решетку $Sub_J A$. При этом решетка $\Im(A / J)$ изоморфно отображается на решетку $Sub_J A \cap \Im(A)$. ◊

Лемма 1. Пусть $J \in \Im(A)$, $C \in SubA$. Тогда $J + C \in SubA$ и $J \cap C \in \Im(C)$. ◊

Теорема 3. (Третья теорема о гомоморфизмах). В обозначениях леммы 1 $(J + C) / J \approx C / (J \cap C)$. ◊

Теорема 4. (Четвертая теорема о гомоморфизмах).

Пусть $I, J \in \Im(A)$ и $I \subseteq J$. Тогда существует единственный гомоморфизм τ алгебры A / I на *m*-алгебру A / J такой, что $\tau \circ \nu_I = \nu_I$. При этом τ индуцирует изоморфизм τ' фактор-*m*-алгебры $(A / I) / (J / I)$ на фактор-*m*-алгебру A / J такой, что $\tau = \tau' \circ \nu_{J/I}$.◊

Теорема 5. (Лемма Цассенхауза). Пусть B, B', C, $C' \in SubA$, причем $B' \in \Im(B)$, $C' \in \Im(C)$. Тогда

$$B' + (C' \cap B) \in \Im(B' + (C \cap B)),\ C' + (C \cap B') \in \Im(C' + (C \cap B))$$

и

$$(B' + (C \cap B)) / (B' + (C' \cap B)) \approx (C' + (C \cap B)) / (C' + (C \cap B')).\ ◊$$

1.4. Нормальные ряды

Пусть A есть m-алгебра и B, $C \in SubA$. Пару (B, C) назовем *нормальной*, если $B \in \Im(C)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Последовательность под-m-алгебр (где $n \in \mathbb{N}$)

$$B = A_0 \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq A_n = C \tag{1.4.1}$$

называем *нормальным рядом*, *соединяющим* B с C. Число n называется *длиной ряда* (1.4.1). Если $B = 0$, то под-m-алгебру C называем *достижимой снизу*, а ряд (1.4.1) – *нормальным рядом для* C. Если $C = A$, то под-m-алгебру B называем *достижимой сверху*. Для каждого $i = 0, 1, 2,\ldots, n$ под-m-алгебру A_i называем *членом ряда* (1.4.1), а при $i = 0, 1, 2,\ldots, n$ фактор-m-алгебру A_{i-1}/A_i называем *фактором ряда* (1.4.1). Подкласс класса $\mathcal{Z}$, состоящий из m-алгебр, изоморфных идеалам m-алгебры A, обозначаем через Υ_{1A}, а подкласс класса $\mathcal{Z}$, состоящий из m-алгебр, изоморфных достижимым сверху под-m-алгебрам m-алгебры A, обозначаем через Υ_A. Если $\mathcal{M}$ – подкласс класса $\mathcal{Z}$, то через $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ (соответственно через $\Upsilon_{1\mathcal{M}}$) обозначаем объединение классов вида Υ_A (соответственно вида Υ_{1A}), где A – m-алгебра из класса $\mathcal{M}$.

Нормальный ряд

$$0 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq B_n = B \tag{1.4.2}$$

называется *уплотнением ряда* (1.4.1), если каждый член ряда (1.4.1) является членом ряда (1.4.2). Ряд (1.4.1) называется *рядом без повторений*, если все члены этого ряда различны. Ряд без повторений и не имеющий уплотнений, кроме него самого, называется *композиционным*. В частности, если каждый фактор этого ряда является простой m-алгеброй. m-алгебра A, обладающая композиционным рядом, называется *m-алгеброй конечной длины* (или говорят, что m-алгебра A имеет *конечную длину*). Два нормальных ряда без повторений считаются *изоморфными*, если их длины равны и между членами этих рядов можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, что соответствующие факторы изоморфны.

Так как категория $\mathcal{Z}$ нормальна, то имеет место аналог теоремы Шрейера.

Теорема 1. Пусть B – произвольная достижимая под-m-алгебра m-алгебры A. Тогда любые два нормальных ряда для B обладают изоморфными уплотнениями. ◊

С л е д с т в и е 1. Пусть достижимая под-m-алгебра B m-алгебры A обладает композиционным рядом. Тогда любые два композиционных ряда для B изоморфны и каждый нормальный ряд для B можно уплотнить до композиционного. ◊

Если все члены ряда (1.4.1) являются идеалами m-алгебры A, то такой ряд называется *инвариантным*. Инвариантный ряд без повторений и не имеющий уплотнений, кроме него самого, называется *главным*. m-алгебра, обладающая главным рядом, называется *m-алгеброй идеальной конечной длины* (или *m-алгебра A имеет конечную идеальную длину*). Как и в любой нормальной категории, в категории $\mathcal{Z}$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть A есть m-алгебра. Любые два инвариантных ряда для m-алгебры A из категории $\mathcal{Z}$ обладают изоморфными уплотнениями. ◊

Следствие 2. Пусть m-алгебра A обладает главными рядами. Тогда любые два главных ряда изоморфны и каждый инвариантный ряд для A можно уплотнить до главного ряда. ◊

Нам понадобятся также бесконечные ряды. Именно *идеальный ряд* [1] *для m-алгебры A* − это цепь ее идеалов

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq \ldots \subseteq A_\gamma = A, \qquad (1.4.3)$$

где α − порядковые числа и на предельных местах стоят объединения всех предшествующих идеалов. *Факторы ряда* (1.4.3) − это фактор-m-алгебры вида $A_{\alpha+1}/A_\alpha$.

§ 2. СВОБОДНЫЕ *m*-АЛГЕБРЫ. ПРЯМЫЕ И СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

2.1. Свободные К-модули

Как уже отмечалось, каждый К-модуль A в случае нуль-симметричного m-кольца К, а также каждое m-кольцо можно рассматривать как Ω-группу. Свободные m-алгебры многообразия $\mathcal{K}$ (т. е. свободные m-кольца) рассматривались в § 2 книги [39]. Аналогично строятся свободные m-алгебры многообразия $\mathcal{K}_0$ с добавлением тождества $x \circ 0 = 0$. Обратимся к случаю $\mathcal{Z}$ = К-*Mod*. Это − многообразие универсальных алгебр с операциями $\{ +, -, \cdot, 0, \{ x\square - \}_{x \in \mathrm{K}}\}$, задаваемое, кроме тождеств многообразия ассоциативных колец, еще тождествами (где a, b, c – переменные, x и y – элементы из К).

K1. $(x + y)\square a = x\square a + y\square a$;
K2. $(xy)\square a = (x\square a)(y\square a)$;
K3. $(x\circ y)\square a = (x\square(y\square a))$;
K4. $x\square 0 = 0$.

Как и всякое многообразие, категория К-*Mod* обладает свободными алгебрами, обозначаемыми далее через $F_{\text{K}}(X)$, где X – множество свободных образующих. К-модуль $F_{\text{K}}(X)$ обладает тем свойством, что для любого К-модуля A и любого отображения φ из X в A существует единственный гомоморфизм $\widetilde{\varphi}$ К-модуля $F_{\text{K}}(X)$ в К-модуля A такой, что $\widetilde{\varphi}\,|_X = \varphi$.

Свободный К-модуль $F_{\text{K}}(X)$ можно получить построением термов по способу [42] следующим образом. Сначала строим множество S_X термов по правилам :

F1. 0 есть терм и, если $a \in X$, то a есть терм.

F2. Если p и q – термы, и $x \in$ К, то $(p + q)$, $(p - q)$ (pq), $(x\square p)$ – тоже термы.

F3. Других термов нет.

Далее рассматриваем операции на S_X сложения “+”, вычитания “ – ”, умножения “ · ”, действия “ $x\square$ – ” элементом $x \in$ К на элементы из S_X . Именно, если $p, q \in S_X$ и $x \in$ К, то полагаем $p + q = (p + q)$, $p - q = (p - q)$, $p\cdot q = (pq)$, $x\square p = (x\square p)$. Далее вводим конгруэцию θ на S_X , порожденную парами вида (u, v), где $u = v$ – тождества из вышеозначенного списка. После этого положим $F_{\text{K}}(X) = S_X/\,\theta$.

Как и для любых многообразий алгебр, имеет место следующее

Следствие 1. Всякий К-модуль есть гомоморфный образ некоторого свободного К-модуля. ◊

2.2. Прямые произведения и прямые суммы

Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – произвольное семейство m-алгебр с непустым множеством индексов I. Будем рассматривать его декартово произведение

$$\text{A} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}\ (\pi_{\text{i}}). \qquad (2.2.1)$$

Для $i \in I$ естественная проекция π_i – сюръективный гомоморфизм m-алгебры A на A_i. Для $f \in A$ множество $\{\ i \in I \mid f\,(i) \neq 0\ \}$ назовем *носителем элемента f.* и будем его обозначать через *supp*(f).

В частности, если З = К-*Mod*, то A является декартовым произведением семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ колец $(A_i, +, \cdot)$. и для любого $x \in$ К, и для любых $a_i \in A_i$ и $i \in I$.

$$x\square(a_i)_{i\in I} = (x\square a_i)_{i\in I}\,. \tag{2.2.2}$$

Ясно, что декартово произведение (2.2.1) есть универсальный объект [35] в категории диаграмм вида рис. 2.2.1 (или предел таких диаграмм).

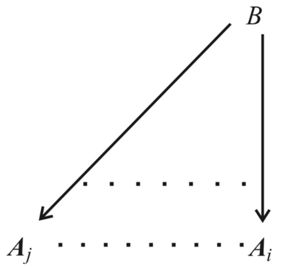


Рис. 2.2.1

Класс $\mathcal{G}$ *m*-алгебр называется *декартово замкнутым*, если ему принадлежит декартово произведение любого семейства *m*-алгебр из класса $\mathcal{G}$. Как уже отмечалось, при наших предположениях категория З представляет собой многообразие Ω-групп и, таким образом, является декартово замкнутым классом (в классе всех Ω-групп).

Замечание 1. В случае $I = \varnothing$ полагаем $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \{0\}$ – нулевая *m*-алгебра.◊

Ясно, что множество элементов из A с конечными носителями образует под-*m*-алгебру $\tilde{A}$ декартова произведения (2.2.1). Эта *m*-алгебра называется *прямым произведением семейства* $\{A_i\}_{i\in I}$ *m*-алгебр и обозначается

$$\tilde{A} = \prod_{i\in I} A_i \ \ (\tilde{\pi}_i, \rho_i)). \tag{2.2.3}$$

Здесь снова для $i \in I$ $\tilde{\pi}_i = \pi_i|_{\tilde{A}}$: $\tilde{A} \to A_i$, естественная проекция, а ρ_i: $A_i \to \tilde{A}$ – вложение *m*-алгебры A_i (естественные вложения) в $\tilde{A}$. При этом выполняются соотношения : для $i, j \in I$

$$\tilde{\pi}_i \circ \rho_i = \begin{cases} c_0 & , \text{ если } \ i \neq j, \\ IdA_i & , \text{ если } \ i = j. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Для ненулевого элемента $a \in \tilde{A}$ положим I_a = $supp(f)$ – носитель элемента . Тогда имеем

$$a = \sum_{i \in I_a} (\rho_i \circ \tilde{\pi}_{\mathrm{i}})(a). \tag{2.2.5}$$

Далее вместо $\tilde{\pi}_{\mathrm{i}}$ чаще будем писать просто π, если это не вызовет путаницы. Отметим, что в случае конечного множества индексов I (и только в этом случае) понятия декартова произведения и прямого произведения совпадают. Тогда употребляется обозначение $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, если $n \in \mathbb{N}$, $I = \{1, 2,\ldots, n\}$. Класс $\mathcal{G}$ m-алгебр называется $\times$ *-замкнутым*, если ему принадлежит декартово произведение любого конечного семейства m-алгебр из класса $\mathcal{G}$.

Обратимся теперь к близкому понятию прямой суммы под-m-алгебр. Пусть A есть некоторая m-алгебра и $\{A_i\}_{i \in I}$ – некоторое семейство его под-m-алгебр. Будем говорить, что A есть *прямая сумма* этого *семейства под-m-алгебр* (обозначение :

$$A = \sum\nolimits_{i \in I}^{\oplus} A_i \text{ }), \tag{2.2.6}$$

если выполняются следующие условия:

а) под-m-алгебры A_i являются идеалами m-алгебры A;

б) каждый элемент $a \in A$ единственным образом с точностью до удаления или добавления нулевых слагаемых представляется в виде

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n , \tag{2.2.7}$$

где $n \in \mathbb{N}$; $a_1 \in A_{i_1}$, $a_2 \in A_{i_2}$,…, $a_n \in A_{i_n}$; $i_1, i_2,\ldots, i_n$ – различные индексы из I.

в) если $\mathcal{Z}$ = К-*Mod*, $x \in$ К и элемент $a \in A$ представлен в виде (2.2.7), то

$$x \square a = x \square a_1 + x \square a_2 + \ldots x \square a_n, \tag{2.2.8}$$

а если $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$, элементы a, $b \in A$ имеют разложения $a = \sum_{j \in J} a_j$, $b = \sum_{j \in J} b_j$ в виде сумм элементов m-колец из семейства $\{A_i\}_{i \in I}$, где $J \in FinI$, то $a \circ b = \sum_{j \in J} a_j \circ b_j$.

Заметим, что ввиду условия а) мы можем говорить о *прямой сумме семейства идеалов* $\{A_i\}_{i \in I}$ *m-алгебры A*. В случае конечного множества = $\{1, 2,\ldots, n\}$ употребляем также запись $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$.

С л е д с т в и е 1. Пусть

$$A = \sum_{i \in I} A_i \text{ } – \tag{2.2.9}$$

представление m-алгебры A в виде суммы семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ своих идеалов. Тогда эта сумма является прямой в том и только в том случае, когда для любого $i \in I$ выполняется равенство

$$\sum_{j\in I, j\neq i} A_j \cap A_i = 0. \qquad (2.2.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как прямая сумма идеалов m-алгебры A является одновременно (условие б)) прямой суммой идеалов кольца $(A, +, \cdot)$, то равенство (2.2.9) должно выполняться для любого $i \in I$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть равенство (2.2.9) выполняется для любого $i \in I$. Тогда условия а) и б) прямой суммы очевидно выполняются. Проверим условие в) в случае, когда $\mathcal{З}$ = К-*Mod*. Предположим, что элемент $a \in A$ представляется в виде (2.2.7), где $n \in \mathbb{N}$; $a_1 \in A_{i_1}$, $a_2 \in A_{i_2}$,…, $a_n \in A_{i_n}$; $i_1, i_2,\ldots, i_n$ – различные индексы из I . Пусть $x \in$ К. Требуется доказать равенство (2.2.8). Будем пользоваться индукцией по числу n. Сначала пусть $n = 2$. Так как $A_{i_1} \in StA$, то

$$x\Box a - x\Box a_1 - x\Box a_2 = (x\Box\,(a_1 + a_2) - x\Box a_2) - x\Box a \in A_{i_1} - A_{i_1} \subseteq A_{i_1}.$$

Аналогично, $x\Box a - x\Box a_1 - x\Box a_2 \in A_{i_1}$, а так как согласно (2.2.9) $A_{i_1} \cap A_{i_2} = 0$, то $x\Box a - x\Box a_1 - x\Box a_2 = 0$ и $x\Box a = x\Box a_1 + x\Box a_2$.

Пусть теперь $n > 2$ и предположим, что утверждение в) верно, когда число слагаемых в равенстве (2.2.8) меньше n. Положим $b = a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}$. Так как согласно (2.2.10) $(A_{i_1} + A_{i_2} + \ldots + A_{i_{n+1}}) \cap A_{i_n} = 0$, то как и выше, доказывается, что $x\Box a = x\Box b + x\Box a_n$. Теперь по предположению индукции

$$x\Box a = x\Box\,(a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}) + x\Box a_n = (x\Box a_1 + x\Box a_2 + \ldots +$$
$$+\, x\Box a_{n-1}) + x\Box a_{n-1} = x\Box a_1 + x\Box a_2 + \ldots x\Box a_n,$$

что и требовалось. Аналогично рассматривается случай в), если $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$.◊

Выделим отдельно случай $n = 2$. Именно, имеет место

С л е д с т в и е 2. Пусть A есть m-алгебра из $\mathcal{З}$ и B, $C \in \mathfrak{I}(A)$. Тогда $B + C = B \oplus C \Leftrightarrow B \cap C = 0$. ◊

Связь между понятиями прямого произведения и прямой суммы выражает следующее утверждение

Предложение 1. Пусть

$$A = \prod_{i\in I} A_i \ \ (\pi_i, \rho_i) - \qquad (2.2.11)$$

прямое произведение m-алгебр семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. Тогда A является прямой суммой семейства своих под-m-алгебр $\{\rho_i(A_i)\}_{i \in I}$, соответственно изоморфным исходным алгебрам A_i. Обратно, если $A = \sum_{i\in I}^{\oplus} A_i$ – прямая сумма, то алгебра A изоморфна прямому произведению семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ m-алгебр.

Доказательство. Пусть A есть прямая сумма семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ своих под-m-алгебр. Составим соответствующее прямое произведение (2.2.3) семейства m-алгебр $\{A_i\}_{i \in I}$. Согласно условию б) каждый элемент $a \in A$ определяет последовательность своих ненулевых компонент однозначно, и это соответствие задает изоморфизм кольца A на кольцо $\tilde{A} = \prod_{i\in I} A_i$ (π_i, ρ_i). То, что это – изоморфизм m-алгебр, следует из условия в). Обратно, при наличии прямого произведения (2.2.3) нетрудно убедиться, что $\tilde{A}$ есть прямая сумма семейства $\{\rho_i(A_i)\}_{i \in I}$ своих под-m-алгебр, изоморфным соответствующим исходным m-алгебрам A_i. ◊

В обозначениях предложения 1 гомоморфизм $\tilde{A} \to A_j$, соответствующий естественной проекции $\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ будем также обозначать через π_i и называть *естественной проекцией прямой суммы.*

Следствие 3. Пусть A является прямой суммой семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ под-m-алгебр. Для каждого $i \in I$ идеалы m-алгебры A_i являются идеалами m-алгебры A.

Доказательство. Пусть $i \in I$ и $B \in \Im(A_i)$. Очевидно, что B является идеалом кольца $(A, +, \cdot)$. Пусть теперь $a \in A$, $b \in B$, $x \in$ К и a представлен в виде (2.2.7) суммы своих компонент. Не нарушая общности, можно считать, что $i = i_1$. Используя условие в), а также то, что B стабилен в A_i, имеем в случае $\mathcal{Z} =$ К-Mod

$$x\square(b + a) - x\square a = x\square((b + a_1) + a_2 + \ldots + + a_n) -$$
$$- x\square(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = x\square(b + a_1) + x\square a_2 + + x\square a_n -$$
$$- x\square a_1 x\square a_2 - \ldots - x\square a_n = x\square(b + a_1) - x\square a_1 \in B.$$

Следовательно, B стабилен в A и $B \in StA = \Im(A)$.

Рассмотрим теперь возможность $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$. Пусть $x \in A$. Можно считать, что x имеет разложение $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $n \in \mathbb{N}$; $x_1 \in A_{i_1}$, $x_2 \in A_{i_2}, \ldots$, $x_n \in A_{i_n}$. Используя условие в) и стабильность слева идеала B кольца $(A, +, \cdot)$, имеем

$$x\circ(b + a) - x\circ a = x_1\circ((b + a_1) + x_2\circ a_2 + x_n\circ a_n) - x_1\circ(a_1 + x_2\circ a_2 + \ldots + x_n\circ a_n) =$$
$$= x_1\circ\ b + a_1) - x_1\circ a_1 \in B.$$

Следовательно, B стабильно слева в A. При тех же предположениях

$$b\circ a = b\circ(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = b\circ a_1 + 0\circ a_2 + \ldots + 0\circ a_n = b\circ a_1 \in B.$$

Значит, $B \in \Im(A)$.◊

С л е д с т в и е 4. Пусть $A = B \times C$, $I \in \Im(B)$, $J \in \Im(C)$. Тогда

$$I \times J \in \Im(A) \text{ и } A/(I \times J) \approx (B/I) \times (C/J).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $I \times J \trianglelefteq B \times C$. Очевидно, соответствие $(b, c) + (I \times J) \mapsto (b + I, c + J)$, где $b \in B$, $c \in C$, является изоморфизмом m-алгебры $A/(I \times J)$ на m-алгебру $(B/I) \times (C/J)$. ◊

Предложение 2. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – семейство под-m-алгебр m-алгебры A и пусть

$$A = \bigvee_{i \in I} A_i . \tag{2.2.12}$$

Тогда A является прямой суммой семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ своих под-m-алгебр в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:

1) кольцо $(A, +, \cdot)$ является прямой суммой семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ своих подколец.

2) для каждого $i \in I$ под-m-алгебра A_i есть образ некоторого эндоморфизма ψ_i m-алгебры A, причем для любых $i, j \in I$ выполняется равенство

$$\psi_i \circ \psi_j = \begin{cases} c_0 & , \text{ если } \ i \neq j, \\ \psi_i & , \text{ если } \ i = j. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть имеет место разложение (2.2.6) и для каждого $i \in I$ ψ_i есть естественная проекция m-алгебры A на под-m-алгебру A_i. Ясно, что ψ_i являются эндоморфизмами m-алгебры A и для них выполняются соотношения (2.2.11). Выполнение (1) следует из условий а) и б) прямой суммы. Так как решетка $\Im(A)$ есть полная подрешетка решетки $SubA$, то равенство (2.2.12) следует из (2.2.6).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предполагаем, что условия (1), (2) для семейства $\{A_i\}_{i \in I}$, а также равенство (2.2.12) выполняются. Пусть $i \in I$. Сначала покажем, что A_i является идеалом m-алгебры A. В самом деле, из условия (1) следует, что A_i есть идеал кольца $(A, +, \cdot)$. Далее, из условия (2) получаем, что $Im\,\psi_i = A_i$ и ввиду идемпотентности ψ_i для каждого $a \in A$

$$a \in A_i \Leftrightarrow \psi_i(a) = a. \tag{2.2.14}$$

Пусть теперь $j \in I$ и $j \neq i$. Если $a \in A_i$, то используя (2.2.13) и (2.2.14), получим $\psi_i\, \psi_j(a) = \psi_i(\psi_j(a)) = c_0(a) = 0$. Поэтому a находится в ядре любого эндоморфизма ψ_j, для которого $j \neq i$. Обратно, если $a \in \bigcap_{j \in I, j \neq i} Ker\psi_j$, то для любого индекса $j \neq i$ j-я компонента элемента a равна нулю, поэтому $a \in A_i$. Мы приходим к равенству

$$A_i = \bigcap_{j \in I, j \neq i} Ker\psi_j\ , \tag{2.2.15}$$

которое показывает, что A_i является идеалом m-алгебры A как пересечение ядер некоторых гомоморфизмов. Условие а) прямой суммы выполнено. Из этого и из (2.2.12) следует, что кольцо (A, +, ·) является суммой своих идеалов семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. Таким образом, каждый элемент из A может быть представлен в виде суммы элементов из этих идеалов.

Для доказательства единственности такого представления достаточно доказать единственность представления нуля. Предположим, *е.а.,* что существуют попарно различные индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$ и элементы $a_1 \in A_{i_1}, a_2 \in A_{i_2}, \ldots, a_n \in A_{i_n}$ такие, что

$$0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{2.2.16}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $a_1 \neq 0$. Тогда, применяя (2.2.14) и (2.2.15), из (2.2.16), полагая $i = i_1$, выводим

$$0 = \psi_i(0) = \psi_i(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \psi_i(a_1) + \psi_i(a_2) + \ldots + \psi_i(a_n) =$$

$$= \psi_i(a_1) + 0 + \ldots + 0 = a_1.$$

Противоречие показывает, что разложение (2.2.14) и (2.2.7) единственно. Условие б) прямой суммы выполнено.

Из этого следует,что кольцо (A, +, ·) является прямой суммой семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ своих идеалов и эндоморфизмы ψ_i в контексте предложения 1 выполняют роль естественных проекций прямого произведения колец, а естественные вложение ρ_i – это вложение идеала A_i в кольцо A. Значит, по формуле (2.2.5) для любого ненулевого $a \in A$ имеем разложение

$$a = \sum_{i \in I_a} \psi_i(a), \tag{2.2.17}$$

где $\psi_i(a) \in A_i$ – компоненты разложения. Рассмотрим сначала случай $\mathfrak{Z}$ = = К-*Mod.* Пусть $x \in$ К. Если $j \in I \setminus I_a$, то $\psi_j(a) = 0$, поэтому $\psi_j(x\square a) =$ $= x\square\psi_j(a) = x\square 0 = 0$. Отсюда следует, что $I_{x\square a} \subseteq I_a$ и согласно (2.2.15) $x\square a = \sum_{i \in I_a} \psi_i(x\square a) = \sum_{i \in I_a} x\square(\psi_j(a))$, что и требовалось для установления свойства в). Таким образом, К-модуль A является прямой суммой семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ своих подмодулей.

Далее обратимся к случаю $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$. Тогда для $a, b \in A$ имеются разложения $a = \sum_{j \in J} \psi_j(a)$, $b = \sum_{j \in J} \psi_j(b)$, такие, что $J \in FinI$ и $I_{a \circ b} \subseteq J$. Для $j \in J$ ввиду того, что ψ_j – эндоморфизм m-кольца A, имеем $\psi_j(a \circ b) = \psi_j(a) \circ \psi_j(b)$. Отсюда согласно (2.2.17) имеем $a \circ b = \sum_{j \in J} \psi_j(a) \circ \psi_j(b)$. Значит, и в этом случае условие в) выполняется и m-кольцо A разлагается в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. Достаточность доказана. Предложение доказано. ◊

Некоторое добавление к этой информации о конечных разложениях доставляет следующее:

Предложение 3. (Теорема 6.15, гл. II [19]). Пусть m-алгебра A представлена в виде прямого произведения алгебр

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{2.2.18}$$

с естественными проекциями $\pi_i : A \to A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда идеалы $\overline{A_i} = Ker\,\pi_i$ удовлетворяют условиям

$$\text{a)}\ \bigcap_{j \neq i} \overline{A_j} + \overline{A_i} = A, \tag{2.2.19}$$

$$\text{b)}\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n} = 0, \tag{2.2.20}$$

Обратно, если идеалы $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ удовлетворяют условиям (2.2.17) и (2.2.18), то m-алгебра A изоморфна прямому произведению m-алгебр $A_i \approx A / \overline{A_i}$. ◊

В дальнейших рассмотрениях большую роль будет играть понятие ретракта m-алгебры, тесно связанное с его эндоморфизмами. Именно под-m-алгебра B m-алгебры A называется ее *ретрактом*, если она является образом ее идемпотентного эндоморфизма. *Прямыми слагаемыми m-алгебры* считаются те ее под-m-алгебры, которые участвуют в качестве компонент ее разложения в прямую сумму под-m-алгебр. Из предложения 2 сразу следует

С л е д с т в и е 5. Всякое прямое слагаемое m-алгебры есть его идеал, который является ретрактом этой m-алгебры. ◊

m-алгебра $A \neq 0$ называется *прямо неразложимой*, если любое его прямое слагаемое – тривиальный идеал, т. е. либо равен A, либо равен 0. В противном случае она называется *прямо разложимой*. Как следует из предложения 2 эти свойства тесно связаны с существованием некоторых эндоморфизмов m-алгебры A (множество всех эндоморфизмов m-алгебры A в дальнейшем обозначать будем через $EndA$). В случае $\mathcal{З}$ = К-*Mod* это уточняется следующим утверждением:

Предложение 4. Пусть К есть m-кольцо и A − К-модуль. Для того чтобы К-модуль A был прямо разложим, необходимо и достаточно, чтобы существовал эндоморфизм $\varepsilon \in End_{K}A$, удовлетворяющий условиям :

1°. $\varepsilon \neq IdA$, $\varepsilon \neq c_0$;

2°. $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$;

3°. $\forall x \in K \, \forall a \in A \, (x\square(a - \varepsilon(a)) = x\square a - x\square \varepsilon(a))$:

4°. $\forall a, b \in A \, (\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A есть К-модуль, $B, C \in StA$ и $A = B \oplus C$, где $B \neq 0$, $C \neq 0$. Следуя доказательству предложения 2, положим $\varepsilon = \psi_1 : A \to B$ – естественная проекция К-модуля A на первое слагаемое, $\psi_2 : A \to C$ – естественная проекция К-модуля A на второе слагаемое. Тогда соотношения 1° и 2° очевидны. Для $a \in A$ согласно (2.2.15) имеем $a = \psi_1(a) + \psi_2(a) = \varepsilon(a) + (a - \varepsilon(a))$, поэтому $\psi_2(a) = a - \varepsilon(a)$ и $x\square(a - \varepsilon(a)) = x\square a - x\square \varepsilon(a)$ благодаря свойству в) прямой суммы. Так что 3° выполняется. Пусть теперь a, $b \in A$. Согласно следствию 2 $BC \subseteq B \cap C = 0$, поэтому

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon((\psi_1(a) + \psi_2(a))(\psi_1(b) + \psi_2(b))) = \varepsilon(\psi_1(a)\psi_1(b) +$$

$$+ \psi_1(a)\psi_2(b) + \psi_2(a)\psi_1(b) + \psi_2(a)\psi_2(b)) = \varepsilon(\psi_1(a)(\psi_1(b) +$$

$$+ \psi_2(a)\psi_2(b)) = \psi_1(a)\psi_1(b) = \psi_1(a)\psi_1(b) + \psi_1(a)\psi_2(b) =$$

$$= \psi_1(a)(\psi_1(b) + \psi_2(b)) = \varepsilon(a)b.$$

4° доказано. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для эндоморфизма ε выполняются условия 1°–4°. Положим $\psi_1 = \varepsilon$ и для любого $a \in A$ $\psi_2(a) = a - \varepsilon(a)$. Из условия 2° следует, что ψ_1 – идемпотентный эндоморфизм К-модуля A. То же самое докажем относительно ψ_2. Для этого предположим, что a, $b \in A$, $x \in K$ и, воспользовавшись 4°, 3°, 2° и свойствами ε как эндоморфизма, получим

$$\psi_2(a) + \psi_2(b) = a - \varepsilon(a) + b - \varepsilon(b) = a + b - \varepsilon(a + b) = \psi_2(a + b),$$

$$\psi_2(a)\,\psi_2(b) = (a - \varepsilon(a))(b - \varepsilon(b)) = a\,b - \varepsilon(a)b - a\,\varepsilon(b) + \varepsilon(a)\,\varepsilon(b) =$$

$$= a\,b - \varepsilon(ab) - \varepsilon(a\,b) + + \varepsilon(ab) = a\,b - \varepsilon(ab) = \psi_2(ab), x\square \psi_2(a) =$$

$$= x\square(a - \varepsilon(a)) = x\square a - x\square \varepsilon(a) = x\square a - \varepsilon(x\square a) = \psi_2(x\square a),$$

$$\psi_2(\psi_2(a)) = \psi_2(a) - \varepsilon(\psi_2(a)) = a - \varepsilon(a) - \varepsilon(a - \varepsilon(a)) = a - \varepsilon(a) -$$

$$- \varepsilon(a) + \varepsilon(\varepsilon(a)) = a - \varepsilon(a) - \varepsilon(a) + \varepsilon(a) = a - \varepsilon(a) = \psi_2(a).$$

Это означает, что ψ_2 – идемпотентный эндоморфизм K-модуля A. Для того чтобы подтвердить выполнение условия (2) предложения 2 для эндоморфизмов ψ_1 и ψ_2, осталось проверить равенства

$$\psi_1 \circ \psi_2 = \psi_2 \circ \psi_1 = c_0. \tag{2.2.21}$$

Для этого предположим, что $a \in A$ и, снова воспользовавшись свойствами эндоморфизма ε, получим

$$(\psi_1 \circ \psi_2)(a) = \psi_1(\psi_2(a)) = \varepsilon(a - \varepsilon(a)) = \varepsilon(a) - \varepsilon(\varepsilon(a)) = \varepsilon(a) - \varepsilon(a) = 0,$$

$$(\psi_2 \circ \psi_1)(a) = \psi_2(\psi_1(a)) = \psi_1(a) - \varepsilon(\psi_1(a)) = \varepsilon(a) - \varepsilon(\varepsilon(a)) =$$

$$= \varepsilon(a) - \varepsilon(a) = 0,$$

и равенства (2.2.19) выполняются. Итак, условия (2) предложения 2 для эндоморфизмов ψ_1 и ψ_2 выполняются.

Теперь положим $B = Im\,\psi_1$, $C = Im\,\psi_2$. Так как для всякого $a \in A$ $a = \varepsilon(a) + (a - \varepsilon(a)) \in B + C$, поэтому

$$A = B + C. \tag{2.2.22}$$

Далее, из (2.2.21) следует, что $B = Im\,\psi_1 \subseteq Ker\,\psi_2$ и $C = Im\,\psi_2 \subseteq Ker\,\psi_1$. С другой стороны, если $a \in Ker\,\psi_2$, то $a - \varepsilon(a) = 0$ и $a = \varepsilon(a) \in B$, а если $a \in Ker\,\psi_1$, то $\varepsilon(a) = 0$ и $a = a - \varepsilon(a) \in C$. Значит, $B = Ker\,\psi_2$, $C = Ker\,\psi_1$ и оба подмодуля B и C являются идеалами K-модуля A. Эти идеалы ненулевые благодаря условию 1°. Так как эндоморфизм ψ_1 идемпотентен, то $B \cap C = Im\,\psi_1 \cap Ker\,\psi_1 = 0$, поэтому согласно следствию 2 или предложению 2 $A = B + C = B \oplus C$. Достаточность доказана. Предложение доказано. ◊

Аналог этого утверждения для случая $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$ читателю предлагается доказать самостоятельно.

У п р а ж н е н и е 1. Пусть A есть m-кольцо. Для того чтобы A было прямо разложимо, необходимо и достаточно, чтобы существовал эндоморфизм $\varepsilon \in EndA$, удовлетворяющий условиям :

1°. $\varepsilon \neq IdA$, $\varepsilon \neq c_0$;

2°. $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$;

3°. $\forall\, a, b \in A\ (a \circ (b - \varepsilon(b)) = a \circ b. - a \circ \varepsilon(b))$.

4°. $\forall\, a, b \in A\ (\varepsilon(a \circ b) = \varepsilon(a) \circ b = a \circ \varepsilon(b))$.

5°. $\forall\, a, b \in A\ (\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)b)$.◊

2.3. Полупрямые произведения

Пусть A есть m-алгебра, $B \in SubA$, $C \in \Im(A)$. m-алгебра A будет называться *полупрямым произведением подалгебры B и идеала C*, если выполняются следующие условия:

$$A = B + C\,;\, B \cap C = 0.$$

В этом случае пишем $A = B \rtimes C$.

З а м е ч а н и е 1. Согласно третьей теореме о гомоморфизмах в этом случае $A/C = (B + C)/C \approx (B/(B \cap C) = B/0 = B$, поэтому при данном C m-алгебра B определяется однозначно с точностью до изоморфизма.◊

Лемма 1. Пусть $B \in SubA$, $C \in \Im(A)$. Для того чтобы $A = B \rtimes C$, необходимо и достаточно, чтобы существовал идемпотентный эндоморфизм ε m-алгебры A такой, что $B = Im\,\varepsilon$ и $C = Ker\,\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $A = B \rtimes C$. Из условий (1) и (2) следует, что группа $(A, +)$ разлагается в прямую сумму подгрупп $(B, +)$ и $(C, +)$, значит, если $\varepsilon : A \to B$ – естественная проекция A на первую компоненту B, то ε – идемпотентный эндоморфизм группы $(A, +)$, причем $B = Im\,\varepsilon$ и $C = Ker\,\varepsilon$. Покажем, что ε является эндоморфизмом полугруппы $(A, \cdot)$. В самом деле, пусть $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$. Так как C − это идеал кольца $(A, +, \cdot)$, то

$$\varepsilon\,((b_1 + c_1)(b_2 + c_2)) = \varepsilon\,((b_1b_2) + (b_1c_2 + c_1(b_2 + c_2))) = b_1b_2 =$$

$$= \varepsilon\,(b_1 + c_1)\,\varepsilon\,(b_2 + c_2),$$

поэтому ε − эндоморфизм кольца $(A, +, \cdot)$. Далее рассмотрим отдельно случаи $\mathcal{Z}$ = К-Mod и $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$. Во втором случае опираясь на то, что B – под-m-кольцо, а C стабилен слева и инвариантен справа в A, имеем

$$\varepsilon\,((b_1 + c_1)\circ(b_2 + c_2)) = \varepsilon\,(b_1\circ(b_2 + c_2) + c_1(b_2 + c_2)) = \varepsilon\,(b_1\circ b_2 + (b_1\circ(b_2 +$$

$$+ c_2) - b_1\circ b_2 + c_1(b_2 + c_2)) = b_1\circ b_2 = \varepsilon\,(b_1 + c_1)\circ\,\varepsilon\,(b_2 + c_2),$$

Значит, $\varepsilon \in EndA$.

В первом случае предположим, что $x \in$ К. Теперь используя то, что B – подмодуль, а C – идеал К-модуля A, получаем

$$\varepsilon\,(x\square(b_1 + c_1)) = \varepsilon\,(x\square b_1 + (x\square(b_1 + c_1) - x\square b_1)) = x\square b_1 = x\square\,\varepsilon\,(b_1 + c_1).$$

Следовательно, $\varepsilon \in EndA$. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\varepsilon \in End_К A$ и $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$, $B = Im\,\varepsilon$, $C = Ker\,\varepsilon$. Тогда B является под-m-алгеброй m-алгебры A как образ при гомоморфизме, а C – идеал этой алгебры как ядро гомоморфизма. Если рассматривать ε как идемпотентный эндоморфизм кольца (A, +, ·), то приходим к равенствам (1) и (2). ◊

З а м е ч а н и е 2. Понятно, что если $A = B \oplus C$, то $A = B \leftthreetimes C$ и $A = C \leftthreetimes B$.◊

В связи с этим, используя следствие 2.2.2, получаем

С л е д с т в и е 1. Пусть A есть m-алгебра, $B \in SubA$, $C \in \Im(A)$ и $A = B \leftthreetimes C$. Тогда $A = B \oplus C$ в том и только в том случае, когда B является идеалом К-модуля A. ◊

Ненулевую m-алгебру A назовем $\leftthreetimes$-*разложимой*, если $A = B \leftthreetimes C$ для некоторых ненулевых под-m-алгебр B и C, и $\leftthreetimes$-неразложимой в противном случае. Из леммы 1 сразу следует

С л е д с т в и е 2. Ненулевая m-алгебра A является $\leftthreetimes$-неразложимой тогда и только тогда, когда только IdК и c_0 являются ее идемпотентными эндоморфизмами. ◊

Возникает вопрос о способах построения полупрямого произведения $B \leftthreetimes C$ исходя из того, что m-алгебры B и C заданы. Ниже излагается один из подходов к этому для случая, когда $\mathcal{Z}$ = К-*Mod*.

Начнем с одного обозначения. Пусть (C, +, ·) – ассоциативное коммутативное кольцо. Обозначим через $M(C)$ множество преобразований φ кольца C, удовлетворяющих следующим условиям :для любых a, $b \in C$

1°. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2°. $\varphi(ab) = \varphi(a)b$.

Лемма 2. Множество $M(C)$ является подкольцом кольца ($End\ C$, +, ∘) всех эндоморфизмов аддитивной группы (C, +).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ, $\psi \in M(C)$; a, $b \in C$. Для $\varphi + \psi$ и $\varphi \circ \psi$ условие 1° выполняется как для суммы и суперпозиции эндоморфизмов абелевой группы. Проверим для них выполнение условия 2° :

$$(\varphi + \psi)(ab) = \varphi(ab) + \psi(ab) = \varphi(a)b + \psi(a)b = (\varphi(a) + \psi(a))b =$$

$$= ((\varphi + \psi)(a))b,\ (\varphi \circ \psi)(ab) = \varphi(\psi(ab)) = \varphi(\psi(a)b) =$$

$$= \varphi(\psi(a))b = ((\varphi \circ \psi)(a))b.$$

Следовательно, $\varphi + \psi$, $\varphi \circ \psi \in M(C)$, и $M(C)$ является подкольцом кольца ($End\ C$, +, ∘).◊

Следующее утверждение предлагается читателю доказать самостоятельно.

Упражнение 1. Пусть B и C – два К-модуля и предположим, что имеются отображения $\varphi : B \to \mathsf{M}(C)$, где для $b \in B$ вместо $\varphi(b)$ пишем φ_b и для $x \in$ К, $b \in B$ определено преобразование $\tau(x, b) \in C^C$, при этом выполняются условия :

1) φ есть гомоморфизм кольца $(B, +, \cdot)$ в кольцо $(\mathsf{M}(C), +, \circ)$;

2) для любых $x, y \in$ К; $b \in B$, $c \in C$ выполняются соотношения:

2.1. $\tau(x + y, b) = \tau(x, b) + \tau(y, b)$;

2.2. $\tau(x y, b)(c) = \varphi_{x\square b}(\tau(y, b)(c)) + \varphi_{y\square b}(\tau(x, b)(c)) +$
$+ (\tau(x, b)(c))(\tau(y, b)(c))$;

2.3. $\tau(x, 0)(c) = x\square c$;

2.4. $\tau(x, y\square b)(\tau(y, b)(c)) = \tau(x \circ y, b)(c)$.

В этом случае на множестве $A = B \times C$ введем операции сложения $+ : A \times A \to A$, умножения$\cdot : A \times A \to A$, действия $x\square– : A \to A$ элемента $x \in$ К на A по правилам : для $b_1, b_2 \in B$; $c_1, c_2 \in C$

1°. $(b_1, c_1) + (b_2, c_2) = (b_1 + b_2, c_1 + c_2)$;

2°. $(b_1, c_1)(b_2, c_2) = (b_1 b_2, c_1 c_2 + \varphi_{b_1}(c_2) + \varphi_{b_2}(c_1)$;

3°. $x\square(b_1, c_1) = (x\square b_1, \tau(x, b_1)(c_1))$.

Тогда множество A относительно этих операций становится К-модулем, являющимся полупрямым произведением $A = \overline{B} \leftthreetimes \overline{C}$, где $\overline{B} = B \times 0$ есть подмодуль К-модуля A, изоморфный К-модулю B и $\overline{C} = 0 \times C$ – идеал К-модуля A, изоморфный К-модулю C.

Обратно, если $A = B \leftthreetimes C$, то полагая для $b \in B$, $c \in C$, $x \in$ К $\varphi_b(c) = bc$, $\tau(x, b)(c) = x\square(b + c) - x\square b$, мы получим отображения φ : $b \mapsto \varphi_b \in \mathsf{M}(C)$ и $\tau(x, b) : C \to C$, удовлетворяющие условиям 1)-2). Если теперь на множестве $B \times C$ определить операции по правилам 1°–3°, то получим К-модуль, изоморфный К-модулю A, при этом изоморфизм η: $B \times C \to A$ осуществляется по правилу : для $b \in B$, $c \in C$ $\eta(b, c) = b +$ с. При этом подмодуль В × 0 изоморфно отображается на В, а подмодуль $0 \times C$ изоморфно отображается на C. ◊

2.4. Подпрямые произведения

В данном пункте используем некоторые утверждения о почтикольцах [66, 77] и т. д.

Пусть A есть m-алгебра и ρ: $A \to \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ – инъективный гомоморфизм m-алгебры A в декартово произведение семейства $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ m-алгебр с естественными проекциями π_γ: $A \to A_\gamma$ такой, что выполняется условие : . для каждого $\gamma \in \Gamma$

$$\pi_\gamma(\rho(A)) = A_\gamma. \qquad (2.4.1)$$

Под-m-алгебра $\rho(A) \in SubA$ называется подпрямым произведением *семейства m-алгебр*, а гомоморфизм ρ − *подпрямым вложением m-алгебры A в декартово произведение семейства* $\{A_\gamma| \ \gamma \in \Gamma\}$, а также будем говорить, что m-алгебра A *разлагается в подпрямое произведение семейства* $\{A_\gamma| \ \gamma \in \Gamma\}$ или *изоморфна подпрямому произведению семейства* $\{A_\gamma| \ \gamma \in \Gamma\}$ *m-алгебр*. В этом случае, обозначая $Ker(\pi_\gamma \circ \rho)$ через I_γ, имеем равенство $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma = 0$. Таким образом, как и для всех Ω-групп, имеем

Теорема 1. Представления любой m-алгебры A в виде подпрямого произведения m-алгебр взаимно однозначно соответствуют системам его идеалов с нулевым пересечением. ◊

Ненулевая m-алгебра A называется *подпрямо неразложимой*, если при любом разложении $A \subseteq \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ (π_γ) в подпрямое произведение семейства $\{A_\gamma| \ \gamma \in \Gamma\}$ m-алгебр существует $\gamma \in \Gamma$ такой, что гомоморфизм $\pi_\gamma |_A$ инъективен. Это означает, что всякое пересечение семейства ненулевых идеалов есть ненулевой идеал или, что то же самое, решетка $\Im(A)$ атомна и имеет единственный атом. Этот идеал называем *сердцевиной* (*монолитом*) *m-алгебры A*. В частности, всякий простой или неприводимый К-модуль подпрямо неразложим, а также подпрямо неразложимы простые, в частности, минимальные m-кольца. Так как категория $\mathcal{Z}$ является многообразием, то имеет место

Теорема 2. Всякая ненулевая m-алгебра разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых m-алгебр. ◊

К этому примыкает также следующая:

Теорема 3. Пусть A есть m-алгебра и $\{ I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – семейство ее идеалов. Пусть $I = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$. Тогда фактор-$m$-алгебра A/I изоморфна подпрямому произведению семейства $\{ A/I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ m-алгебр.◊

Пусть К есть m-кольцо, $L \subseteq$ K, $n \in \mathbb{N}_2$. В дальнейшем число $n \geq 2$ будет фиксированным. Положим

$$L^{[n]} = \{t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n \mid t_1, t_2, \ldots, t_n \in L\}.$$

Назовем подмножество L n-кратно *перестановочным по отношению к подстановке* σ *множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$, если $\sigma(1) \neq 1$ и выполняется условие : для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in L$

(P) $$t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n = t_{\sigma(1)} \circ t_{\sigma(2)} \circ \circ t_{\sigma(n)} .$$

Лемма 1. Пусть инвариантное слева подмножество L m-кольца К является n-кратно перестановочным (по отношению к подстановке σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.Тогда для любых $x, y \in$ К и для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in L$ выполняется равенство

$$x \circ y \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n = y \circ x \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n. \tag{2.4.2}$$

Доказательство. Пусть $x, y \in$ К и $t_1, t_2, \ldots, t_n \in L$, а также пусть $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что $\sigma(i) = 1$ и $\sigma(1) = j$. Положим $r = y \circ x \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n$. Так как множество L инвариантно слева, то $x \circ t_1 \in L$. Применяя теперь свойство (P) к элементам $x \circ t_1, t_2, \ldots, t_n$ и затем умножая обе части равенства на y слева, получаем

$$r = y \circ t_{\sigma(1)} \circ t_{\sigma(2)} \circ \circ t_{\sigma(i-1)} \circ x \circ t_1 \circ t_{\sigma(i+1)} \circ \circ t_{\sigma(n)} .$$

Применяя теперь свойство (P) к элементам $x \circ t_1, t_2, \ldots, y \circ t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n$, получим

$$x \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{j-1} \circ y \circ t_j \circ t_{j+1} \circ \ldots \circ t_n =$$

$$= y \circ t_{\sigma(1)} \circ t_{\sigma(2)} \circ \circ t_{\sigma(i-1)} \circ x \circ t_{\sigma(i)} \circ t_{\sigma(i+1)} \circ \circ t_{\sigma(n)} = r.$$

Далее снова применяя (P) к элементам $t_1, t_2, \ldots, y \circ t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n$, получим

$$r = x \circ y \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{j-1} \circ y \circ t_j \circ t_{j+1} \circ \ldots \circ t_n = x \circ y \circ t_{\sigma(1)} \circ t_{\sigma(2)} \circ \circ t_{\sigma(n)} .$$

Наконец, применяя (P) к элементам $t_1, t_2, \ldots, t_n$, окончательно выводим

$$x \circ y \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_n = x \circ y \circ t_{\sigma(1)} \circ t_{\sigma(2)} \circ \circ t_{\sigma(n)} = r.$$

Следовательно, равенство (2.4.2) выполняется.◊

Теорема 4. Пусть К – подпрямо неразложимое m-кольцо с сердцевиной H и пусть L – инвариантное слева n-кратно перестановочное по отношению к некоторой подстановке σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и такое, что $H \circ L^{[n]} \neq 0$. Тогда m-кольцо К c-коммутативно [39]. При этом если $H \circ H \neq 0$, то К – m-кольцо с делением.

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем равенство (2.4.2) для любых $x, y \in$ К и для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in L$. Отсюда следует, что $(x \circ y -$

$y\circ x)\circ t_1\circ t_2\circ\ldots\circ t_n = 0$, поэтому если взять в качестве К-модуля A естественный К-модуль ${}_{K}K$, то

$$x\circ y - y\circ x \in (0 : L^{[n]}) = \{\, z\in K \mid z\circ L^{[n]} = 0\}. \qquad (2.4.3)$$

Так как L инвариантно слева в К, то нетрудно видеть, что множество $L^{[n]}$ инвариантно слева. Далее, так как $\{0\}$ является идеалом К-модуля $A = {}_{K}K$, то согласно предложению 9.1.2 [39] множество $(0 : L^{[n]})$ является идеалом m-кольца К. Так как это m-кольцо подпрямо неразложимо, то либо $(0 : L^{[n]}) = 0$, либо $H \subseteq (0 : L^{[n]})$. В последнем случае $H\circ L^{[n]} = 0$, что противоречит предположению $H\circ L^{[n]} \neq 0$. Значит, $(0 : L^{[n]}) = 0$ и $x\circ y - y\circ x = 0$ благодаря (2.4.3). Таким образом, выполняется равенство $x\circ y = y\circ x$, и так как x и y – произвольные элементы из К, то полугруппа (К, $\circ$) оказывается коммутативной, поэтому суперпозиция "$\circ$" дистрибутивна и слева относительно сложения, и мы приходим к тому, что (К, +, $\circ$) – это коммутативное ассоциативное кольцо.

Предположим теперь, что $H\circ H \neq 0$. Рассмотрим множество $M = (0 : H)$. Так как $H \trianglelefteq K$, то согласно предложению 9.1.2 [39] множество $(0 : H)$ является идеалом m-кольца К. Если предположить, что $(0 : H) \neq 0$, то по свойству сердцевины $H \subseteq (0 : H)$, откуда $H\circ H = 0$, в противоречие с предположением. Значит, $(0 : H) = 0$ и выполняется соотношение

$$\forall\, x\in K\ (x\circ H = 0 \Rightarrow x = 0). \qquad (2.4.4)$$

Зафиксируем элемент $x\in K^{\#}$ и рассмотрим эндоморфизм $\psi_x : y \mapsto y\circ x$ К-модуля ${}_{K}K$. Виду коммутативности полугруппы (К, $\circ$) и (2.4.4) $\psi_x(H) = H\circ x = x\circ H \neq 0$, поэтому $\psi_x \neq c_0$. Положим $U = Ker\,\psi_x$. Так как $U\in St_K K$, то множество U инвариантно слева в К, а ввиду c-коммутативности К множество U инвариантно также и справа, поэтому $U \trianglelefteq K$. Если теперь предположить, что $U \neq 0$, то отсюда должно следовать, что $H \subseteq U$ и $H\circ x = x\circ H \neq 0$ в противоречие с (2.4.4). Значит, эндоморфизм ψ_x инъективен для любого $x\in K^{\#}$. В частности, отсюда следует, что кольцо (К, +, $\circ$) – без делителей нуля.

Далее покажем, что кольцо (H, +,$\circ$) является полем. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что это кольцо – простое. С этой целью предположим, что J – ненулевой идеал кольца (H, +, $\circ$). Рассмотрим множество $(0 : J)$. Так как J – подгруппа группы (К, +), то согласно предложению 9.1.2 [39] множество $(0 : J)$ является подгруппой той же группы. Предположим, что $x\in (0 : J)$, $u\in K$, $v\in J$. Тогда $(xu)\circ v) = (x\circ v)(u\circ x) = 0(u\circ x) = 0$. Следовательно, $xu \in (0 : J)$ и подгруппа $(0 : J)$ является идеалом кольца (К, +, $\cdot$). Далее, при тех же предположениях $u\circ x\circ v = u\circ 0 = 0$. Поэтому $u\circ x\in (0 : J)$ и множество $(0 : J)$ инвариантно справа и слева в К. Ввиду c-коммутативности К отсюда, в частности, следует, что $(0 : J)$ стабильно слева в К. Значит, $(0 : J) \in \Im(К)$ и потому $H \subseteq (0 : J)$. Но тогда $H \circ J = 0$ в противоречие с тем, что для всякого $x \in К^{\#}$ эндоморфизм ψ_x инъективен. Тем самым доказано, что кольцо $(H, +, \circ)$ является полем. Обозначим через e единицу этого поля. Если x – произвольный элемент из К и $h \in H$, то $(x - x \circ e) \circ h =$ $= x \circ h - x \circ e \circ h = x \circ h - x \circ h = 0$. Отсюда ввиду $H \in \Im(К)$ и (2.4.3) получаем, что $x - x \circ e = 0$, $x = x \circ e \in К \circ H \subseteq H$ и $H = К$. ◊

З а м е ч а н и е 1. Как будет доказано в § 1 гл. IV, в этой ситуации умножение на К либо нулевое, либо совпадает с суперпозицией и $|\,К\,| = 2$.◊

2.5. Свободные произведения *m*-алгебр

Здесь используется информация о многообразиях и категориях универсальных алгебр [19, 35, 46] и др. Пусть $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ – некоторое семейство *m*-алгебр. Как известно, для любого семейства алгебр многообразия свободное произведение существует. Вопрос состоит в способе построения свободного произведения этого семейства, иначе говоря, копредел диаграмм следующего вида:

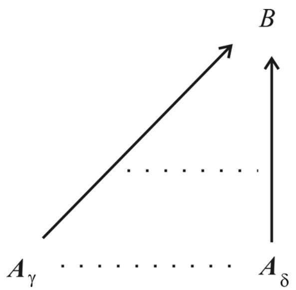


Рис. 2.5.1

Для каждого $\gamma \in \Gamma$ пусть $\sigma_\gamma : F(X_\gamma) \rightarrow A_\gamma$ – гомоморфизм свободной *m*-алгебры $F(X_\gamma)$ многообразия *З* со свободными порождающими X_γ на *m*-алгебру A_γ и пусть $J_\gamma = Ker\, \sigma_\gamma$. Положим

$$X = \bigsqcup \{ X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \} - \tag{2.5.1}$$

дизъюнктное объединение множеств X_γ, $\gamma \in \Gamma$. Тогда можно считать, что каждая *m*-алгебра $F(X_\gamma)$ над X_γ есть под-*m*-алгебра свободной *m*-алгебры

$F(X)$ над X. Положим $J = \ll \bigcup_{\gamma\in\Gamma} J_\gamma \gg$ и $\tilde{A} = F(X)/J$. В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. m-алгебра $\tilde{A} = F(X)/J$ является свободным произведением семейства $\{ A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \}$ в категории $\mathcal{Z}$.

Доказательство. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ по первой теореме о гомоморфизмах m-алгебры A_γ и $F(X_\gamma) / J_\gamma$ изоморфны, поэтому далее можем считать, что $A_\gamma = F(X_\gamma)/J_\gamma$, и в качестве элементов m-алгебр A_γ будем рассматривать смежные классы вида $u + J_\gamma$, где $u \in F(X_\gamma)$. Так как $J_\gamma \subseteq J$, то соответствие $f_\gamma : u + J_\gamma \mapsto u + J$ является гомоморфизмом из A_γ в $\tilde{A}$. Требуется установить инъективность f_γ. Для этого, очевидно, достаточно доказать равенство

$$F(X_\gamma) \cap J = J_\gamma. \tag{2.5.2}$$

Будем доказывать для случая $\mathcal{Z}$ = К-*Mod*. Случай $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$. рассматривается аналогично. Теперь свободная m-алгебра $F(X)$ есть свободный К-модуль с обозначением $F_{\mathrm{K}}(X)$. Включение $J_\gamma \subseteq F_{\mathrm{K}}(X_\gamma) \cap J$ очевидно. Надо доказать обратное включение. Сначала рассмотрим множество $I_0 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} J_\gamma$. По определению J есть идеал К-модуля $F_{\mathrm{K}}(X)$, порожденный этим множеством, так что его можно рассматривать как объединение возрастающей последовательности следующих множеств.

$$I_1 = \{ u_1 \pm u_2 \mid u_1, u_2 \in I_0 \} \cup I_0 ;$$
$$I_2 = \{ u_1 u_2 \mid u_1 \in I_1, u_2 \in F(X) \} \cup I_1;$$
$$I_3 = \{ x\square(u_1 + u_2) - x\square u_2 \mid x \in \mathrm{K},\ u_1 \in I_2, u_2 \in F(X) \} \cup I_2;$$

и т. д., предполагая, что для $l \in \mathbb{N}$ множество I_{3l} уже построенным, положим

$$I_{3l+1} = \{ u_1 \pm u_2 \mid u_1, u_2 \in I_{3l} \} \cup I_{3l};$$
$$I_{3l+2} = \{ u_1 u_2 \mid u_{3l+1} \in I_{3l+1}, u_2 \in F_{\mathrm{K}}(X) \} \cup I_{3l+1};$$
$$I_{3l+3} = \{ x\square(u_1 + u_2) - x\square u_2 \mid u_1 \in I_{3l+2}, u_2 \in F_{\mathrm{K}}(X) \} \cup I_{3l+2}.$$

И тогда

$$J = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \ . \tag{2.5.3}$$

Теперь предположим, что $t_1, t_2, \ldots, t_n \in X$ и терм $u = u(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ принадлежит $F_{\mathrm{K}}(X_\gamma)$. Покажем, что те образующие t_{j}, которые не принадлежат X_γ, можно заменить нулями. В самом деле, рассмотрим отображение $\varphi : X \to F_{\text{К}}(X_\gamma)$, где для $t \in X$

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad t \in X_\gamma, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin X_\gamma. \end{cases} \tag{2.5.4}$$

Так как алгебра свободна над X, то φ продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi}$: $F_{\text{К}}(X) \to F_{\text{К}}(X_\gamma)$, такого, что $\overline{\varphi}|_X = \varphi$. При этом ввиду (2.5.4) $\varphi(t) = t$ для любого $t \in X_\gamma$, поэтому, так как К-модуль $F_{\text{К}}(X_\gamma)$ свободен над X_γ, то гомоморфизм $\overline{\varphi}$ действует тождественно на $F_{\text{К}}(X_\gamma)$. Возвращаясь к указанному выше терму $u = u(t_1, t_2,\ldots, t_n) \in F_{\text{К}}(X_\gamma)$, получаем

$$u = \overline{\varphi}(u) = \overline{\varphi}(u(t_1, t_2,\ldots, t_n)) = u(\varphi(t_1), \varphi(t_2),\ldots, \varphi(t_n)) =$$

$$= u(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_n}),$$

где для $j = 1, 2,,\ldots, n$ $\overline{t_j} = t_j$ или $\overline{t_j} = 0$.

Теперь для множеств I_k докажем по индукции по $k \in \mathbb{N}_0$ включения

$$F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_k \subseteq J_\gamma. \tag{2.5.5}$$

Действительно, то, что $F(X_\gamma) \cap I_0 \subseteq J_\gamma$, очевидно. Далее, множество $F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_1$ состоит либо из термов вида $u_1 \pm u_2$, где $u_1, u_2 \in I_0$, либо термов из множества $F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_0 \subseteq J_\gamma$. В первом случае, заменяя в терме $u_1 \pm u_{2,?}$ а тогда и в термах u_1 и u_2 элементы из $X \setminus X_\gamma$ нулями, приходим к термам u_1 и u_2 из $F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_0 \subseteq J_\gamma$, поэтому $u_1 \pm u_2 \in J_\gamma \pm J_\gamma \subseteq . J_\gamma$. Таким образом, (2.5.4) верно при $k = 1$. Множество $F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_2$ по определению I_2 состоит из термов вида u_1u_2, где $u_1 \in I_1$, $u_2 \in F_{\text{К}}(X)$, или из элементов из $F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_1 \subseteq \subseteq J_\gamma$. В первом случае, заменяя в терме u_1u_2, а тогда и в термах u_1 и u_2 элементы из $X \setminus X_\gamma$ нулями, приходим к термам $u_1 \in F(X_\gamma) \cap I_1 \subseteq J_\gamma$ и $u_2 \in F(X_\gamma)$. Так как $J_\gamma \in \Im F(X_\gamma)$, то после этой замены будет $u_1u_2 \in J_\gamma$ и $F(X_\gamma) \subseteq J_\gamma$ Следовательно, (2.5.5) выполняется при $k = 2$. Далее, множество $F(X_\gamma) \cap I_3$ по определению I_3 состоит из термов вида $x\square(u_1 + u_2) - x\square u_2$, где $x \in \text{К}$, $u_1 \in I_1, u_2 \in F_{\text{К}}(X)$, или из элементов множества $F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_2 \subseteq J_\gamma$. В первом случае, заменяя в терме $x\square(u_1 + u_2) - x\square u_2$, а тогда и в термах u_1 и u_2 элементы из $X \setminus X\gamma$ нулями, приходим к термам $u_1 \in F_{\text{К}}(X_\gamma) \cap I_1 \subseteq J_\gamma$ и $u_2 \in F_{\text{К}}(X_\gamma)$. Так как J_γ стабилен слева в $F_{\text{К}}(X_\gamma)$, то после этой замены $x\square(u_1 + u_2) - x\square u_2 \in J_\gamma$. Значит, (2.5.5) выполняется при $k = 3$. Действуя таким же образом, приходим к включениям (2.5.4) при любом $k \in \mathbb{N}_0$. Теперь воспользовавшись (2.5.2), и (2.5.4), получим

$$F_K(X_\gamma) \cap J = F_K(X_\gamma) \cap (\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k) = \bigcup_{k=0}^{\infty} F(X_\gamma) \cap I_k \subseteq J_\gamma.$$

Значит, равенство (2.5.2) выполняется и гомоморфизм f_γ инъективен.

Пусть теперь имеется некоторый К-модуль B и семейство гомоморфизмов $g_\gamma: A_\gamma \to B$, $\gamma \in \Gamma$. Требуется найти такой гомоморфизм $h : \tilde{A} \to B$, что для любого $\gamma \in \Gamma$

$$h \circ f_\gamma = g_\gamma. \tag{2.5.6}$$

Так как $A_\gamma = F_K(X_\gamma)/J_\gamma$, можно рассмотреть гомоморфизм

$$\overline{g_\gamma} = g_\gamma \circ \nu_\gamma : F_K(X_\gamma) \to B, \tag{2.5.7}$$

где $\nu_\gamma = natJ_\gamma$: $F_K(X_\gamma) \to F_K(X_\gamma)/J_\gamma$. Теперь из определения $\overline{g_\gamma}$ непосредственно следует, что

$$J_\gamma \subseteq Ker\,\overline{g_\gamma}. \tag{2.5.8}$$

Благодаря (2.5.1) можно определить так отображение $\overline{h} : X \to B$, что для любого $\gamma \in \Gamma$ и для любого $t \in X_\gamma$ $\overline{h}(t) = \overline{g_\gamma}(t)$. Так как К-модуль $F_K(X)$ свободен над X, существует единственный гомоморфизм h_1: $F_K(X) \to B$ такой, что для любого $\gamma \in \Gamma$ и для любого $u \in F_K(X_\gamma)$.

$$h_1(u) = \overline{g_\gamma}(u). \tag{2.5.9}$$

Из этого ввиду (2.5.8) следует, что $h_1(J_\gamma) = 0$ и так как $J = \ll \bigcup_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma \gg$, выводим включение $J \subseteq Ker\, h_1$. Отсюда вытекает, что существует гомоморфизм h_2: $F_K(X)/J \to B$ такой, что $h_2 \circ \nu_J = h_1$, где $\nu_J = natJ$. Теперь для любого $\gamma \in \Gamma$ и для любого $t \in X_\gamma$ с использованием (2.5.7), (2.5.9) и определения h_2 имеем

$$h_2 \circ f_\gamma \circ \nu_\gamma(t) = h_2(f_\gamma(t + J_\gamma)) = h_2(t + J) = h_2 \circ \nu_J(t) = h_1(t) = \overline{g_\gamma}(t) =$$

$$= g_\gamma \circ \nu_\gamma(t).$$

Отсюда так как К-модуль $F_K(X_\gamma)$ свободен над X_γ, имеем равенство $h_2 \circ f_\gamma \circ \nu_\gamma = g_\gamma \circ \nu_\gamma\ \nu_\gamma$. Поскольку гомоморфизм ν_γ сюръективен, получаем равенство (2.5.6). Единственность h_2 следует из того, что множество $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma\ (X_\gamma)$ порождает $\tilde{A} = F_{\text{К}}\ (X)/J$.◊

Свободное произведение семейства $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ m-алгебр далее обозначается через $\coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} .A_\gamma$.

У п р а ж н е н и е 1. Довести до конца доказательство теоремы 1 для случая, когда $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$.◊

§ 3. КОММУТАТОРЫ В *m*-АЛГЕБРАХ

3.1. Абелевы *m*-алгебры

Напомним [22], что Ω**-**группа называется *абелевой*, если операции из Ω перестановочны с операцией сложения. В соответствии с этим К-модуль A называем *абелевым*, если операции "·" умножения и " $x\square -$ " – действия элемента $x \in$ К на элементы из A перестановочны с операцией "+" сложения. Это означает, что для любых a, b, c, d $\in A$ и любого $x \in$ К выполняются равенства :

$$ab + cd = (a + c)(b + d\,); \tag{3.1.1}$$

$$x\square(a + b) = x\square a + x\square b. \tag{3.1.2}$$

Равенство (3.1.1) можно переписать в виде $ab + cd = ab + ad + cb + cd$, откуда получаем равенство $0 = ad + cb$ и, полагая $a = 0$, получаем $cd = 0$ для любых c, d $\in A$. Следовательно, умножение в абелевом К-модуле нулевое, т. е.

$$A{\cdot}A = 0. \tag{3.1.3}$$

Обратно, из (3.1.3) легко следует (3.1.1). Соотношение (3.1.2) означает, что для каждого $x \in$ К преобразование $x\square - : a \mapsto x \square a$ является эндоморфизмом группы $(A, +)$. Переходя к обозначению К-модуля A как m-тройки (К, A, α), получаем

Предложение 1. К-модуль (К, A, α) является абелевым тогда и только тогда, когда выполняются условия :

1) $A{\cdot}A = 0$.

2) α есть гомоморфизм почтикольца (К, +, ∘) в кольцо эндоморфизмов $(EndA, +, \circ)$ группы $(A, +)$.

3) К·К $\subseteq$ Kerα.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (1)–(3) пункта 1.1, а также (2.1.2), (2.1.3) получаем равенства:

A1. $ab = 0$;

A2. $(x + y)\square = x\square a + y\square a$;

A3. $(x\,y)\square a = (x\square a)(y\square a) = 0$;

A4. $(x \circ y)\square a = (x\,\square(y\square a))$.

A5. $x\square(a + b) = x\square a + x\square b$.

для любых x, $y \in$ К и любых a, $b \in A$. Это и означает выполнение условий 1)–3). ◊

К-модуль A назовем *стройным*, если для любого $x\ \in$ К и любых a, $b \in A$ выполняются равенства (3.1.2) и $x\square(a \cdot b) = (x\square a)(x\square b)$. Из предложения 1 получаем

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы К-модуль был абелевым, необходимо и достаточно, чтобы он был стройным К-модулем с нулевым умножением. ◊

Из этих рассмотрений видно, что класс ${}_{\text{К}}\mathcal{A}$ всех абелевых К-модулей составляет многообразие алгебр, определяемое системой тождеств многообразия коммутативных ассоциативных колец, а также тождеств A1−A5. Из этого согласно теореме Биркгофа (теорема 3.1 гл. IV [17]) имеем

С л е д с т в и е 2. Класс ${}_{\text{К}}\mathcal{A}$ замкнут слева и справа, а также декартово замкнут. ◊

m-алгебру A называем *гамильтоновой*, если $SubA = \Im(A)$.

З а м е ч а н и е 1. Здесь мы придерживаемся терминологии теории универсальных алгебр, [28], [51], …, где гамильтоновой называется алгебра, у которой любая подалгебра является смежным классом некоторой конгруэнции. Аналогичное понятие для колец (полное идеальное кольцо в общем смысле) рассматривалось в работе [69]. Что касается полугрупп, то там понятие “гамильтонова полугруппа” имеет другой смысл [12], а полугруппы, у которых каждая подполугруппа является идеалом, названы И-полугруппами [38],….

С л е д с т в и е 3. Каждый абелев К-модуль является гамильтоновым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B\ \in SuA$. Ввиду A1 подкольцо B является идеалом кольца $(A, +, \cdot)$. Далее, пусть $x \in$ К и a, $b \in A$. Тогда согласно A5 имеем $x\square(a + b) - x\square a = x\square b \in \text{К}\square B\ \subseteq\ B$. Следовательно, B стабильно слева и является идеалом К-модуля A. ◊

m-кольцо К будем называть *дистрибутивным*, если операция суперпозиции “∘” дистрибутивна также и слева относительно сложения и умножения. Для естественного К-модуля ${}_{\text{К}}$К условие A5 означает дистрибутивность слева операции суперпозиции “∘” относительно сложения. Отсюда получаем

С л е д с т в и е 4. Пусть (К, +, $\cdot$, $\circ$) есть m-кольцо. Для того, чтобы его естественный К-модуль был абелевым, необходимо и достаточно, чтобы умножение на К было нулевым и m-кольцо К было дистрибутивным.◊

Условия абелевости m-колец рассматривались в § 4 книги [39]. Согласно предложению 4.1.1 из этой книги получаем

С л е д с т в и е 5. Для того чтобы m-кольцо (К, +, $\cdot$, $\circ$) было абелевым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $К\cdot К = 0 = К\circ К$.◊

Отсюда и привлекая следствия 2 и 3, выводим

С л е д с т в и е 6. Подкласс класса $\mathfrak{Z}$, состоящий из абелевых m-алгебр, замкнут относительно операций взятия под-m-колец, гомоморфных образов и декартово замкнут.◊

С л е д с т в и е 7. Каждая абелева m-алгебра является гамильтоновой. ◊

3.2. Взаимный коммутант под-m-алгебр

Для двух подмодулей B и C К-модуля A *взаимным коммутантом* $[B, C]$ этих подмодулей называем идеал К-модуля $B \vee C$, порожденного элементами вида

$$[b_1, b_2; c_1, c_2;]\cdot = (b_1 + c_1)(b_2 + c_2) - b_1b_2 - c_1c_2 = b_1\, c_2 + b_2\, c_1 \quad (3.2.1)$$

и вида

$$[b_1; c_1; x\cdot] = -\, x\square b_1 - x\square c_1 + x\square(b_1 + c_1), \quad (3.2.2)$$

где $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$, $x \in К$

Аналогично для двух под-m-колец A и B m-кольца (К, +, $\cdot$, $\circ$) *взаимным коммутантом* $[A, B]$ этих под-m-колец называем наименьший идеал под-m-кольца $A \vee B$, содержащий элементы вида:

$$[a_1, a_2; b_1, b_2; \cdot] = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - a_1a_2 - b_1b_2, \quad (3.2.3)$$

$$[a_1, a_2; b_1, b_2; \circ] = (a_1 + b_1)\circ(a_2 + b_2) - a_1\circ a_2 - b_1\circ b_2, \quad (3.2.4)$$

где $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$.

Из первого определения получаем

Предложение 1. Взаимный коммутант $[B, C]$ двух подмодулей B и C К-модуля A есть наименьший идеал в К-модуле $B \vee C$ среди содержащих все элементы вида

$$b\, c, \quad (3.2.5)$$

а также

$$x\square(b + c) - x\square b - x\square c, \quad (3.2.6)$$

где $b \in B$, $c \in C$, $x \in К$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в (3.2.1) $c_1 = 0$, убеждаемся, что в $[B, C]$ содержатся все элементы вида (3.2.5). То, что там находятся все элементы вида (3.2.6), следует непосредственно из (3.2.2). Поэтому идеал К-модуля $B \vee C$, содержащий все элементы вида (3.2.5) и (3.2.6), содержится в $[B, C]$. Обратно, если идеал $J \in St\,(B \vee C)$ содержит все элементы вида (3.2.5) и (3.2.6), то он, очевидно, содержит все элементы вида (3.2.1) и (3.2.2), поэтому $[B, C] \subseteq J$. Следовательно, указанный в формулировке предложения 1 идеал совпадает с $[B, C]$. ◊

Для подмодуля $B \in SuA$ его *коммутантом* будем называть взаимный коммутант $[B, B]$ и обозначать его также через B'. Аналогично определяется *коммутант под-т-кольца В т*-кольца A.

С л е д с т в и е 1. Пусть $B \in SuA$. Тогда

$$B' = \langle B{\cdot}B \cup \{ x\square(b + c) - x\square b - x\square c \mid b, c \in B, x \in \text{К} \rangle. \qquad (3.2.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через X множество внутри угловых скобок правой части равенства (3.2.5). Из предложения 1 следует, что $X \subseteq [B, B] = B'$, поэтому $\langle X \rangle \subseteq B'$. Остается показать, что подмодуль $C = \langle X \rangle$ является идеалом К-модуля B. В самом деле, по определению X имеем $C.B \subseteq X \subseteq C$, поэтому C есть идеал кольца $(B, +, \cdot)$. Далее, для любых $x \in \text{К}$, $b \in B$, $c \in C$ имеем $x\square(b + c) - x\square b - x\square c \in X \subseteq C$, поэтому $x\square(b + c) - x\square b \in x\square c + C \subseteq \text{К}\square C + + C \subseteq C + C \subseteq C$. Следовательно, $C \in StB$ и $C = B'$. ◊

Из второго определения, согласно предложению 4.2.1 из книги [39], имеем

Предложение 2. Взаимный коммутант $[A, B]$ двух под-*т*-колец A и B *т*-кольца (К, +, ·, ∘) есть наименьший идеал в $A \vee B$, содержащий все элементы вида $a_1 b_1$, $a_1 \circ(b_1 + a_2) - a_1 \circ a_2$, $b_1 \circ(a_1 + b_2) - b_1 \circ b_2$, где $a_1, a_2 \in A$, b_1, $b_2 \in B$.◊

Следуя § 5, гл. III [22], выпишем утверждения о взаимных коммутантах, общие для всех $\Omega-$групп.

Предложение 3. Пусть A есть *т*-алгебра и B, B_1, C, $C_1 \in SubA$, где $B_1 \subseteq B$, $C \subseteq C_1$. Тогда верны следующие утверждения.

1°. $[B_1, C_1] \subseteq [B, C]$;

2°. $[B, C] = [C, B]$;

3°. $B \trianglelefteq A \Leftrightarrow [B, A] \subseteq B$;

4°. *т*-алгебра A тогда и только тогда абелева, когда $A' = 0$;

5°. Если $B \trianglelefteq A$, то фактор-*т*-алгебра A / B является абелевой тогда и только тогда, когда $A' \subseteq B$. ◊

3.3. Взаимные коммутанты конгруэнций и идеалов

Если I, J – идеалы m-алгебры A, то можно использовать другой подход к определению их взаимного коммутанта, основанный на определении взаимного коммутанта двух конгруэнций алгебр из конгруэнц-перестановочных (мальцевских) многообразий [33, 52, 73], …, или конгруэнц--модулярных многообразий [3, 28, 49], …. Мы будем следовать изложению книги [73].

Пусть $I \in \mathfrak{I}(A)$.Соответствующую конгруэнцию со смежным классом I обозначим через α_I, т. е.

$$\alpha_{\mathrm{I}} = \{ (a, a + b) \mid a \in A,\ b \in I \}. \tag{3.3.1}$$

Пусть J – другой (или тот же) идеал алгебры A. Введем обозначение

$$\Delta^J = \{ ((a, a), (b, b)) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid (a, b) \in \alpha_J \}. \tag{3.3.2}$$

Множество Δ^J можно рассматривать как симметричное отношение на множестве α_J и согласно (3.3.2) его можно записать в виде

$$\Delta^J = \{ ((a, a), (a + b, a + b)) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid a \in A,\ b \in J \}. \tag{3.3.3}$$

Как уже было замечено в п.1.2, конгруэнции алгебры A перестановочны, поэтому многообразие $\mathcal{Z}$ является мальцевским, так что согласно предложению 143 из книги [73] множество α_I можно рассматривать как под-m-алгебру прямого произведения $A \times A$ двух экземпляров m-алгебры A, содержащей диагональ Δ_A. В этой алгебре α_I рассмотрим наименьшую конгруэнцию Δ_I^J среди содержащих множество Δ^J. Таким образом, $\Delta^J \subseteq \Delta_I^J \subseteq \alpha_I$. Эта конгруэнция определяется идеалом m-алгебры α_I, являющимся смежным классом этой конгруэнции, содержащим нулевой элемент. Этот идеал обозначаем через θ_I^J и согласно (3.3.3) он должен содержать множество $\Delta_J = \{ (b, b)) \mid b \in J\}$. Ввиду изоморфизма между решеткой конгруэнций $Con\alpha_I$ и решеткой идеалов $\mathfrak{I}(\alpha_I)$ идеал θ_I^J является наименьшим среди идеалов m-алгебры α_I, содержащих множество Δ_J. Теперь, следуя § 43 [73] *взаимный коммутант в смысле Смита* $[\alpha_I, \alpha_J]$ конгруэнций α_I и α_J определяется с помощью Δ_I^J следующим образом:

$$[\alpha_I, \alpha_J] = \{ ((a, b) \in A \times A \mid ((a, a), (a, b)) \in \Delta_I^J \}. \tag{3.3.4}$$

Теперь, используя определение идеала θ_I^J , для $a, b \in A$, получим

$$((a, a), (a, b)) \in \Delta_I^J \Leftrightarrow (a, a) - (a, b) \in \theta_I^J \Leftrightarrow (0, a - b) \in \theta_I^J .$$

Отсюда и согласно (2.3.4) выводим формулу для взаимного коммутанта в конгруэнций α_I и α_J:

$$[\alpha_I, \alpha_J] = \{ ((a, a + b) \mid a, b \in A, \}.(0, b) \in \theta_I^J \}. \qquad (3.3.5)$$

Обозначим теперь через S идеал m-алгебры A, определяющий конгруэнцию $[\alpha_I, \alpha_J]$ (т. е. такой, что $\alpha_S = [\alpha_I, \alpha_J]$. Исходя из равенств (2.3.1) и (2.3.5), получим для любого $b \in A$:

$$b \in S \Leftrightarrow (0, b) \in \alpha_S \Leftrightarrow (0, b) \in \theta_I^J .$$

Следовательно,

$$S = \{ b \in A \mid (0, b) \in \theta_I^J \}. \qquad (3.3.6)$$

Идеал S будем называть *взаимным коммутантом* (*в смысле Смита*) *идеалов* I и J и обозначать $[I, J]$. В то же время в отличие от этого взаимный коммутант под-m-алгебр I и J m-алгебры A, определенный в п. 2.2, будем обозначать далее через $[I, J]_{\mathcal{K}}$ и называть *взаимным коммутантом в смысле Куроша*.

Для непосредственного описания идеала $[I, J]$ через идеалы I и J введем некоторые обозначения. Именно в случае $\mathcal{Z}$ = К-*Mod* пусть $b \in J$; $c \in A$; $x \in$ К. Рассмотрим следующие преобразования множества I : для $a \in I$

$$\varphi_b(a) = ab, \qquad (3.3.7)$$

$$\varphi_{x,b,c}(a) = x\square(a + b + c) - x\square(b + c) - x\square(a + c) + x\square c. \qquad (3.3.8)$$

В случае $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$ если $a \in I$, $x \in J$ и $y, z \in$ К, то положим

$$\varphi_x : a \mapsto ax ,$$

$$\varphi_{x,y}: a \mapsto x\circ(y + a) - x\circ y,$$

$$\varphi_{x,y,z} : a \mapsto y\circ(z + x + a) - y\circ(z + x) - y\circ(z + a) + y\circ z,$$

$$\psi_{x,y} : a \mapsto a\circ(y + x) - a\circ y. \qquad (3.3.9)$$

Множество таких преобразований обозначаем через $\Phi_{I, J}$, а объединение образов всех таких преобразований – через $Im\ \Phi_{I, J}$. Для дальнейшего понадобится лемма.

Лемма 1. В сделанных выше предположениях имеет место включение

$$Im\, \Phi_{I,J} \subseteq I \cap J. \tag{3.3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для случая $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ это –включение (4.3.8) из книги [39]. Обратимся к случаю $\mathcal{З}$ = К-*Mod* Пусть $a \in I$, $b \in J$; $c \in A$; $x \in$ К. Так как идеалы I и J являются идеалами кольца $(A, +, \cdot)$, то $\varphi_b(a) = ab \in I \cap J$. Далее, так как идеал I стабилен слева в этом кольце, то

$$\varphi_{x,b,c}(a) = (x\square(a + b + c) - x\square(b + c)) - (x\square(a + c) - x\square c) \in I - I \subseteq I,$$

а так как J также стабилен в этом кольце, то

$$\varphi_{x,b,c}(a) = (x\square(a + b + c) - x\square(a + c)) - (x\square(b + c) - x\square c) \in J - J \subseteq J,$$

Так что $\varphi_{x,b,c}(a) \in I \cap J$. ◊

Теперь с помощью множества $Im\, \Phi_{I,J}$ получим описание идеала $S = [I, J]$.

Теорема 1. Пусть $I, J \in \mathfrak{I}(A)$.Тогда $[I, J]$ есть идеал m-алгебры A, порожденный множеством $Im\Phi_{I,J}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ это – утверждение теоремы 4.3.1 из книги [39]. Так что остается доказать для случая $\mathcal{З}$ = К-*Mod*. Пусть $S = [I, J]$. Сначала докажем включение

$$Im\, \Phi_{I,J} \subseteq S. \tag{3.3.11}$$

Для этого предположим, что $a \in I$, $b \in J$; $c \in A$; $x \in$ К. Так как $\Delta_J \subseteq \theta_I^J$, то $(b, b) \in \theta_I^J$. Теперь ввиду того, что θ_I^J есть идеал кольца $(\alpha_I, +, \cdot)$, то $(0, ab) = (b, b)\,(0, a) \in \theta_I^J\ \alpha_I \subseteq \theta_I^J$. Поэтому $ab = \varphi_b(a) \in S$. Далее, так как $(0, a), (c, c) \in \alpha_I$, $(b, b) \in \theta_I^J$ и ввиду того, что идеал θ_I^J стабилен слева в К-модуле α_I, то

$$d = (x\square((c, c) + (0, a) + (b, b)) - x\square((c, c) + (0, a)) - (x\square((c, c) +$$
$$+ (b, b)) - x\square((c, c)) \in \theta_I^J - \theta_I^J \subseteq \theta_I^J,$$

поэтому

$$d = x\square((c, c) + (0, a) + (b, b)) - x\square((c, c) + (0, a)) - x\square((c, c) +$$
$$+ (b, b)) + x\square((c, c) = (x\square(c + b) - x\square c - x\square(c + b) + x\square c,$$
$$x\square(c + a + b) - x\square(c + a) - x\square(c + b) + x\square c) = (0,\ \varphi_{x,b,c}(a)) \in \theta_I^J.$$

Следовательно, $\varphi_{x,b,c}(a) \in S$. Мы заключаем, что верно (3.3.11). Так как $S \in StA$, то отсюда следует, что $\langle\langle Im\ \Phi_{I,J} \rangle\rangle \subseteq S$. Надо доказать, что S – наименьший идеал К-модуля A среди содержащих множество $Im\ \Phi_{I,J}$..

Для доказательства положим $L = \langle\langle Im\ \Phi_{I,J} \rangle\rangle$. Мы имеем

$$L \subseteq S. \tag{3.3.12}$$

Также из (3.3.10) получаем

$$L \subseteq I \cap J. \tag{3.3.13}$$

Будем доказывать обратное включение к (3.3.12). Для этого рассмотрим множество

$$\lambda_L = \{ (b, b + a) \mid b \in J, a \in L \}. \tag{3.3.14}$$

Сначала покажем, что $\lambda_L \in St\alpha_I$. В самом деле, если $a \in L$, $b \in J$; то благодаря (3.3.13) $a \in I$ и $(0, a) \in \alpha_I$, поэтому

$$(b, b + a) = (b, b) + (0, a) \in \Delta_A + \alpha_I \subseteq \alpha_I + \alpha_I \subseteq \alpha_I.$$

Итак, доказано, что $\lambda_L \subseteq \alpha_I$. Теперь для $b_1, b_2 \in J$ и $a_1, a_2 \in L$ так как J и L – идеалы К-модуля A, то

$$(b_1, b_1 + a_1) \pm (b_2, b_2 + a_2) = (b_1 \pm b_2, (b_1 \pm b_2) + (a_1 \pm a_2)) \in \lambda_L .$$

Значит, λ_L есть подгруппа группы $(\alpha_I, +)$. Далее предположим, что $a \in L$, $b \in J$; $c \in A$, $d \in I$. Так как J, $L \in StA$, то $bc \in J$, $ac + ad \in L$. Кроме того, $bd \in Im\ \Phi_{I,J} \subseteq L$. Теперь согласно (3.3.14) имеем

$$(b, b + a)\,(c, c + d) = (bc, bc + (ac + ad + bd)) \in \lambda_L .$$

Так как любой элемент из α_I имеет вид $(c, c + d)$, то отсюда вытекает, что λ_L есть идеал кольца $(\alpha_I, +, \cdot)$. Докажем его стабильность слева. Для этого предположим, что $a \in L$, $b \in J$; $c \in A$, $d \in I$, $x \in$ К. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} f = x\square((c, c + d) + (b, b + a)) - x\square(c, c + d) = x\square(c + b, c + d + b + a) - \\ - x\square(c, c + d) = (x\square(c + b) - x\square c, x\square(c + d + b + a) - x\square(c, c + d)) = \\ = (x\square(c + b) - x\square c, (x\square(c + b) - x\square c) + (x\square(c + d + b) - x\square(c + b) - \\ - x\square(c, c + d) + x\square c) + (x\square(c + d ++ b + a) - x\square(c + d + b)). \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Обозначим

$$d_1 = x\square(c + b) - x\square c,\ d_2 = x\square(c + d + b) - x\square(c + b) - x\square(c, c + d) + x\square c),$$

$$d_3 = x\square(c + d + b + a) - x\square(c + d + b).$$

Так как идеалы J и L стабильны слева в A и $b \in J$, $a \in L$, то $d_1 \in J$, $d_3 \in L$. К тому же по формуле (3.3.8) $d_2 = \varphi_{x,b,c}(d) \in Im\ \Phi_{I,\,J} \subseteq L$. Поэтому $d_2 +$ $+ d_3 \in L + L \subseteq L$ и согласно (3.3.13) и (3.3.14) $f = (d_1, d_1 + (d_2 + d_3)) \in \lambda_L$. Значит, λ_L стабильно слева и это завершает доказательство того, что λ_L является идеалом К-модуля A. Согласно (3.3.14) для любого $b \in J$ $(b, b) \in \Delta_J$, так что $\Delta_J \subseteq \lambda_L$. Теперь, так как θ_I^J – наименьший идеал в α_I среди содержащих Δ_J, то из предыдущего следует, что $\theta_I^J \subseteq \lambda_L$. Это включение приводит к тому, что если $a \in S$, то $(0, a) \in \theta_I^J \subseteq \lambda_L$, и, значит, $a \in L$. Итак, $S \subseteq L$ и вместе с (3.3.12) это дает требуемые равенства $<< Im\ \Phi_{I,\,J} >> = L =$ $= S = [I, J]$. ◊

Выпишем основные свойства взаимных коммутантов идеалов алгебр из $\mathcal{Z}$, следующие из известных свойств взаимных коммутантов конгруэнций алгебр из мальцевских и конгруэнц-модулярных многообразий [3] гл. VI, [28] § 3, [33] § 43, [46],…

Предложение 1. Пусть A есть алгебра из $\mathcal{Z}$, а I, I_1 и J – ее идеалы, $\{ I_\alpha \}_{\alpha\in\Lambda}$ – семейство ее идеалов. Далее пусть $f : A \to B$ – сюръективный гомоморфизм из A на B с ядром P и $C \in SubA$. Тогда для операции [,] : $\mathfrak{I}(A) \times \mathfrak{I}(A) \to \mathfrak{I}(A)$ выполняются следующие свойства :

I1. $I \subseteq I_1 \Rightarrow [I, J] \subseteq [I_1, J]$;

I2. $[I, J] = [J, I] \subseteq I \cap J$;

I3. $[I, \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha] = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} [I, I_\alpha]$;

I4. $f([I, J] + P) = [f(I), f(J)]$;

I5. $[I, J] + P = f^{-1}([f(I + P), f(J + P)])$;

I6. $[I, J] \cap C = [I \cap C, J \cap C]$;

I7. Если $L \in \mathfrak{I}(A)$ и $[I, J] \subseteq L$, то $[\nu_L(I), \nu_L(J)] \subseteq \Delta_{A/L}$. ◊

Возникает вопрос о связи между взаимным коммутантом $[I, J]_K$ в смысле Куроша для идеалов I и J и их взаимным коммутантом $[I, J]$ в смысле Смита.

Предложение 2. Пусть A есть m-алгебра из класса $\mathcal{Z}$, I и J – ее идеалы. Тогда

$$[I, J]_K \subseteq [I, J]. \qquad (3.3.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала предположим, что $\mathcal{З}$ = К-Mod. Пусть $a \in I$, $b \in J$; $x \in$ К. Согласно (3.3.7) и (3.3.8) имеем $ab = \varphi_b(a) \in Im\Phi_{I,\ J}$ и $\varphi_{x,b,c}(a) = x\square(b + a) - x\square\ b - x\square a + x\square 0 = x\square(b + a) - x\square b - x\square a \in Im\ \Phi_{I,J}$.

Теперь так как согласно предложению 3.2.1 $[I, J]_{\mathcal{K}}$ есть наименьший среди идеалов К-модуля $I + J$, содержащих элементы вида ab и $x\square(b + a) - - x\square\ b - x\square a$, то благодаря теореме 1 выводим $[I, J]_{\mathcal{K}} \subseteq \ll Im\ \Phi_{I,J} \gg = [I, J]$.

В случае $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ если а, у $\in$ I, x, z $\in$ J, то согласно (3.3.9) элементы $a\,x = \varphi_x(a)$, $x{\circ}(y + a) - x{\circ}y = \varphi_{x,y}$:, $a{\circ}(y + x) - a{\circ}y = \psi_{x,y}(a)$ принадлежат $Im\ \Phi_{I,\ J}$, а так как согласно предложению 3.2.2 идеал в m-кольце $I + J$, порожденный этими элементами, совпадает с $[I, J]_{\mathcal{K}}$, то согласно теореме 1 $[I, J]_{\mathcal{K}} \subseteq \subseteq \ll Im\ \Phi_{I,J} \gg = [I, J]$.◊

Следующий пример показывает, что включение в (3.3.16) может быть строгим.

Пример 1. Пусть (К, +, ·, ∘) –m-кольцо, где (К, +) = ($\mathbb{Z}_2$, **+**) – это группа вычетов по модулю 2 [9] и К·К = К∘К = 0. Далее, пусть (A, +, ·) – кольцо, где (A, +) = ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, **+**) – прямое произведение двухэлементных групп, а умножение на A – нулевое. Элементы из A будем обозначать в восьмеричной системе исчисления. Положим B = {0, 1, 2, 3} и для $a \in A$ $0\square\ a = 0$, также

$$1\square a = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a \in B, \\ 1, & \text{если} \quad a \in \{5,4,7\}, \\ 3, & \text{если} \quad a = 6. \end{cases} \tag{3.3.17}$$

Отсюда следует, что

$$\forall x \in К\ \forall\ b \in B\ (x\square b = 0), \tag{3.3.18}$$

Покажем, что отображение $x \mapsto x\square$– является гомоморфизмом m-кольца К в m-кольцо A^A преобразований кольца A. Действительно, предположим, что $x, y \in$ К, $a \in A$. Если $a \in B$, то согласно (3.3.18)

$$x\square a + y\square a = 0 + 0 = 0 = (x + y)\square a,\ (x\square a)(y\square a) = 0 =$$
$$= (xy)\square a,\ x\square(y\square a) = x\square 0 = 0 = (x{\circ}y)\square a.$$

Пусть теперь $a \in A \setminus B$. Вычисляем непосредственно, используя (3.3.17) и (3.3.18):

$$x\square a + x\square a = 0 = (x + x)\square a,\ x\square a + 0\square a = x\square a = (x + 0)\square a, (xy)\square a = 0\square a =$$
$$= 0 = (x\square a)(y\square a),\ x\square(0\square a) = x\square 0 = 0 = 0\square a = (x{\circ}0)\square a.$$

Далее, так $1\Box A \subseteq B$, то $x\Box(1\Box a) = 0 = 0\Box a = (x\circ 1)\Box a$. Из этих рассуждений следует, что кольцо A является К-модулем. Так как $B + B \subseteq B$, $B\cdot A = \{0\} \subseteq B$, $К\Box A \subseteq B$, то B есть идеал К-модуля A. Ввиду (3.3.17) согласно предложению 3.2.1 $[B, B]_{\mathcal{K}} = 0$. С другой стороны, благодаря теореме 1

$$\varphi_{1,2,5}(1) = 1\Box(1+2+5) - 1\Box(2+5) - 1\Box(1+5) + 1\Box 5 = 1\Box 6 + 1\Box 7 +$$

$$+ 1\Box 4 + 1\Box 5 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 \in [B, B].$$

Так что $[B, B] \neq [B, B]_{\mathcal{K}}$. ◊

В некоторых важных случаях, однако, значения коммутанта в смысле Куроша и коммутанта в смысле Смита могут совпадать, как показывает следующее.

Предложение 3. Пусть A есть m-алгебра. Тогда

$$[A, A]_{\mathcal{K}} = [A, A]. \qquad (3.3.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ это – утверждение предложения 4.3.2 из книги [39]. Перейдем к случаю $\mathcal{З} = К\text{-}Mod$.

Благодаря предложению 2 имеем включение $[A, A]_{\mathcal{K}} \subseteq [A, A]$. Докажем обратное включение. Согласно следствию 3.2.1 коммутант $A' = [A, A]_{\mathcal{K}}$ есть подмодуль, содержащий все элементы вида ab и $x\Box(b + a) - x\Box b - x\Box a$, где $a, b \in A$, $x \in К$. Из этого следует, что A' содержит все элементы вида $\varphi_b(a)$ и

$$\varphi_{x,b,c}(a) = x\Box(a+b+c) - x\Box(b+c) - x\Box(a+c) + x\Box c = (x\Box(a+b+$$

$$+ c) - x\Box(b+c) - x\Box a) - (x\Box(a+c) - x\Box c - x\Box a.$$

Отсюда следует, что $Im\ \Phi_{A,A} \subseteq A'$. Далее, по определению есть идеал в К-модуле $A \vee A = A$, так что согласно теореме 1 $[A, A] = \langle\langle Im\ \Phi_{A,A} \rangle\rangle \subseteq [A, A]_{\mathcal{K}}$ и, значит, $[A, A] = A'$. ◊

3.4. Отношение централизуемости идеалов

Пусть A есть m-алгебра и $I, J \in \mathfrak{I}(A)$. Следуя книге [73], будем говорить, что конгруэнция α_J *централизует конгруэнцию* α_I *при помощи отношения* $\sigma = (\alpha_J \mid \alpha_I)$, если выполняются следующие условия :

S1. σ является конгруэнцией отношения α_I, рассматриваемого как алгебру;

S2. $\forall\ a, b, c, d \in A\ (((a, b),(c, d)) \in \sigma \Rightarrow (a, c) \in \alpha_J)$;

S3. Соответствие π: $(a, b)^\sigma \to a^{\alpha_J}$, где $(a, b)^\sigma$ означает смежный класс конгруэнции σ, содержащий $(a, b) \in \alpha_I$ (т. е. σ-класс), a^{α_J} – это α_J-класс, содержащий элемент $a \in A$, и для $(c, d) \in (a, b)^\sigma \pi((c, d)) = c$, является биекцией σ-класса $(a, b)^\sigma$ на α_J-класс a^{α_J};

S4. $\forall\ a, b \in A\ ((a, b) \in \alpha_J \Rightarrow (a, a)\ \sigma\ (b, b))$;

S5. $\forall\ a, b, c, d \in A\ ((a, b)\sigma(c, d) \Rightarrow (b, a)\sigma(d, c))$;

S6. $\forall\ a, b, c, d, e, f \in A\ ((a, b)\ \sigma\ (c, d) \& (b, e)\sigma(d, f) \Rightarrow (a, e)\sigma(c, f))$.

Отметим, что ввиду перестановочности конгруэнций m-алгебр из З такое отношение , если оно есть, единственно для данных α_J и α_I (предложение 221 [73]), так что мы будем также говорить, что конгруэнция α_J *централизует* α_I без упоминания отношения σ, и для этого факта будем употреблять обозначение : α_J©α_I. Также будем в этом случае говорить, что идеал J *централизует идеал* I и писать J©I. Некоторые свойства отношения централизуемости идеалов выписаны в следующем утверждении:

Следствие 1. Пусть A есть m-алгебры; J, I_1, I_2 – ее идеалы. Тогда имеют место следующие соотношения:

1) J©0 ;

2) J©$I_1 \Rightarrow I_1$©J;

3) J©I_2 & $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow J$©$I_1$;

4) J©I_1& J©$I_2 \Rightarrow J$©$(I_1 + I_2)$;

5) Для данного идеала J существует наибольший среди таких идеалов I, что J©I. ◊

Упомянутый в п. (v) идеал $max\{\ I \in \Im(A)\ |\ J$©$I\ \}$ обозначается через $\eta(J)$ и называется *централизатором идеала* J в A. Из определений и предложения 231 [73] вытекает

Следствие 2. Пусть J − идеал m-алгебры A. Тогда

6) J©$\eta(J)$;

7) $\forall\ I \in \Im(A)$ (J©$I \Leftrightarrow I \subseteq \eta(J)$;

8) $\forall\ B \in SubA\ (\eta(J) \cap B \subseteq \eta(J \cap B)$. ◊

Связь между понятиями коммутанта и централизуемости выражает следующая

Теорема 1. Пусть A − m-алгебра и $I, J \in \Im(A)$. Тогда

$$J©I \Leftrightarrow [I, J] = 0. \tag{3.4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваем случай $\mathfrak{Z}$ = K-*Mod*.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что выполняется равенство

$$[I, J] = 0. \tag{3.4.2}$$

Согласно теореме 2.3.1 тогда имеем равенство

$$I{\cdot}J = 0, \tag{3.4.3}$$

а также

$$\varphi_{x,b,c}\,(a) = x\square(a + b + c) - x\square(b + c) - x\square(a + c) + x\square c = 0 \tag{3.4.4}$$

для любых $a \in I$, $b \in J$, $c \in A$, $x \in$ K. Рассмотрим отношение σ на множестве α_J:

$$\sigma = \{((c, c + a), (c + b, c + b + a)) \mid a \in I, b \in J, c \in A\}. \tag{3.4.5}$$

Докажем, что конгруэнция α_J централизует α_I при помощи σ. Для этого надо проверить выполнение условий S1–S6. Если $a \in I$, $b \in J$, $c \in A$, то $(c, c + a) \in \alpha_I$ и $(c + b, c + b + a) \in \alpha_I$, поэтому $\sigma \subseteq \alpha_I \times \alpha_I$. Теперь для проверки S1 предположим, что $a \in I$, $c \in A$. Согласно (3.4.5) $(c, c + a)\sigma(c, c + a)$, а так как любой элемент из α_I имеет вид $(c, c + a)$, то отсюда заключаем, что отношение σ рефлексивно. Для проверки симметричности предположим, что $d, e, f, g \in A$ и $(d, e)\sigma(f, g)$. Тогда для некоторых $a \in I$, $b \in J$ $e = d + a$, $f = d + b$, $g = d + b + a$. Отсюда следует, что $d = f - b$, $e = f - b + a$, $g = f + a$ и так как $-b \in J$, $a \in I$, то согласно (3.4.5) имеем $(f, g)\sigma(d, e)$. Это означает, что σ симметрично. Предположим, что для некоторых $d, e, f, g, h, j \in A$ будет $(d, e)\sigma(f, g)$ и $(f, g)\sigma(h, j)$. Тогда существуют a_1, $a_2 \in I$, b_1, $b_2 \in J$, такие, что $e = d + a_1$,

$$f = d + b_1,\ g = d + b_1 + a_1 = f + a_2 = d + b_1 + a_2,\ h = f + b_2 = d + b_1 + b_2,$$

$$j = f + b_2 + a_2 = d + b_1 + b_2 + a_2.$$

Отсюда следует, что $a_1 = a_2$ и $h = d + b_1 + b_2$ и $j = d + b_1 + b_2 + a_1$. Так как $b_1 + b_2 \in J$ и $a_1 \in I$, то согласно (3.4.5) имеем $(d, e)\sigma(h, j)$. Тем самым установлено, что σ транзитивно. Итак, σ – эквивалентность на α_I. Для того, чтобы показать, что это – конгруэнция, достаточно проверить, что σ – под-m-алгебра m-алгебры $\alpha_I \times \alpha_I$. Ради этого предположим, что a_1, $a_2 \in I$, b_1, $b_2 \in J$, c_1, $c_2 \in A$. Тогда

$$((c_1, c_1 + a_1),(c_1 + b_1, c_1 + b_1 + a_1)) \pm ((c_2, c_2 + a_2),(c_2 + b_2, c_2 + b_2 + a_2)) =$$
$$= ((c_1 \pm c_2, (c_1 \pm c_2) + (a_1 \pm a_2)),((c_1 \pm c_2) + (b_1 \pm b_2), (c_1 \pm c_2) + (b_1 \pm b_2) +$$
$$+ (a_1 \pm a_2)))$$

и так как $a_1 \pm a_2 \in I$, $b_1 \pm b_2 \in J$, то отсюда следует, что σ – подгруппа группы $(\alpha_I \times \alpha_I, +)$. Далее, при тех же $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$, $c_1, c_2 \in A$, получаем, используя (3.4.3) :

$$((c_1, c_1 + a_1),(c_1 + b_1, c_1 + b_1 + a_1)) ((c_2, c_2 + a_2),(c_2 + b_2, c_2 + b_2 + a_2)) =$$
$$= ((c_1c_2, c_1c_2 + (a_1c_2 + a_1a_2 + c_1a_2)), (c_1c_2 + (b_1c_2 + b_1b_2 + c_1b_2), c_1c_2 +$$
$$+ (b_1c_2 + b_1b_2 + c_1b_2) + (a_1c_2 + a_1a_2 + c_1a_2))).$$

Так как $I, J \in StA$, то $a_1c_2 + a_1a_2 + c_1a_2 \in I$, $b_1c_2 + b_1b_2 + c_1b_2 \in J$, поэтому из предыдущего следует, что σ – подкольцо кольца $(\alpha_I \times \alpha_I, +, \cdot)$. Предположим теперь, что $a \in I$, $b \in J$, $c \in A$, $x \in$ К. Тогда, используя (3.4.4), имеем

$$x\square((c, c + a), (c + b, c + b + a)) = ((x\square c, x\square(c + a), (x\square(c + b), x\square(c + b +$$
$$+ a))) = ((x\square c, x\square c + (x\square(c + a) - x\square c), (x\square c + (x\square(c + b) - x\square c) , x\square c +$$
$$+ (x\square(c + b) - x\square c) + (x\square(c+ b + a) - x\square(c + b))) = ((x\square c, x\square c + (x\square(c +$$
$$+ a) - x\square c), (x\square c + (x\square(c + b) - x\square c) , x\square c + (x\square(c + b) - x\square c) +$$
$$+ (x\square(c + a) - x\square c)) \in \sigma.$$

Последнее следует из (3.4.5) и из того, что благодаря стабильности слева идеалов I и J $x\square(c + a) - x\square c \in I$ и $x\square(c + b) - x\square c \in J$. Теперь так как произвольный элемент из σ имеет вид $((c, c + a), (c + b, c + b + a))$, мы заключаем, что $К\square\sigma \subseteq \sigma$ и σ является подмодулем К-модуля $\alpha_I \times \alpha_I$ и потому должна быть конгруэнцией на α_I. S1 доказано.

Для доказательства выполнения S2 предположим, что $d, e, f, g \in A$ и $(d, e)\sigma(f, g)$. Тогда, как и выше, для некоторых $a \in I$, $b \in J$ $d + a$, $f = d + b$, $g = d + b + a$. Отсюда следует, что $(d, f) = (d, d + b) \in \alpha_J$, что и требовалось для S2.

Для доказательства S3 предположим, что d, e∈A и $(d, e) \in \alpha_I$. Тогда для некоторого $a \in I$ будет $e = d + a$ и согласно (2.4.5) σ-класс $(d, d + + a)^\sigma$ состоит из пар вида $(d + b, d + b + a)$, где $b \in J$. Поэтому соответствие π: $(d + b, d + b + a) \mapsto d + b$ взаимно-однозначно отображает смежный класс $(d, d + a)^\sigma$ на смежный класс d^{α_J} S3 доказано.

Для доказательства S4 предположим, что $d, e \in A$ и $(d, e) \in \alpha_J$. Тогда $e = d + b$ для некоторого $b \in J$. Значит, $((d, d), (e, e)) = ((d, d + + 0), (d + b, d + b + 0)) \in \sigma$, что и требовалось для S4.

Чтобы доказать S5, допустим, что $d, e, f, g \in A$ и $(d, e)\sigma(f, g)$. Тогда для некоторых $a \in I$, $b \in J$ будет $e = d + a$, $f = d + b$, $g = d + b + + a$. В этом случае $d = e - a$, $g = e + b$, $f = e + b - a$ и так как $-a \in I$, $b \in J$, то согласно (2.4.5) имеем

$$((e, d), (g, f)) = ((e, e - a), (e + b, e + b - a)) \in \sigma.$$

S5 выполняется.

Остается рассмотреть S6. Для этого предположим, что $d, e, f, g, h, j \in A$, $(d, e)\sigma(f, g)$ и $(e, h)\sigma(g, j)$. Тогда существуют $a_1, a_2 \in I$ и $b_1, b_2 \in J$, такие, что

$$e = d + a_1, f = d + b_1, g = d + b_1 + a_1 = e + b_2 = d + a_1 + b_2, h = e + a_2 = d + a_1 + a_2, j = e + b_2 + a_2 = d + a_1 + b_2 + a_2.$$

Отсюда следует, что $b_1 = b_2$ и так как $a_1 + a_2 \in I$, $b \in J$, то согласно (3.4.5) имеем

$$((d, h),(f, j)) = ((d, d + a_1 + a_2),(d + b_1, d + b_1 + a_1 + a_2)) \in \sigma,$$

Что и требовалось. Итак, $\alpha_J © \alpha_I$ и $J © I$. Это завершает доказательство достаточности.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предполагаем, что $I, J \in StA$ и что конгруэнция α_J централизует α_I при помощи отношения $\sigma = (\alpha_J \mid \alpha_I)$, для которого выполняются условия S1–S6. Согласно условию S1 σ является конгруэнцией К-модуля α_I, и ее определяет некоторый идеал ι этого К-модуля, являющийся смежным классом $(0, 0)^\sigma$. Таким образом,

$$\iota = \{(b, b + a) \mid b \in A, a \in I, (0, 0)\sigma(b, b + a)\}.$$

Из условия S2 следует, что если $(b, b + a) \in \iota$, то $(0, b) \in \alpha_J$ и поэтому $b \in J$. Обратно, если $b \in J$, то согласно S4 $(0, 0)\sigma(b, b)$, поэтому ι состоит только из пар вида $(b, b + a)$, $b \in A$. К тому же из S3 получаем, что σ-класс $\iota = (0, 0)^\sigma$ находится во взаимно-однозначном соответствии с α_J-классом $0^{\alpha_J} = J$. Следовательно, для всякого $b \in J$ существует единственный элемент $a \in I$ такой, что $(b, b + a) \in \iota$. На самом деле этот элемент a должен быть равен нулю, так как согласно S4 $(0, 0)\sigma(b, b)$ для любого $b \in J$. Таким образом, $\iota = \Delta_J$. Отсюда легко следует, что для σ выполняется равенство (3.4.5). Теперь будем доказывать равенство

$$Im\, \Phi_{I,J} = 0, \tag{3.4.6}$$

откуда благодаря теореме 3.3.1 будет следовать требуемое равенство $[I, J] = 0$. Для доказательства предположим, что $a \in I$, $b \in J$. Так как $(b, b) \in \Delta_J \in St\alpha_I$, $(0, a) \in \alpha_I$, то $(0, ab) = (0, a)\,(b, b) \in \alpha_I \Delta_J \subseteq \Delta_J$, поэтому $ab = 0$ и

$$Im\, \varphi_b = 0 \tag{3.4.7}$$

для любого $b \in J$. Пусть теперь $a \in I$, $b \in J$, $c \in A$, $x \in$ К. Тогда $(c, c + a) \in \alpha_I$, $(b, b) \in \Delta_J$. Опираясь на стабильность слева идеала Δ_J в К-модуле α_I, получим

$$x\Box((c, c + a) + (b, b)) - x\Box(c, c + a) = (x\Box(c + b) - x\Box c, x\Box(c + a + b) - x\Box(c + a)) \in \Delta_J.$$

Отсюда следует, что $x\square(c+b) - x\square c = x\square(c+a+b) - x\square(c+a))$ и согласно (3.3.8) $\varphi_{x,b,c}(a) = x\square(c+a+b) - x\square(c+a)) - x\square(c+b) + x\square c = 0$.

Поэтому из (3.4.7) следует (3.4.6). Необходимость доказана. Доказательство для случая $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ проводится аналогично с заменой знака "$\square$" на знак "$\circ$".◊

С л е д с т в и е 3. Для всякого идеала J m-алгебры A имеет место равенство

$$\eta(J) = \sum\{I \in \mathfrak{I}(A) \mid [I, J] = 0\}\Diamond \tag{3.4.8}$$

Отношение централизуемости идеалов тесно связано с прямыми разложениями, как показывает следующее следствие. Перед его формулировкой рассмотрим следующую ситуацию. Пусть A есть m-алгебра и B, C, D, E – ее идеалы. Предположим, что

$$A = B \oplus C = D \oplus E. \tag{3.4.9}$$

Обозначим через π_B, π_C, π_D, π_E естественные проекции К-алгебры A соответственно на компоненты B, C, D, E.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что $\pi_E(C) \in \mathfrak{I}(\text{К})$, поскольку $\pi_E(C)$ является идеалом m-алгебры E как образ идеала C при сюръективном гомоморфизме π_E, а тогда $\pi_E(C)$ есть идеал m-алгебры A как идеал прямого слагаемого E согласно следствию 2.2.3.

С л е д с т в и е 4. В ситуации, рассмотренной выше, идеал B централизует идеал $\pi_E(C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 требуется доказать равенство

$$[B, \pi_E(C)] = 0. \tag{3.4.10}$$

Для этого предположим, что $b \in B$, $c \in C$. Используя свойства естественных проекций прямой суммы, получим

$$0 = bc = b(\pi_D(c) + \pi_E(c)) = b\pi_D(c) + b\,\pi_E(c). \tag{3.4.11}$$

Так как $D, E \in \mathfrak{I}(A)$, то $b\pi_D(c) \in D$, $b\pi_E(c) \in E$, поэтому из (3.4.11) следует, что $b\pi_E(c) = 0$. Отсюда получаем, что

$$\forall b \in B \forall c \in C(\varphi_b(\pi_E(c)) = 0). \tag{3.4.12}$$

Далее рассмотрим случай $\mathcal{З} = $ К-*Mod.* Так как π_D и π_E – эндоморфизмы К-модуля A и используя свойство в) прямой суммы (п. 2.2), для любых $x \in \text{К}$, $b \in B$, $c \in C$ имеем

$$x\square(\pi_D(b) + \pi_D(c)) = x\square\pi_D(b+c) = \pi_D(x\square(b+c)) = \pi_D(x\square b + x\square c) =$$
$$= \pi_D(x\square b) + \pi_D(x\square c), \tag{3.4.13}$$

и аналогично

$$x\square(\pi_E(b) + \pi_E(c)) = \pi_E(x\square b) + \pi_E(x\square c). \qquad (3.4.14)$$

Теперь зафиксируем $a\in A$, $x\in К$, $b\in B$, $c\in C$. Положим $b_1 = \pi_B(a)$, $c_1 =$ $= \pi_C(a)$. Используя свойства естественных проекций прямой суммы, равенства (3.4.13) и (3.4.14), а также формулу (3.3.8), получаем

$$\varphi_{x,b,c}(\pi_E(c)) = x\square(a + b + \pi_E(c)) - x\square(a + b) - x\square(a + \pi_E(c)) + x\square a =$$
$$= x\square(b_1 + c_1 + b + \pi_E(c)) - x\square(b_1 + c_1 + b) - x\square(b_1 + c_1 + \pi_E(c)) +$$
$$+ x\square(b_1 + c_1) = x\square(\pi_D(b_1) + \pi_E(b_1) + \pi_D(c_1) + \pi_E(c_1) + \pi_D(b) + \pi_E(b) +$$
$$+ \pi_D(\pi_E(c)) + \pi_E(\pi_E(c))) - x\square(\pi_D(b_1) + \pi_E(b_1) + \pi_D(c_1) + \pi_E(c_1) + \pi_D(b) +$$
$$+ \pi_E(b)) - x\square(\pi_D(b_1) + \pi_E(b_1) + \pi_D(c_1) + \pi_E(c_1) + \pi_D(\pi_E(c)) + \pi_E(\pi_E(c))) +$$
$$+ x\square(\pi_D(b_1) + \pi_E(b_1) + \pi_D(c_1) + \pi_E(c_1)) = x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(b) + \pi_D(c_1)) +$$
$$+ (\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1) + \pi_E(b) + \pi_E(c))) - x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(b) + \pi_D(c_1)) +$$
$$+ (\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1) + \pi_E(b))) - x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(c_1)) + (\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1) +$$
$$+ \pi_E(c))) + x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(c_1)) + \pi_E(b_1) + \pi_E(c_1))) = x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(b) +$$
$$+ \pi_D(c_1)) + x\square((\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1) + \pi_E(b) + \pi_E(c))) - x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(b) +$$
$$+ \pi_D(c_1)) - x\square(\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1) + \pi_E(b)) - x\square((\pi_D(b_1) +$$
$$+ \pi_D(c_1)) - x\square((\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1) + \pi_E(c)) + x\square((\pi_D(b_1) + \pi_D(c_1)) +$$
$$+ x\square(\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1)) = x\square((\pi_E(b_1 + b) + \pi_E(c_1 + c)) - x\square(\pi_E(b_1 + b) +$$
$$+ \pi_E(c_1)) - x\square((\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1 + c)) + x\square((\pi_E(b_1) + \pi_E(c_1)) = x\square(\pi_E(b_1 + b)) +$$
$$+ x\square(\pi_E(c_1 + c)) - x\square(\pi_E(b_1 + b)) - x\square(\pi_E(c_1)) - x\square(\pi_E(b_1)) - x\square(\pi_E(c_1 + c)) +$$
$$+ x\square(\pi_E(b_1) + x\square(\pi_E(c_1)) = 0.$$

Отсюда и из (3.4.12) следует, что $Im\ \Phi_{B,\ \pi_{\mathrm{E}}(C)} = 0$ и согласно теореме 3.3.1 выполняется (3.4.10). Случай $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$ рассматривается аналогично.◊

Следствие 5. Пусть B, $C\in \mathfrak{I}(A)$ и $A = B\oplus C$. Тогда B©C.

Доказательство. Полагая в предыдущем следствии $B = D$, $C = E$. Тогда $\pi_E(C) = C$ и B©C.

Упражнение 1. Провести детальное доказательство теоремы 1 и следствия 4 для случая $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$.

3.5. Центральные идеалы и центральное произведение

Идеал I m-алгебры A из $\mathcal{Z}$ назовем *центральным*, если выполняется равенство

$$[I, A] = 0. \tag{3.5.1}$$

Согласно теореме 3.4.1 это означает, что идеал I централизуется идеалом A, т. е. I ©A

Следствие 1. Пусть A есть К-модуль и $I \in StA$. Идеал I тогда и только тогда является центральным, когда для любых $x \in$ К, $a \in A$, $b \in I$ выполняются равенства:

$$ab = 0, \tag{3.5.2}$$

$$x\square(a + b) = x\square a + x\square b. \tag{3.5.3}$$

Доказательство. Пусть $I \in StA$ и $[I, A] = 0$. Тогда $Im\ \Phi_{I, A} = 0$ и согласно теореме 3.3.1 $IA = 0$ и для $x \in$ К, $a \in A$, $b \in I$

$$\varphi_{x,a,0}(b) = x\square(a + b + 0) - x\square(a + 0) - x\square(b + 0) + x\square 0 = x\square(a +$$

$$+ b) - x\square(a) - x\square b = 0,$$

откуда следуют равенства (3.5.2) и (3.5.3). Обратно, пусть для идеала I эти соотношения выполняются. Тогда для $x \in$ К, $a \in A$, $b \in I$, $c \in A$ получаем

$$\varphi_a(b) = ab = 0,\ \varphi_{x,a,c}(b) = x\square(a + b + c) - x\square(a + c) - x\square(b + c) + x\square c =$$

$$= (x\square(a + c + b) - x\square(a + c) - x\square b) - (x\square(b + c) - x\square b - x\square c = 0.$$

Отсюда следует, что $Im\ \Phi_{I, A} = 0$ и согласно теореме 3.3.1 $[I,A] = 0$, поэтому I – центральный идеал. ◊

Совсем просто доказывается

Следствие 2. Пусть A есть m-кольцо и $I \in \Im(A)$. Идеал I тогда и только тогда является центральным, когда выполняются соотношения $I{\cdot}A = 0 = I{\circ}A$, а также $\forall a \in I \forall x, y \in A (x \circ (y + a) = x \circ y)$. ◊

Замечание 1. Понятие центрального идеала, а также вводимого ниже центрального произведения имеют аналоги в теории групп [50] и теории почтиколец [72], и соответствующие утверждения проходят для m-алгебр, как будет показано ниже.◊

Упражнение 1. Показать, что свойство быть центральным идеалом сохраняется при сюръективных гомоморфизмах.◊

Следствие 3. Пусть A – m-алгебра из $\mathcal{Z}$ и B, C, I – ее идеалы, а также $A = B \oplus C$ и $I \cap B = 0 = I \cap C$. Тогда I – центральный идеал.

Доказательство. Согласно утверждению С2 предложения 3.3.1 $[I, B] \subseteq I \cap B = 0$, и по теореме 3.4.1 I ©B. Аналогично, I ©C. Теперь благодаря свойству (4) из следствия 3.4.1 идеал I централизует $B + C = A$, т. е. I – центральный идеал. ◊

Используя понятие центрального идеала, определим понятие центрального произведения m-алгебр. Именно предположим, что $A = B \oplus C$, и идеалы B и C имеют изоморфные центральные идеалы, соответственно I и J. Тогда согласно следствию 2.2.3 I и J являются идеалами m-алгебры A. Далее, согласно следствию 3.4.5 будет B ©C, откуда, используя свойство (2) из следствия 3.4.1, получаем, что I ©C. Теперь из I ©B благодаря свойству (4) из следствия 3.4.1 выводим, что I ©A, т. е. I – центральный идеал. Аналогично J – центральный идеал. Пусть δ – изоморфизм m-алгебры I на J. Рассмотрим множество

$$D = \{\, a + \delta(a) \mid a \in I \,\}. \tag{3.5.4}$$

Лемма 1. Множество D является центральным идеалом в A.

Доказательство. Ясно, что $D \le A$. Пусть $a \in I$, $b \in B$, $c \in C$, $x \in$ К, тогда используя то, что I©B, J©C и следствие 1, имеем

$$(a + \delta(a))(\, b + c) = a\, b + \delta(a)c = 0 + 0 = 0 \in D.$$

В случае $\mathcal{Z}$ = К-*Mod.* К- получим

$$x\Box(a + \delta(a) + b + c) - x\Box(b + c) = x\Box(a + b + \delta(a) + c) - x\Box(b + c) =$$
$$= x\Box(a + b) + x\Box(\delta(a) + c) - x\Box b - x\Box c = x\Box a + x\Box b + x\Box\delta(a) + x\Box c -$$
$$- x\Box b - x\Box c = x\Box a + x\Box\delta(a) = x\Box a + \delta(x\Box a) \in D.$$

Отсюда следует, что $D \in StA$. В случае $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$ из этого также следует, что $D \in St_A A$. Также тогда

$$(a + \delta(a)) \circ (\, b + c) = a \circ b + \delta(a) \circ c = 0 + 0 = 0 \in D.$$

Значит, $D \trianglelefteq A$. Теперь, так как $D \cap B = 0 = D \cap C$, то по следствию 2 D – центральный идеал. ◊

В этих обозначениях будем называть фактор-m-алгебру $A/D = B \oplus C/D$ *центральным произведением m-алгебр* B и C и будем его обозначать через $B \underset{D}{\oplus} C$. В частности, прямая сумма $B \oplus C$ является центральным произведением при $D = 0$.

Лемма 2. Пусть A, B, C, I как в следствии 3. Тогда A / I является центральным произведением m-алгебр B и C.

Доказательство. Согласно следствию 3 I есть центральный идеал в A. Как обычно, обозначаем через π_B естественную проекцию прямой суммы $B \oplus C$ на B, а через π_C – естественную проекцию $B \oplus C$ на C. Так как свойство быть центральным идеалом сохраняется при сюръективных гомоморфизмах (упражнение 1), то $\pi_B(\, I\,)$ и $\pi_C(\, I\,)$ являются центральными идеалами соответственно в B и C. Теперь из того, что $I \cap B = 0 = I \cap C$, следует, что соответствие δ, которое каждому элементу вида $\pi_B(a)$, где $a \in I$, ставит в соответствие элемент $\pi_C(a)$, является изоморфизмом К-модуля $\pi_B(I)$ на $\pi_C(I)$. Действительно, если $a \in I$, то $a = \pi_B(a) + \pi_C(a)$. Если теперь $\pi_B(a) = 0$, то $a = \pi_C(a) \in I \cap C = 0$, поэтому $\pi_C(a) = 0$. Обратно, если $\pi_C(a) = 0$, то $\pi_B(a) = 0$. Теперь то, что соответствие δ является инъективным гомоморфизмом m-алгебр, очевидно. Оно также и сюръективно, так как $\delta(\pi_B(I)) = \pi_C(a)$. При этом $I = \{ b + \delta(b) \mid b \in \pi_B(I) \}$. Поэтому согласно лемме 1 $A = B \underset{I}{\oplus} C$.◊

Теорема 1. $A = B \oplus C$ – прямая сумма идеалов B и C. Тогда любой гомоморфный образ m-алгебры A является центральным произведением некоторых гомоморфных образов m-алгебр B и C.

Доказательство. Пусть $I \trianglelefteq A$. Если $I \cap B = 0 = I \cap C$, то по лемме 2 A/I есть центральное произведение B и C. Далее предположим, что это не выполняется. Так как $I \cap B \in \Im(B)$, $I \cap C \in \Im(C)$, то можно рассмотреть фактор-m-алгебры $B_1 = B/(I \cap B)$, $C_1 = C/(I \cap C)$ и прямое произведение $A_1 = B_1 \times C_1$. Рассмотрим соответствие δ из I в A_1, где для $a \in I$ $\delta(a) = (\pi_B(a) + I \cap B, \pi_C(a) + I \cap C)$. Нетрудно видеть, что δ есть гомоморфизм m-алгебр и $\delta(I) \in \Im(A_1)$. Покажем, что фактор-m-алгебры A/I и $A_1/\delta(I)$ изоморфны. Для этого рассмотрим соответствие μ, которое каждому смежному классу $a + I \in A/I$, где $a \in A$, ставит в соответствие смежный класс

$$(\pi_B(a) + I \cap B, \pi_C(a) + I \cap C).+ \delta(I) \in A_1/\delta(I).$$

Покажем сначала, что μ является отображением. Для этого предположим, что $a, b \in A$ и $a + + I = b + I$. Тогда $a - b \in I$, поэтому $(\pi_B(a-b) + I \cap B, \pi_C(a-b) + I \cap C) \in \delta(I)$ и, значит,

$$(\pi_B(a) + I \cap B, \pi_C(a) + I \cap C) - (\pi_B(b) + I \cap B, \pi_C(b) + I \cap C) \in \delta(I),$$

так что

$$(\pi_B(a) + I \cap B, \pi_C(a) + I \cap C) + \delta(I) = (\pi_B(b) + I \cap B, \pi_C(b) + I \cap C) + \delta(I).$$

Это означает, что μ – отображение. Нетрудно видеть, что μ – гомоморфизм m-алгебр. Докажем его инъективность. Действительно, если $a \in A$ и $\mu(a + I) = 0$, это означает, что $(\pi_B(a) + I \cap B, \pi_C(a) + I \cap C) \in \delta(I)$, Из чего следует, что для некоторого $b \in I$ будет

$$(\pi_B(a) + I \cap B, \pi_C(a) + I \cap C) = (\pi_B(b) + I \cap B, \pi_C(b) + I \cap C).$$

Но тогда $\pi_B(a) - \pi_B(b) \in I \cap B$, $\pi_B(a) - \pi_C(b) \in I \cap C$, а из этого выводим

$$a = \pi_B(a) + \pi_C(a) \in \pi_B(b) + I \cap B + \pi_C(b) + I \cap C \subseteq \pi_B(b) + \pi_C(b) + I =$$

$$= b + I = I.$$

Следовательно, $a + I = I$, что и требовалось для инъективности μ. То, что μ сюръективно, очевидно. Таким образом, фактор-m-алгебра A / I изоморфна фактор-m-алгебре $A_1 / \delta(I)$. Остается показать, что эта последняя является центральным произведением m-алгебр B_1 и C_1. Для этого воспользуемся леммой 2, для чего ввиду того A_1 является прямой суммой К-модулей $B_1 \times 0$ и $C_1 \times 0$, изоморфных соответственно B_1 и C_1, достаточно показать, что $\delta(I) \cap (B_1 \times 0) = 0 = \delta(I) \cap (C_1 \times 0)$. Для этого предположим, что $a \in I$ и $\delta(a) \in B_1 \times 0$. По определению δ это означает, что $\pi_C(b) \in I \cap C$, поэтому $\pi_B(b) = b - \pi_C(b) \in I - I \subseteq I$, и, следовательно, $\pi_B(b) \in I \cap B$. Значит, $\delta(a) = 0$ и $\delta(I) \cap (B_1 \times 0) = 0$. Совершенно аналогично, $\delta(I) \cap (C_1 \times 0) = 0$. Применяя лемму 2, приходим к тому, что $A_1 / \delta(I)$ – центральное произведение фактор-m-алгебр $B_1 = B / (I \cap B)$, $C_1 = C / (I \cap C)$, причем это центральное произведение изоморфно фактор-m-алгебре A / I. Мы заключаем, что любой гомоморфный образ прямой суммы $B \oplus C$ является центральным произведением фактор-m-алгебр компонент.◊

3.6. Центр *m*-алгебры

Пусть A есть m-алгебра. Из утверждения (5) следствия 3.4.1 следует, что среди центральных идеалов существует наибольший $\eta(A)$, он называется *центром m-алгебры A* и обозначается через $Z(A)$. Из следствия 3.5.1 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е 1. Пусть A есть К-модуль. Тогда $Z(A)$ состоит из таких элементов $a \in A$, что для любых $x \in$ К, $b \in A$ выполняются равенства:

$$ab = 0, \tag{3.6.1}$$

$$x \square (a + b) = x \square a + x \square b. \ \lozenge \tag{3.6.2}$$

Из следствия 3.5.2 или предложения 4.4.1 [39] получаем

С л е д с т в и е 2. Пусть A есть m-кольцо из $\mathcal{K}_0$. Тогда $Z(A)$ состоит из таких элементов $a \in A$, что для любых $b, c \in A$ выполняются равенства:

$$ab = 0 = a \circ b, \tag{3.6.3}$$

$$c \circ (a + b) = c \circ b. \ \lozenge \tag{3.6.4}$$

Используя предложение 3.1.1 и следствие 3.1.5, получаем

С л е д с т в и е 3. Для любой m-алгебры A ее центр является абелевой m-алгеброй. ◊

С л е д с т в и е 4. m-алгебра A является абелевой тогда и только тогда, когда $A' = 0$ и тогда и только тогда, когда $Z(A) = A$. ◊

Лемма 1. Пусть A есть m-алгебра и M – такая ее под-m-алгебра, что

$$M + Z(A) = A. \tag{3.6.5}$$

Тогда $M \in \Im(A)$ и факторалгебра A/M является абелевой m-алгеброй.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{З} =$ К-*Mod.* В предположениях леммы пусть $m \in M$, $a \in A$, $x \in$ К. Рассмотрим элементы am и $x\square(a + m) - x\square a$. Ввиду (3.6.5) $a = m_1 + b$ для некоторых $m_1 \in M$, $b \in Z(A)$. Теперь согласно (3.6.1) и (3.6.5)

$$am = (m_1 + b)m = m_1 m + bm = m_1 m \in M, x\square(m + a) - x\square a = x\square(m + m_1 + b) -$$

$$- x\square(m_1 + b) = x\square(m + m_1) + x\square b - x\square m_1 - x\square b = x\square(m + m_1) - x\square m_1 \in M.$$

Отсюда следует, что $M \in StA$. Далее, используя третью теорему о гомоморфизмах, имеем

$$A/M = (M + Z(A))/M \approx Z(A)/(M \cap Z(A)).$$

Из этого выводим с использованием следствия 3 и следствия 3.1.2, что A/M – абелев К-модуль.

В случае $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ предположим, что $m \in M$, a, $c \in A$. Ввиду (3.6.5) тогда $a = m_1 + b$ для некоторых $m_1 \in M$, $b \in Z(A)$. Воспользовавшись (3.6.3), (3.6.4) и следствием 2, получаем

$$a{\cdot}m = (m_1 + b){\cdot}m = m_1{\cdot}m + bm = m_1{\cdot}m \in M, c\circ(m + a) - c\circ a = c\circ(m + m_1 +$$

$$+ b) - c\circ(m_1 + b) = c\circ(m + m_1) - c\circ m_1 \in M,\ m\circ a = m\circ(m_1 + b) = m\circ m_1 \in M.$$

Следовательно, $M \in \Im(A)$. Теперь так же, как и выше, устанавливаем, что фактор-m-кольцо A/M абелево.◊

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть A есть m-алгебра и B, $C \in \Im(A)$. Если существует такой идеал $D \in \Im(A)$, что

$$A = B \oplus D = C \oplus D, \tag{3.6.6}$$

Тогда идеалы B и C называются *прямо подобными*. В этой ситуации по третьей теореме о гомоморфизмах $B \approx A/C \approx C$. Более того, имеет место

С л е д с т в и е 5. Пусть выполняется (3.6.6) и пусть π_C: $A \to C$, π_D: $A \to D$ – проекции второй прямой суммы. Тогда гомоморфизм $\pi_C|_B : B \to C$ является изоморфизмом и $\pi_D(B) \subseteq Z(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi = \pi_C|_B$. Гомоморфизм φ является сюръективным, так как если $c \in C$, то из (3.6.6) следует, что $c = b + d$ для некоторых $b \in B$ и $d \in D$. Отсюда следует, что $b = c - d$ и из $c \in C$, $d \in D$ выходит, что $\varphi(b) = \pi_C(b) = c$. Далее, если $b \in B$ и $\pi_C(b) = 0$, то $b =$ $= \pi_D(b) \in C \cap D = 0$. Так что φ есть изоморфизм К-модулей. Для доказательства второй части утверждения разложение (3.6.4) представим в виде $A = D \oplus B = C \oplus D$, тогда в следствии 3.4.4. в качестве B выступает D, в качестве C выступает B, а в качестве E – идеал D. Из этого следствия имеем $D©\pi_D(B)$. Так как $\pi_D(B) \subseteq D,$ то из (3.6.4) согласно следствию 3.4.1 и 3.4.5 вытекает, что $C ©\pi_D(B)$. Снова применяя следствие 3.4.1, приходим к тому, что $(C + D)©\pi_D(B)$, т. е. $\pi_D(B) \subseteq Z(A)$. ◊

Это свойство проекций прямой суммы приводит к понятию центрального изоморфизма идеалов. Именно идеалы B и C m-алгебры A считаются *центрально изоморфными*, если существует такой изоморфизм φ из B на C, что $b - \varphi(b) \in Z(A)$ для любого $b \in B$.

С л е д с т в и е 6. Если идеалы B и C m-алгебры A прямо подобны, то они центрально изоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях предыдущего следствия для изоморфизма φ и для любого $b \in B$ имеем

$$b - \varphi(b) = \pi_C(b) + \pi_D(b) - \pi_C(b) = \pi_D(b) \in Z(A). \lozenge$$

Как видно из этих рассмотрений, понятие центрального изоморфизма играет определенную роль при исследовании различных разложений одной и той же m-алгебры в прямую сумму под-m-алгебр. В связи с этим сформулируем известную для Ω-групп теорему для конечных разложений (следствие из теоремы Шмидта – Оре, пп., 3.12, 4.6, гл. IV [22]).

Теорема 1. Пусть m-алгебра A обладает главными рядами и имеются два разложения

$$A = \sum_{i=1}^{k} {}^{\oplus} A_i = \sum_{j=1}^{l} {}^{\oplus} B_j ,$$

где $k, l \in \mathbb{N}$, m-алгебры в прямую сумму прямо неразложимых под-m-алгебр. Тогда $k = l$ и для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ существует индекс $j_i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ такой, что множитель A_i может быть заменен на множитель B_{j_i}, т. е. имеет место разложение $A = \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{k} {}^{\oplus} A_i \oplus B_{j_i}$. При этом идеалы A_i и B_{j_i} центрально изоморфны. ◊

Связи между определенными видами бесконечных разложений m-алгебр будут рассмотрены позднее.

В связи со следствием 3 приведем некоторые определения, касающиеся крайних значений коммутанта и центра m-алгебры, как и для m-колец [39]. Именно m-алгебра A считается *без центра* – это когда $Z(A) = 0$. m-алгебру A называем *коммутантной*, если $A' = A$ и *ординарной*, если она без центра и коммутантна. Ненулевой К-модуль A называем *чистым*, если К□A = 0 и *обыкновенным* в противном случае.

С л е д с т в и е 7. Пусть A – простой К-модуль. Тогда он либо ординарен, либо абелев. В последнем случае он либо чистый и имеет конечное простое число элементов, либо является обыкновенным неприводимым К-модулем, изоморфным фактормодулю естественного К-модуля $_{К}К$ по допустимому идеалу этого К-модуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что A – простой К-модуль. Так как $Z(A) \trianglelefteq A$, то либо $Z(A) = 0$, либо $Z(A) = A$. Рассмотрим сначала второй случай. Тогда согласно следствию 4 A – абелев К-модуль. В частности,

$$A{\cdot}A = 0. \tag{3.6.7}$$

Далее, по следствию 3.1.3 любой подмодуль К-модуля A является его идеалом и ввиду его простоты он либо нулевой, либо совпадает с A. Таким образом, К-модуль A является неприводимым. Если он является чистым, то благодаря (3.6.7) группа $(A, +)$ проста и изоморфна аддитивной группе вычетов $(\mathbb{Z}_p, +)$ по некоторому простому числу p. Если же К□$A \neq 0$, то A изоморфен фактормодулю естественного К-модуля $_{К}К$ по допустимому идеалу кольца (К, +, ·) согласно теореме 9.4.1 книги [39]. Рассмотрим теперь случай $Z(A) = 0$. Так как $A'' \trianglelefteq A$, то либо $A' = A$, либо $A' = 0$. Последний вариант невозможен ввиду следствия 4, так что A – ординарный К-модуль. ◊

При рассмотрении представленных ниже примеров понадобятся следующие обозначения.

Пусть $B \in A$, где $(A, +, \cdot)$ – ассоциативное коммутативное кольцо. Тогда положим $B^2 = B{\cdot}B$, $AnnB = \{\, a \in A \mid \forall\, b \in B\ (\, ab = 0\,)\}$ – *аннулятор множества* B. Далее, $I\,(A) = \{\, a \in A \mid a\,a = a\,\}$ – множество всех идемпотентов кольца A, $2A = \{\, a + a \mid a \in A\,\}$. Из предложения 3.2.1 и следствия 3.4.2 сразу вытекает

С л е д с т в и е 8. Пусть A есть К-модуль. Тогда

$$\langle\langle A^2 \rangle\rangle \subseteq A', \tag{3.6.8}$$

$$Z(A) \subseteq AnnA.\ \Diamond \tag{3.6.9}$$

В некоторых случаях могут иметь место равенства, как показывает следующее утверждение, которое легко следует из предложений 3.2.1, 3.3.3 и теоремы 3.3.1.

С л е д с т в и е 9. Пусть A есть чистый К-модуль. Тогда $A' = \langle A^2 \rangle$ и $Z(A) = AnnA$. ◊

С л е д с т в и е 10. Пусть A есть К-модуль. Если $\langle\langle I\,(A) \rangle\rangle = A$, в частности, если кольцо $(A, +, \cdot)$ имеет единицу, то A – ординарный К-модуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $<< I(A) >> = A$, то очевидно, что $A^2 = A$ и $AnnA = 0$. Отсюда согласно следствию 7 $A' = A$ и $Z(A) = 0$, т. е. A – ординарный К-модуль.◊

Следующий пример показывает, что существуют некоммутантные К-модули без центра.

Пример 1. Пусть F – некоторое поле, $A = F[x]x$ – кольцо многочленов от переменной x над полем F без свободного члена. Пусть $(К, +, \cdot, \circ)$ – надредукт этого кольца, являющийся под-m-кольцом m-кольца многочленов $(F[x], +, \cdot, \circ)$ (пример 1.3.3 [39]). Кольцо A рассматриваем как чистый К-модуль. Тогда $A \neq F[x]x^2 = A^2 = < A^2 >$ согласно следствию 9 $A \neq A'$. Далее, $AnnA = 0$ так как кольцо A – без делителей нуля. Снова согласно следствию 8 $Z(A) = AnnA = 0$. ◊

С другой стороны, как показывает следующий пример,существуют коммутантные К-модули с ненулевым центром.

Пример 2. Пусть К есть произвольное m-кольцо и $(A, +, \cdot)$ – чистый К-модуль, являющийся коммутативным ассоциативным кольцом с копредставлением

$$< x_1, x_2,\ldots | \, x_1 = x_2^2, x_2 = x_3^2, \ldots, x_n = x_{n+1}^2, \ldots, x_1^2 = 0, \ldots, x_n^{2^{n-1}+1} > = 0 \rangle.$$

Тогда $A = A^2$ и $x_1 \in AnnA \neq 0$, поэтому согласно следствию 8 $A' = A^2 = A$ и $Z(A) = AnnA \neq 0$. ◊

Рассмотрим теперь примеры вычисления коммутантов и центров естественных К-модулей некоторых m-колец из примеров п. 1.3 [39].

Пример 3. Пусть $(A, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо. Через $charA$ обозначаем, как обычно, характеристику [27] кольца A. Зафиксируем некоторое подмножество $S \subseteq A$, содержащее 0. Рассмотрим надредукт [39] $(К, +, \cdot, \circ)$ этого кольца, где $К = A$ и суперпозиция задается по правилу примера 1.3.1 [39], т. е. для любых $a, b \in A$

$$a \circ b = \begin{cases} 0 \quad , & \text{если} \quad b \in S, \\ a \quad , & \text{если} \quad b \notin S. \end{cases} \tag{3.6.10}$$

В соответствии с терминологией почтиколец [60], такую суперпозицию будем называть *тривиальной суперпозицией*, *заданной при помощи множества* S. Соответственно действие m-кольца К на кольце A будет записано следующим образом. Для любых $x \in К$, $a \in A$

$$x \square a = \begin{cases} 0 \quad , & \text{если} \quad a \in S, \\ x \quad , & \text{если} \quad a \notin S. \end{cases} \tag{3.6.11}$$

Если S = К, то мы имеем чистый К-модуль и в соответствии со следствием 9 $A' = <A^2>$ и $Z(A) = AnnA$. Далее предполагаем, что $S \neq$ К. Положим $H = A \setminus S$. В сделанных предположениях имеет место

Предложение 1. Если $|A| = 2$ и $A^2 \neq 0$, то $A' = A$ и $Z(A) = 0$ (ординарный К-модуль), а если $|A| = 2$ и $A^2 = 0$, то $A' = 0$, $Z(A) = A$, т. е A – абелев К-модуль. Если $|A| > 2$ и $S = 0$, то $A' = A$ и $Z(A) = 0$. Если $S \neq 0$, то при вычислении A' различаются два случая:

А) S есть подгруппа группы $(A, +)$ индекса 2. Тогда $A' = <A^2 \cup 2A>$.

Б) Если А) не выполняется, то $A' = A$.

При вычислении $Z(A)$ вводятся в рассмотрение два множества :

$$G_1 = \{\, a \in S \mid S + a \subseteq S\,,\ H + a \subseteq H \,\}, \tag{3.6.12}$$

$$G_2 = \{\, a \in H \mid S + a \subseteq H\,,\ H + a \subseteq S \,\}. \tag{3.6.13}$$

В этих обозначениях если $charA \neq 2$, то $Z(A) = G_1 \cap AnnA$, а если $charA = 2$, то $Z(A) = (G_1 \cup G_2) \cap AnnA$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $|A| = 2$. Тогда $(A, +)$ – группа вычетов по модулю 2 и ввиду (3.5.3) $(A, +, \circ)$ – поле вычетов по модулю 2. Можно считать, что $A = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Тогда из (3.6.11) выводим :

$$1\square(1 + 0) - 1\square 1 - 1\square 0 = 0,\ 1\square(1 + 1) - 1\square 1 - 1\square 1 = 0, \tag{3.6.14}$$

Если теперь $A^2 \neq 0$, то $(A, +, \cdot)$ – поле и тогда К-модуль A ординарен согласно следствию 9. Если $A^2 = 0$, то благодаря (3.6.14) $A' = 0$ согласно предложению 3.2.1 и $Z(A) = A$ согласно следствию 1.

Далее предполагаем, что $|A| > 2$. Для $x, a, b \in A$ положим $\varphi(x, a, b) = \varphi_{x,a,0}(b) = x\square(a + b) - x\square a - x\square b$. Отметим, что согласно теореме 3.3.1

$$\varphi(x, a, b) \in A'. \tag{3.6.15}$$

Рассмотрим сначала случай $S = 0$ и докажем, что $A' = A$. В самом деле, тогда существуют $a, b \in H$ такие, что $a + b \in H$. Для любого $x \in A$ согласно (3.6.11), тогда имеем

$$\varphi(x, a, b) = x\square(a + b) - x\square a - x\square b = x - x - x = -x. \tag{3.6.16}$$

Так как элемент $-x$ пробегает все множество A, то согласно (3.6.15) $A' = A$. Что касается $Z(A)$, то по следствию 2

$$Z(A) = AnnA \cap \{\, a \in A \mid \ \forall\, x, b \in A\ (\ \varphi(x, a, b) = 0 \,\}. \tag{3.6.17}$$

Последнее множество состоит только из нуля благодаря (3.6.16), поэтому $Z(A) = 0$ и A – ординарный К-модуль. Переходим к более общему случаю

$S \neq 0$. В случае выполнения А) согласно (3.6.9), если $a, b \in S$, то $a + b \in S$ и $\varphi(x,a,b) = x\square(a+b) - x\square a - x\square b = 0 - 0 - 0 = 0$. Если $a, b \in H$, то $a + {}$ $+ b \in S$, поэтому $\varphi(x,a,b) = x\square(a+b) - x\square a - x\square b = 0 - x - x = -(x+x)$, а если $a \in S$, $b \in H$, то $a + b \in H$, поэтому $\varphi(x,a,b) = x\square(a+b) - x\square a - x\square b =$ $= x - 0 - x = 0$. Далее, из предложений 3.2.1 и 3.3.3 вытекает, что $A' =$ $= < A^2 \cup 2A >$. Если А) не выполняется, то найдутся такие элементы $a, b \in A$, что из трех элементов a, b, $a + b$ либо три принадлежат H, либо один принадлежит H, а два принадлежат S. Тогда из (3.6.11) следует, что либо $\varphi(x,a,b) = x$ для любого $x \in A$, либо $\varphi(x,a,b) = -x$ и снова для любого $x \in A$. Отсюда вытекает, что $A' = A$.

Займемся теперь вычислением центра $Z(A)$. Сначала предположим, что $charA \neq 2$. Покажем, что $H \cap Z(A) = \varnothing$. В самом деле, если $a \in H \cap Z(A)$, то либо $a + a \in H$, либо $a + a \in S$. В первом случае согласно (3.5.18) имеем для любого $x \in A$ $0 = x\square(a+a) - x\square a - x\square a = x - x - x = -x$, что невозможно. Во втором случае $0 = \varphi(x,a,a) = x\square(a+a) - x\square a - x\square a =$ $= 0 - x - x = -(x+x)$ для любого $x \in A$, что противоречит предположению $charA \neq 2$. Таким образом, $Z(A) \subseteq S$. Докажем,что

$$Z(A) \subseteq G_1. \tag{3.6.18}$$

В самом деле, если $a \in Z(A)$, то, как показано выше, $a \in S$. Если для некоторого $b \in S$ будет $a + b \in H$, то снова благодаря (3.6.15) имеем $0 =$ $\varphi(x,a,b) = x\square(a+b) - x\square a - x\square b = x - 0 - 0 = x$ для любого $x \in A$, что невозможно. Так что $a + S \subseteq S$. Аналогично доказывается, что $a + H \subseteq H$. Включение (3.6.18) доказано. Отсюда и из (3.6.17) имеем включение $Z(A) \subseteq G_1 \in AnnA$.Такими же средствами устанавливается обратное включение. Случай $charA \neq 2$ разобран.

Пусть теперь $charA = 2$. Предположим, что $a \in (G_2 \cup G_1) \cap AnnA$. Анализ выражений (3.6.12) и (3.6.13) показывает, что из трех элементов $a + b$, a, b четное число принадлежит H, поэтому для любого $x \in A$ $\varphi(x,a,b) =$ $= x\square(a+b) - x\square a - x\square b = 0$ благодаря тому, что $charA = 2$. Используя теперь (3.6.15), получаем, что $(G_2 \cup G_1) \cap AnnA \subseteq Z(A)$. Обратное включение доказывается аналогично. ◊

Пример 4. Пусть $(A, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо, К = $= \grave{A}_0^{A}$ – m-кольцо всех преобразований кольца A, сохраняющих нуль. Рассмотрим естественный К-модуль $_{К}$К. Так как кольцо (К, +, ·) имеет единицу c_1, то согласно следствию 9 К-модуль $_{К}$К К ординарен. Аналогичная ситуация возникает в m-кольце непрерывных функций действительного переменного, сохраняющих нуль, m-кольце многочленов над полем без свободного члена и т. п. ◊

§ 4. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И РАЗРЕШИМЫЕ *m*-АЛГЕБРЫ

Следуя [22], гл. III, § 5, введем понятия нильпотентных и разрешимых m-алгебр и исследуем их некоторые свойства.

4.1. Нильпотентные *m*-алгебры

Пусть A – m-алгебра. Нормальный ряд

$$A_0 \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq A_n = A \tag{4.1.1}$$

называется *центральным, начинающимся с* A_0, если для любого индекса $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$[A_i, A] \subseteq A_{i-1}. \tag{4.1.2}$$

Отметим, что ввиду свойства 3) предложения 3.2.2 все члены этого ряда являются идеалами m-алгебры A, поэтому всякий центральный ряд инвариантен. m-алгебра A называется *нильпотентной*, если она обладает хотя бы одним центральным рядом, начинающимся с нулевой m-алгебры.

Следствие 1. Всякая абелева m-алгебра нильпотентна.

Доказательство. Согласно следствиям 3.1.1 и 3.1.5 для абелевой m-алгебры A будет $[A, A] = 0$, поэтому $0 \trianglelefteq A$ – центральный ряд. ◊

Нижней центральной цепью m*-алгебры* A называется убывающая последовательность ее идеалов

$$\dots \trianglelefteq A_i \trianglelefteq \dots \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq A_0 = A \tag{4.1.3}$$

такая, что для любого индекса $i \in \mathbb{N}_0$

$$[A_i, A] = A_{i+1}. \tag{4.1.4}$$

Верхней центральной цепью m*-алгебры* A называется такая возрастающая последовательность ее идеалов

$$0 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq B_i \trianglelefteq \dots, \tag{4.1.5}$$

что выполняются равенства

$$B_1 = Z(A),\ B_2/B_1 = Z(A/B_1),\ \ ,\ B_{i+1}/B_i = Z(A/B_i), \dots \tag{4.1.6}$$

для любого индекса $i \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 1. m-алгебра A нильпотентна тогда и только тогда, когда ее нижняя центральная цепь является инвариантным рядом и тогда и только тогда, когда верхняя центральная цепь является инвариантным рядом. В этом случае длина нижней центральной цепи без повторений равна длине верхней центральной цепи без повторений и является наименьшей среди длин центральных рядов этой m-алгебры.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Займемся сначала нижней центральной цепью (4.1.3). Если для какого-то $n \in \mathbb{N}_0$ будет $A_n = A$, то ввиду (4.1.4) эта цепь является центральным рядом, так что A – нильпотентная m-алгебра. Обратно, пусть A – нильпотентная алгебра и пусть

$$0 = C_0 \trianglelefteq C_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq C_n = A \text{ –} \qquad (4.1.7)$$

центральный ряд без повторений. Тогда выполняется включение

$$[C_i, A] \subseteq C_{i-1}. \qquad (4.1.8)$$

для любого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим нижнюю центральную цепь (4.1.3). Докажем по индукции по $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, что

$$A_i \subseteq C_{n-i}. \qquad (4.1.9)$$

В самом деле, согласно (4.1.3) и (4.1.7) $A_0 = A \in C_{n-0}$. Пусть теперь (4.1.9) верно для $i < n$. Тогда используя (4.1.4), (4.1.9) и свойство C1) предложения 3.3.1, получим $A_{i+1} = [A_i, A] \subseteq [C_{n-i}, A] \subseteq C_{n-(i+1)}$, что и требовалось. При $i = n$ имеем $A_0 \subseteq C_n = 0$, поэтому цепь (4.1.3) *стабилизируется*, (т. е. после некоторого индекса все члены совпадают), и является нормальным рядом, длина которого не больше длины центрального ряда (4.1.7). Ряд (4.1.3) естественно называть *нижним центральным рядом*.

Рассмотрим теперь верхнюю центральную цепь (4.1.5). Предположим, что для некоторого $l \in \mathbb{N}$ будет $B_l = A$. Докажем, что эта цепь является центральным рядом, тем самым нильпотентность A будет доказана. По индукции по $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$ будем доказывать включение

$$[B_{l-i}, A] \subseteq B_{l-i-1}. \qquad (4.1.10)$$

В самом деле, при $i = 0$ согласно (4.1.6)

$$A/B_{l-1} = B_l/B_{l-1} = Z(A/B_{l-1}). \qquad (4.1.11)$$

Согласно следствию 3.6.3 отсюда следует, что A/B_{l-1} – абелев K-модуль. Положим $f = nat\ B_{l-1} : A \to A/B_{l-1}$. Воспользовавшись свойством C4 предложения 3.3.1 и абелевостью m-алгебры A/B_{l-1}, имеем

$$f([B_l, A] + B_{l-1}) = [f(B_l), f(A)] = [B_l/B_{l-1}, A/B_{l-1}] = B_{l-1}/B_l = 0,$$

откуда $[B_l, A] + B_{l-1} \subseteq Ker\, f = B_{l-1}$. Следовательно, $[B_l, A] \subseteq B_{l-1}$, что и требуется для базы индукции. Пусть теперь (4.1.10) верно для индексов $i \leq j$, где $j \in \{0, 1, \ldots, l-2\}$ и будем доказывать для $j+1$. Действительно, если $B_{l-j-1} = 0$, то ряд (4.1.5) центральный и A – нильпотентная m-алгебра. Пусть теперь $B_{l-j-1} \neq 0$. Рассмотрим гомоморфизм $f = natB_{l-j-2}$: $A \to A/B_{l-j-2}$. Используя центральность идеала $Z(A/B_{l-j-2})$ в A/B_{l-j-2}, равенства (4.1.6) и свойство C4 предложения 3.3.1, получим

$$0 = B_{l-j-2}/B_{l-j-2} = [Z(A/B_{l-j-2}), A/B_{l-j-2}] =$$
$$= [B_{l-j-1}/B_{l-j-2}, A/B_{l-j-2}] = [f(B_{l-j-1}), f(A)] = f([B_{l-j-1}, A] + B_{l-j-2}).$$

Отсюда вытекает, что $[B_{l-j-1}, A] + B_{l-j-2} \subseteq Ker\, f = B_{l-j-2}$ и $[B_{l-j-1}, A] \subseteq B_{l-j-2}$. Значит, (4.1.10) выполняется при всех $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$. В частности, при $i = l-1$ $[B_1, A] = [B_{l-(l-1)-1}, A] \subseteq B_0$, так что (4.1.5) – центральный ряд (который будем называть *верхним центральным рядом*) и m-алгебра A нильпотентна.

Обратно, пусть m-алгебра A нильпотентна. Из предыдущего следует, что нижняя центральная цепь (4.1.3) стабилизируется и при некотором наименьшем индексе $n \in \mathbb{N}_0$ $A_n = 0$. Рассмотрим верхнюю центральную цепь (4.1.5) и по индукции по $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ докажем включение

$$A_{n-i} \subseteq B_i \qquad (4.1.12)$$

В самом деле, при $i = 0$ имеем $A_{n-0} = A_n = 0 \subseteq B_0$. Предположим теперь, что (4.1.12) верно для $i < n$ и докажем для $i + 1$. Для этого рассмотрим гомоморфизм $f = natB_i : A \to A\ / B_i$. Используя (4.1.12), (4.1.4) и свойство С4 из предложения 3.3.1, имеем

$$0 = f(B_i) = f(A_{n-i} + B_i) = f([A_{n-i-1}, A] + B_i) = [f(A_{n-i-1}), f(A)] =$$
$$= [(A_{n-i-1} + B_i)/B_i, A/B_i].$$

Отсюда следует, что идеал $(A_{n-i-1} + B_i)/B_i$ – центральный, поэтому с использованием (4.1.6) получаем $(A_{n-i-1} + B_i)/B_i \subseteq Z(A/B_i) = B_{i+1}/B_i$. Значит, $A_{n-i-1} \subseteq A_{n-i-1} + B_i \subseteq B_{i+1}$ и (4.1.12) доказано для всех $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. В частности, $A = A_0 = A_{n-n} = B_n$, поэтому цепь (4.1.5) является центральным рядом длины не больше n, а согласно сказанному выше длина любого центрального ряда не меньше длины нижнего центрального ряда (4.1.3), так что длина ряда (4.1.3) равна n.◊

Длину n нижнего центрального ряда нильпотентной называем *ступенью нильпотентности* этой m-алгебры A. Класс всех нильпотентных К-модулей (m-колец) ступени нильпотентности, не большей n, обозначаем через ${}_{\mathrm{K}}\mathfrak{N}_n$ (соответственно $\mathfrak{N}_n$). В частности, – ${}_{\mathrm{K}}\mathfrak{N}_1$ (соответственно $\mathfrak{N}_1$) – класс всех абелевых К-модулей (соответственно, абелевых m-колец). В соответствии с этим через ${}_{\mathrm{K}}\mathfrak{N}$ (соответственно $\mathfrak{N}$) обозначается класс всех нильпотентных К-модулей (соответственно нильпотентных m-колец). Как и для любых Ω-групп [22], имеет место

Теорема 2. Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ класс ${}_{\mathrm{K}}\mathfrak{N}_n$ (соответственно $\mathfrak{N}_n$), а также класс ${}_{\mathrm{K}}\mathfrak{N}$ (соответственно $\mathfrak{N}$), замкнут слева и справа. ◊

m-алгебра A называется *расширением m-алгебры C при помощи m-алгебры B*, если $C \trianglelefteq A$ и $A / C \approx B$. Например, если $A = B \rightthreetimes C$ или $A = B \oplus C$. Следующее утверждения показывают, что свойство нильпотентности может сохраняться при некоторых видах расширений.

Теорема 3. Класс ${}_{\mathrm{K}}\mathfrak{N}$ (соответственно, $\mathfrak{N}$) является $\times$-замкнутым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = B \times C$, где B и C – нильпотентные m-алгебры. Имея в виду предложение 2.2.1, можно считать, что $B, C \in \mathfrak{I}(A)$ и $A = B \oplus C$. Так как B и C – нильпотентные алгебры, то для них существуют центральные ряды

$$0 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq B_l = B, \tag{4.1.13}$$

$$0 = C_0 \trianglelefteq C_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq C_m = C, \tag{4.1.14}$$

где $l, m \in \mathbb{N}_0$. Согласно сказанному выше все члены этих рядов являются идеалами m-алгебры A. Положим для $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$

$$A_{l+i} = B + C_i. \tag{4.1.15}$$

Покажем, что ряд

$$0 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq B_l = B = A_l \trianglelefteq A_{l+1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq A_{l+m} = A \tag{4.1.16}$$

является центральным. В самом деле, если $j \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$, то с использованием свойства C3 из предложения 3.3.1, следствия 3.4.5 и центральности ряда (4.1.13), имеем

$$[B_{j+1}, A] = [B_{j+1}, B + C] = [B_{j+1}, B] + [B_{j+1}, C] = [B_{j+1}, B] \subseteq B_j.$$

Далее, для $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ согласно (4.1.15), снова используя свойство C3 из предложения 3.3.1, следствие 3.4.5 и центральности ряда (4.1.14), выводим

$$[A_{l+i+1}, A] = [B + C_{i+1}, B + C] = [B, B] + [B, C] +$$
$$+ [C_{i+1}, B] + [C_{i+1}, C] = [B, B] + [C_{i+1}, C] \subseteq B + C_i = A_{l+i}.$$

Тем самым устанавливается, что ряд (4.1.16) – центральный для A и, значит, A – нильпотентная m-алгебра. ◊

Лемма 1. Для m-алгебры A пусть $A / Z(A)$ – нильпотентная m-алгебра. Тогда и сама m-алгебра A нильпотентна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $B = A / Z(A)$. Согласно теореме 2 нильпотентность B означает, что существует верхний центральный ряд

$$0 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq B_l = B, \tag{4.1.17}$$

для некоторого $l \in \mathbb{N}_0$. Так как $B = A / Z(A)$, то по второй теореме о гомоморфизмах для каждого $i \in \{0, 1, .., l\}$ существуют идеал A_{i+1} такой, что

$Z(A) \subseteq A_{i+1}$ и

$$A_{i+1} / Z(A) = B_i. \tag{4.1.18}$$

Положим $A_0 = 0$ и рассмотрим ряд

$$0 = A_0 \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq A_{l+1} = A. \tag{4.1.19}$$

Покажем, что это – верхний центральный ряд для A. Действительно, при $i = 0$ имеем согласно (4.1.18) $A_1 / Z(A) = B_0 = 0$, поэтому $A_1 / A_0 = A_1 = Z(A) = Z(A / A_0)$. Если $i > 0$, то, используя (4.1.18), четвертую теорему о гомоморфизмах и свойство (4.1.6) верхних центральных цепей, получаем

$$A_{i+1} / A_i \approx (A_{i+1} / Z(A)) / (A_i / Z(A)) = B_i / B_{i-1} = Z(B / B_{i-1}) = Z(B_l / B_{i-1}) =$$
$$= Z((A_{l+1} / Z(A)) / (A_i / Z(A))) = Z(A / A_i).$$

Из этого следует, что (4.1.19) – верхний центральный ряд для A и эта m-алгебра нильпотентна.◊

Как показывают дальнейшие рассмотрения, свойство нильпотентности сохраняется при некоторых биекциях, не являющихся, вообще говоря, изоморфизмами. Именно, биекцию σ m-алгебры A на m-алгебру B назовем *центральной изотопией*, если для любых $a_1, a_2 \in A$ и $x \in К$ выполняются условия :

$$\sigma(a_1 + a_2) - \sigma(a_1) - \sigma(a_2) \in Z(B), \tag{4.1.20}$$

$$\sigma(a_1 a_2) - \sigma(a_1)\,\sigma(a_2) \in Z(B), \tag{4.1.21}$$

и в случае $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ также

$$\sigma(a_1 \circ a_2) - \sigma(a_1) \circ \sigma(a_2) \in Z(B), \tag{4.1.22}$$

а в случае $\mathcal{З} =$ К-*Mod* для всякого $x \in К$

$$\sigma(x \square a_1) - x \square (\sigma(a_1)) \in Z(B). \tag{4.1.23}$$

Предложение 1. Пусть σ – центральная изотопия m-алгебры A на m-алгебру B. Если A – нильпотентная m-алгебра, то m-алгебра B также нильпотентна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma : A \to B$ – центральная изотопия и пусть A – нильпотентная m-алгебра. Рассмотрим отображение $\overline{\sigma}$: $A \to B / Z(B)$, где $\overline{\sigma}(a) = \sigma(a) + Z(B)$ для $a \in A$. Из соотношений (4.1.20)–(4.1.23) сразу видно, что $\overline{\sigma}$ есть гомоморфизм m-алгебры A на m-алгебру $B / Z(B)$. Ввиду теоремы 2 m-алгебра $B / Z(B)$ нильпотентна, а это влечет нильпотентность B по лемме 1. ◊

Некоторые особенности нильпотентных m-алгебр связаны с понятием под-m-алгебры Фраттини. Пусть A есть m-алгебра. Элемент $a \in A$ назовем *негенератором*, если для любого подмножества $X \subseteq A$ из того, что $< a, X > = A$, следует, что $< X > = A$. Иначе говоря, элемент a можно элиминировать из любого порождающего множества. Множество всех негенераторов m-алгебры A обозначаем через $\Phi(A)$. Отметим, что $0 \in \Phi(A)$, поэтому множество $\Phi(A)$ не пусто. Из предложения 235 [73] следует

Лемма 2. Для произвольной m-алгебры A множество $\Phi(A)$ является ее под-m-алгеброй.◊

Эта под-m-алгебра называется *под-m-алгеброй Фраттини m-алгебры A*. Здесь ситуация не совсем аналогична с группами, где подгруппа Фраттини любой группы является ее нормальным делителем. Именно представленный ниже пример показывает, что не всегда под-m-алгебра Фраттини m-алгебры является ее идеалом. Хотя для некоторых классов m-алгебр, в частности, для нильпотентных, это будет выполняться, как показывает следующая ниже теорема. Перед этим естественно подчеркнуть тесную связь между негенераторами и максимальными под-m-алгебрами m-алгебры A. Напомним (п. 1.2), что множество всех максимальных под-m-алгебр (коатомов решетки $SubA$)) обозначается через $\mathcal{M}aSubA$, Ради краткости будем вместо этого писать $\mathcal{M}aA$ (так же как и $\mathcal{M}iA$ вместо $\mathcal{M}iSubA$). Из предложения 235 [73] следует

Лемма 3. Для любой m-алгебры A

$$\Phi(A) = \bigcap\{M \mid M \in \mathcal{M}aA\}.◊ \tag{4.1.24}$$

Из этого, в частности, следует, что в случае $\mathcal{M}aA = \varnothing$ будет $\Phi(A) = A$. ◊

Теорема 4. Пусть A – нильпотентная m-алгебра. Тогда $\Phi(A) \trianglelefteq A$ и $A/\Phi(A)$ – абелева m-алгебра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем индукцией по ступени нильпотентности m-алгебры A. В случае $\mathcal{M}aA = \varnothing$ будет $\Phi(A) = A$ и $A/\Phi(A) = 0$ – абелева m-алгебра. Пусть теперь $\mathcal{M}aA \neq \varnothing$ и $M \in \mathcal{M}aA$. Предположим сначала, что A – абелева m-алгебра. Тогда согласно следствию 3.1.3 $\Phi(A) \in \mathfrak{I}(A)$ и $A/\Phi(A)$ – абелева m-алгебра как гомоморфный образ абелевой m-алгебры (следствие 3.1.2 и 3.1.5).

Переходя к шагу индукции, предположим, что имеется верхний центральный ряд

$$0 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq B_l = A, \tag{4.1.25}$$

для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Если $M \trianglelefteq A$ для всякого $M \in \mathcal{M}aA$, то согласно лемме 3 $\Phi(A) = \bigcap\{M \mid M \in \mathcal{M}aA\} \in \mathfrak{I}(A)$, а также благодаря теореме 2.4.3 фактор-m-алгебра $A/\Phi(A)$ изоморфна подпрямому произведению фактор-m-алгебр A / M, где $M \in \mathcal{M}aA$. Каждая из этих m-алгебр нильпотентна в силу теоремы 2, причем ступени нильпотентности 1 так как минимальна. Следовательно, m-алгебра $A / \Phi(A)$ абелева, так как классы ${}_{\kappa}\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ являются многообразиями. Предположим, *е. а.*, что существует максимальная под-m-алгебра M, не являющаяся идеалом m-алгебры A. Тогда согласно (4.1.25) $M + B_l = A$ и $M + B_0 \neq A$. Отсюда вытекает, что существует индекс $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ такой, что

$$M + B_i = A, \tag{4.1.26}$$

$$M + B_{i-1} \neq A. \tag{4.1.27}$$

Ввиду максимальности M из (4.1.26) следует, что $B_{i-1} \subseteq M$. При этом $B_{i-1} \neq M$ так как $M \notin \mathfrak{I}(A)$. Далее, из (4.1.26) видно, что $B_i \neq M$. Рассмотрим под-m-алгебру $\tilde{M} = M / B_{i-1}$ m-алгебры A / B_{i-1}. По второй теореме о гомоморфизмах $\tilde{M} \in \mathcal{M}a(A / B_{i-1})$. Из равенства (4.1.26) следует, что

$$\tilde{M} + (B_i / B_{i-1}) = A / B_{i-1}. \tag{4.1.28}$$

Из того, что (4.1.24) – верхний центральный ряд, получаем равенство $Z(A / B_{i-1}) = B_i / B_{i-1}$. Теперь из равенства (4.1.28) благодаря лемме 3.6.1 вытекает, что $\tilde{M} \in \mathfrak{I}(A)$, и по второй теореме о гомоморфизмах тогда $M \in \mathfrak{I}(A)$, что приводит к противоречию. Значит, $\Phi(A) \trianglelefteq A$. ◊

У п р а ж н е н и е 1. Доказать непосредственно, что если в алгебре A нет максимальных под-m-алгебр, то каждый элемент из A является негенератором.◊

4.2. Идеалы прямых произведений и конгруэнц-правильные *m*-алгебры

В дальнейшем нам понадобится выяснять вопросы, связанные со строением под-m-алгебр и идеалов прямых произведений конечного семейства m-колец. Сначала введем некоторые определения.

Пусть A_1 и A_2 − две m-алгебры и для $j = 1, 2$ J_j − под-m-алгебра m-алгебры A_j, I_j − идеал m-алгебры J_j. Положим $\nu_j = nat I_j$: $J_j \to J_j / I_j$ и предположим, что κ − изоморфизм фактор-m-алгебры J_1 / I_1 на фактор-m-алгебру J_2 / I_2. Тогда последовательность $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$ назовем *допустимой для* $A_1 \times A_2$, а отношение

$$I = \nu_2^{-1} \circ \kappa \circ \nu_1 \subseteq A_1 \times A_2 \tag{4.2.1}$$

Назовем I *отношением, определяемым допустимой последовательностью* $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$.

Теорема 1. Пусть I − под-m-алгебра прямого произведения $A_1 \times A_2\,(\pi_1, \pi_2)$ двух m-алгебр A_1 и A_2. Обозначим для $j = 1, 2$

$$J_j = \pi_j(I),\ I_1 = \{a \in A_1 \mid (a, 0) \in I\},\ I_2 = \{b \in A_2 \mid (0, b) \in I\}. \qquad (4.2.2)$$

Тогда что $I_j \trianglelefteq J_j \le A_j$ и существует изоморфизм к фактор-m-алгебры J_1/I_1 на фактор-m-алгебру J_2/I_2 такой, что выполняются соотношения (4.2.1), иначе говоря, I является отношением, определяемым допустимой последовательностью $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$. Обратно, если J_j − под-m-алгебра m-алгебры A_j, I_j − идеал m-алгебры J_j и $I \subseteq A_1 \times A_2$ − отношение, определяемое допустимой последовательностью $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$, то I является под-m-алгеброй прямого произведения $A_1 \times A_2\,(\pi_1, \pi_2)$ двух m-алгебр A_1 и A_2 и выполняются равенства (4.2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать случай m-колец, случай К-модулей рассматривается аналогичными средствами.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $I \in Sub(A_1 \times A_2)$, $j \in \{1, 2\}$ и множества J_j, I_j определены по формулам (4.2.2). Тогда J_j является под-m-кольцом m-кольца A_j как образ m-кольца I при гомоморфизме π_j, а множество I_j является идеалом под-m-кольца J_j как пересечение этого под-m-кольца с идеалом $\pi_j(A_1 \times A_2)$ m-кольца $A_1 \times A_2$. Далее, рассмотрим соответствие $: J_1/I_1 \to J_2/I_2$, где для $a \in J_1$ и $b \in I_2$ $\kappa(a + I_1) = b + I_2$, если $(a, b) \in I$. Это соответствие является отображением, так как если $a_1, a_2 \in J_1$ и $a_1 + I_1 = a_2 + I_1$, то $a_1 - a_2 \in I_1$ и $(a_1 - a_2, 0) \in I$. Значит, если $b_1, b_2 \in J_2$ и $(a_1, b_1) \in I$, $(a_2\ b_2) \in I$, то

$$(0, b_1 - b_2) = (a_1, b_1) - (a_2\ b_2) - (a_1 - a_2, 0) \in I + I - I \subseteq I.$$

Следовательно, $b_1 - b_2 \in I_2$ и $b_1 + I_2 = b_2 + I_2$ и к есть отображение. Инъективность к доказывается таким же образом. Значит, к является биекцией. Далее, если $a_1, a_2 \in J_1$, $b_1, b_2 \in J_2$ и $(a_1, b_1) \in I$, $(a_2, b_2) \in I$, то для любой операции "$*$" $\in$ {"+", "·", "∘"} имеем $(a_1 * a_2, b_1 * b_2) = (a_1, b_1) * (a_2\ b_2) \in I * I \subseteq$ $\subseteq I$. Следовательно, к является изоморфизмом m-колец. По определению к сразу получаем, что $I \subseteq \nu_2^{-1} \circ \kappa \circ \nu_1$. Обратно, если $(a, b) \in \nu_2^{-1} \circ \kappa \circ \nu_1$, то $a \in J_1$, $b \in J_2$, для некоторых $a_1 \in J_1$, $b_1, \in J_2$ $(a_1, b_1) \in I$ и $\nu_1(a) = \nu_1(a_1)$, $\nu_2(b)$ $= \nu_2(b_1)$. Тогда $a - a_1 \in I_1$, $b - b_1 \in I_2$, так что

$$(a, b) = (a - a_1, 0) + (a_1, b_1) + (0, b - b_1) \in I + I + I \subseteq I.$$

Итак, равенство (4.2.2) выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для $j = 1, 2$ $I_j \trianglelefteq J_j \le A_j$, имеется изоморфизм $\kappa: J_1/I_1 \to J_2/I_2$ и отношение $I \subseteq A_1 \times A_2$ определяется по формуле (4.2.1). То, что это есть под-m-кольцо m-кольца $A_1 \times A_2$, легко следует из этой формулы. Докажем соотношения (4.2.2). То, что для $j = 1, 2$ $J_j = \pi_j(I)$, очевидно. Далее, если $a \in I_1$, то $\nu_1(a) = 0$, поэтому согласно (4.2.2) $(a, 0) \in I$. Обратно, если $a \in J_1$ и $(a, 0) \in I$, то $\nu_1(a) = 0$, значит, $a \in I_1$. Аналогично, для $j = 2$. Так что соотношения (4.2.1) выполняются.◊

Благодаря этой теореме отношение I, определяемое допустимой последовательностью $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$ для $A_1 \times A_2$, будет естественным называть *под-m-алгеброй*, *определяемой допустимой последовательностью* $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$ *для* $A_1 \times A_2$.

Теперь будем рассматривать случай, когда $I \in \Im(A_1 \times A_2)$. Пусть A есть m-алгебра и $I, J \in \Im(A)$. Пара идеалов (I, J) называется *субнильпотентной* в A, если $I \subseteq J$ и $[A, J] \subseteq I$. В частности, для любого идеала $I \trianglelefteq$ К пара (I, I) является субнильпотентной. Такую пару будем называть *тривиальной субнильпотентной*. Допустимая последовательность $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$ для прямого произведения $A_1 \times A_2$ m-алгебр A_1 и A_2 будет называться *i-допустимой*, если для $j = 1, 2$ пара под- m-алгебр (I_j, J_j) является субнильпотентной парой идеалов в A_j.

Теорема 2. Пусть I − идеал прямого произведения $A_1 \times A_2$ m-алгебр A_1 и A_2. Тогда под-m-алгебра I определяется некоторой i-допустимой последовательностью для $A_1 \times A_2$. Обратно, если под-m-алгебра I определяется некоторой i-допустимой последовательностью для $A_1 \times A_2$, то I является идеалом m-алгебры $A_1 \times A_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать случай m-колец, случай К-модулей рассматривается аналогичными средствами.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $I \in \Im(A_1 \times A_2)$ и под-m-алгебра I определяется некоторой i-допустимой последовательностью $(I_1, J_1, \kappa, I_2, J_2)$ для $A_1 \times A_2$. Воспользуемся обозначениями доказательства теоремы 1. Сначала отметим, что для $j \in \{1, 2\}$ под-m-кольцо J_j является идеалом A_j как образ деала I m-кольца $A_1 \times A_2$ при сюръективном гомоморфизме π_j, а множество I_j является идеалом m-кольца $A_1 \times A_2$ как пересечение идеала I_j с идеалом $\pi_j(A_1 \times A_2)$. Теперь для доказательства субнильпотентности пары идеалов (I_1, J_1) m-кольца A_1, согласно п. 4.1 и следствию 3.5.2 достаточно доказать, что выполняются соотношения

$$J_1 \cdot A_1 \subseteq I_1, J_1 \circ A_1 \subseteq I_1, \tag{4.2.3}$$

а также

$$\forall a \in J_1 \forall x, y \in A_1 (x \circ (y + a) - x \circ y \in I_1). \tag{4.2.4}$$

Для доказательства (4.2.5) и (4.2.6) предположим, что $a \in J_1$ и $x, y \in A_1$.

Так как $a \in \pi_1(I)$, то для некоторого $b \in A_2$ $(a, b) \in I$, и поскольку

$I \in \Im(A_1 \times A_2)$, имеем $(a{\cdot}x, 0) = (a, b)\,(x, 0) \in I{\cdot}(A_1 \times A_2) \subseteq I$, поэтому $a{\cdot}x \in I_1$ и $J_1{\cdot}A_1 \subseteq I_1$. Аналогично, $J_1{\circ}A_1 \subseteq I_1$. Далее, используя стабильность слева идеала I в $A_1 \times A_2$, получаем при тех же предположениях

$$(x{\circ}(y + a) - x{\circ}y, 0) = (x, 0){\circ}((y, 0) + (a, b)) - (x, 0){\circ}(y, 0) \in I,$$

поэтому $x{\circ}(y + a) - x{\circ}y \in I_1$, так что (4.2.3) и (4.2.4) выполняется. Доказано, что пара идеалов (I_1, J_1) является субнильпотентной в A_1. Аналогично доказывается, что пара идеалов (I_2, J_2) является субнильпотентной парой идеалов в A_2.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Допустим, что под-m-кольцо I прямого произведения $A_1 \times A_2$ определяется i-допустимой последовательностью $(I_1, J_1, к, I_2, J_2)$ для $A_1 \times A_2$ и докажем, что $I \in \Im(A_1 \times A_2)$. Для этого предположим, что $(a, b) \in I$; (x, y), $(u, v) \in A_1 \times A_2$. Согласно формуле (4.2.1) $a \in J_1$, $b \in J_2$ и $к(\nu_1(a)) = \nu_2(b)$. Благодаря субнильпотентности пары идеалов (I_1, J_1) m-кольца A_1 выполняются соотношения (4.2.3) и (4.2.4) и аналогично для пары (I_2, J_2) m-кольца $К_2$. Используя это, получаем $\cdot$ $(a, b){\cdot}(x, y) = (a{\cdot}x, b{\cdot}y) \in I_1 \times I_2$. Так как согласно (4.2.2) $I_1 \times \{0\}$, $\{0\} \times I_2 \subseteq I$, то $I_1 \times I_2 = I_1 \times \{0\} + \{0\} \times I_2 \subseteq I$, так что $(a, b){\cdot}(x, y) \in I$. Аналогично, $(a, b){\circ}(x, y) \in I$. Далее,

$$(u, v){\circ}((x, y) + (a, b)) - (u, v){\circ}(x, y) = (u{\circ}(x + a) -$$
$$- u, v{\circ}(y + b) - v{\circ}y) \in I_1 \times I_2 \subseteq I.$$

Следовательно, $I \in \Im(A_1 \times A_2)$.◊

В ситуации теоремы 2 будем говорить, что идеал $I \in \Im(A_1 \times A_2)$ *определяется i-допустимой последовательностью* $(I_1, J_1, к, I_2, J_2)$ *для* $A_1 \times A_2$, если он как под-m-алгебра определяется допустимой последовательностью $(I_1, J_1, к, I_2, J_2)$ для $A_1 \times A_2$.

З а м е ч а н и е 1. Результат теоремы 1 согласуется с результатами п. 3.5. Именно в соответствии с леммой 3.5.2 в обозначениях этой теоремы фактор-m- алгебра $(A_1 \times A_2)/I$ изоморфна центральному произведению m-колец A_1/I_1 и A_2/I_2.◊

Пусть $n \in \mathbb{N}_2$ и $V = A_1 \times ... \times A_n$ – прямое произведение семейства $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ m- алгебр. В связи с разложением такого вида напомним и введем некоторые определения и обозначения. Для $j \in \{1, 2,\ldots, n\}$ как обычно, обозначается j-я проекция $\pi_j : (x_1, x_2,\ldots, x_j,\ldots, x_n) \mapsto x_j$ – гомоморфизм m-кольца V на A_j. Рассмотрим преобразование η_n решетки $\Im(V)$, где для $I \in \Im(V)$ $\eta_n(I) = \pi_1(I) \times \ldots \times \pi_n(I)$. Очевидно, преобразование η_n является операцией замыкания на $\Im(V)$. Если $\eta_n(I) \neq I$, то идеал I называется *асимметричным*, а соответствующая идеалу I конгруэнция называется *асимметричной* или *косой* . Если $A = A_1 = \ldots = A_n$ и $\eta_n = Id\,\Im(V)$, то m-алгебра A называется *n-конгруэнц-правильной*. Если для любого $n \in \mathbb{N}_2$ m-алгебра A является n-конгруэнц-правильной, то эта m-алгебра называют *конгруэнц-правильной* или *без косых конгруэнций*.

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}_2$. m-алгебра A тогда и только тогда является n-конгруэнц-правильной, когда любая субнильпотентная пара его идеалов является тривиальной.

Доказательство проводим по индукции по числу n. Сначала пусть $n = 2$. Предположим, что m-алгебра A 2-конгруэнц-правильная и (I_1, J_1) – субнильпотентная пара ее идеалов. Если $I_1 \neq J_1$, то согласно теореме 1 отношение $I = \nu_2^{-1} \circ \kappa \circ \nu_1$, где $\kappa = Id\,(J_1/I_1)$, является идеалом m- алгебры $A \times A$ и при этом, если $a \in I_1$, $b \in J_1 \setminus I_1$, то $(a, b) \in \eta_2(I) \setminus I$ и получим противоречие с 2-конгруэнц-правильностью m-алгебры A. Значит, $I_1 = J_1$ и всякая субнильпотентная пара идеалов m- алгебры A является тривиальной. Обратно, если это выполняется, то из теоремы 1 сразу следует, что асимметричных идеалов у m- алгебры $A \times A$ не может быть. Предположим теперь, что $n > 2$ и утверждение теоремы верно для чисел, меньших n. Допустим, что A является k-конгруэнц-правильной для всех $k \in \mathbb{N}_2$, меньших n. Предположим, что $I \in \Im(A^n)$. Тогда согласно теореме 1 при $A_1 = A$ и $A_2 = \underbrace{A \times A \ldots \times A}_{n-1\ \text{ðàç}}$ существует субнильпотентная пара (I_1, J_1) идеалов m-алгебры A_1 и субнильпотентная пара (I_1, J_1) идеалов m-алгебры A_1 и субнильпотентная пара (I_2, J_2) идеалов m-алгебры A_2 такая, что $I = \nu_2^{-1} \circ \kappa \circ \nu_1$. Так как A 2-конгруэнц-правильна, то согласно случаю $n = 2$ будет $I_1 = J_1$ и $I_2 = J_2$, а так как A $(n-1)$-конгруэнц-правильна, то $J_2 = \pi_2(J_2) \times \ldots \times \pi_n(J_2)$. Следовательно, $I = J_1 \times J_2 = \pi_1(I) \times \ldots \times \pi_n(I) =$

$= \eta_n(I)$. Значит, m-алгебра A является n-конгруэнц-правильной. Обратно предположим, что m-алгебра A n-конгруэнц-правильна и (I_1, J_1) – субнильпотентная пара его идеалов. Если предположить, что $I_1 \neq J_1$, как и в доказательстве теоремы 1, будем иметь асимметричный идеал

$$I = \{(a_1, a_2, \ldots.\ a_n) \mid a_1, a_2, \ldots.\ a_n \in J_1;\ a_1 - a_2, \quad , a_1 - a_n \in I_1\}$$

и получим противоречие. Так что $I_1 = J_1$ и всякая субнильпотентная пара идеалов m-алгебры A тривиальна.◊

Следствие 1. m- алгебра A тогда и только тогда является конгруэнц-правильной (без косых конгруэнций), когда любая субнильпотентная пара ее идеалов является тривиальной.◊

С л е д с т в и е 2. m-алгебра A тогда и только тогда является конгруэнц-правильной (без косых конгруэнций), когда любой ее гомоморфный образ является m-алгеброй без центра.◊

С л е д с т в и е 3. Пусть $n \in \mathbb{N}_2$. m-алгебра A тогда и только тогда является n-конгруэнц-правильной, когда она 2-конгруэнц-правильна.◊

С л е д с т в и е 4. Пусть m-алгебра A проста и не является абелевой. Тогда она является конгруэнц-правильной.◊

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как m- алгебра A проста и не является абелевой, то она без центра, а так как любой ее гомоморфный образ либо нулевой, либо изоморфен A, то согласно следствию 2 A конгруэнц-правильна.◊

Предложение 1. Пусть m-кольцо К имеет правую или левую единицу или имеет мультипликативную единицу, то оно конгруэнц-правильно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I \in \mathfrak{I}(К \times К)$ и e − правая единица m-кольца К. Если $(a, b) \in I$, то $(a, 0) = (e \circ a, 0) = (e, 0) \circ (a, b) \in I$, аналогично, $(0, b) \in I$. Следовательно, $I \subseteq \eta_2(I) \subseteq I$ и $\eta_2(I) = I$. Значит, согласно теореме 2 m-кольцо К 2-конгруэнц-правильно и согласно следствию 3 конгруэнц-правильно. Аналогично, если К имеет левую единицу или мультипликативную единицу.◊

У п р а ж н е н и е 1. Заслуживает внимания случай, когда идеал I декартовой степени $A \times A$ m-алгебры A является конгруэнцией на A. В связи с этим предлагается доказать следующее утверждение.

Пусть I − бинарное отношение на m-алгебре A. Тогда следующие высказывания равносильны.

А) I − конгруэнция на A;

Б) I является идеалом m-алгебры A, являющимся рефлексивным и симметричным отношением на A;

В) $I = \varphi^{-1} \circ \varphi$ для некоторого гомоморфизма φ m-алгебры A в некоторую m-алгебру B;

Г) I определяется допустимой последовательностью вида

$(I_1, A, Id\,(A/I_1), I_1, A)$;

Д) I является идеалом m-алгебры A, определяемым i-допустимой последовательностью вида $(I_1, A, Id\,(A/I_1), I_1, A)$.◊

У п р а ж н е н и е 2. Провести подробное доказательство теорем 1 и 2 для случая К-модулей.◊

У п р а ж н е н и е 3. Пусть A есть К-модуль. Показать, что если его редукт имеет единицу, то К-модуль A конгруэнц-правильный.◊

4.3. Разрешимые m-алгебры

Нормальный ряд m-алгебры A (1.4.2) называется *разрешимым*, если все его факторы являются абелевыми m-алгебрами, т. е. согласно предложению 3.2.2 для любого $i \in \{1, 2,\dots, n\}$ выполняется включение

$$[B_i, B_i]_{\mathcal{K}} \subseteq B_{i-1}. \qquad (4.3.1)$$

Если такой нормальный ряд существует, то m-алгебра A называется *разрешимой*.

Как и для любых Ω-групп [22], имеет место

Теорема 1. Всякая нильпотентная m-алгебра является разрешимой. ◊

Цепью коммутантов m-алгебры A называется убывающий ряд под-m-алгебр

$$A = A^{(0)} \trianglerighteq A^{(1)} \trianglerighteq \dots A^{(i)} \trianglerighteq \dots, \qquad (4.3.2)$$

где для любого $i \in \mathbb{N}$

$$[A^{(i)}, A^{(i)}]_{\mathcal{K}} = A^{(i+1)}. \qquad (4.3.3)$$

Из утверждений п. 7, § 5, гл. III [22] извлечем следующие две теоремы.

Теорема 2. m-алгебра A тогда и только тогда разрешима, когда цепь коммутантов (4.3.2) после конечного числа шагов достигает нуля, т. е. $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$.◊

Теорема 3. Класс всех разрешимых m-алгебр замкнут слева и справа.◊

Очевидно, что если ненулевая m-алгебра A коммутантна, в частности, если ординарна, то она не разрешима. В качестве примеров можно рассмотреть К-модули из примеров 3.5.2, 3.5.4, а также из примера 3.5.3 в случае $S \neq A$, когда $|A| = 2$, $A^2 \neq 0$, $S \neq 0$ или $|A| > 2$, $S = 0$ или еще случай Б), $|A| > 2$ $S \neq 0$, , а также m-кольца из примеров п. 4.5 книги [39]. *Ibid.,* в п. 5.4 приведен пример m-кольца из $\mathcal{K}_0$ разрешимого, но не нильпотентного. Аналогичный пример К-модуля представлен ниже.

Пример 1. Пусть (К, +, ·, ∘) – m-кольцо, где (К, +) – прямое произведение аддитивных групп ($\mathbb{Z}_2$, +) вычетов по модулю 2 [9], К·К = К∘К = = 0. Пусть также (A, +, ·) – кольцо, где (A, +) = ($\mathbb{Z}_4$, +) – группа вычетов по модулю 4 и $A \cdot A = 0$. Определим действие К на A по правилу :
Для каждого $a \in \mathbb{Z}_4$ и любых $x, y \in \mathbb{Z}_2$ положим

$$(x, y)\square a = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a \in \{0, \quad 2\}; \\ \delta_{x,1} 2, & \text{если} \qquad a = 1; \\ \delta_{y,1} 2, & \text{если} \qquad a = 3. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

(Здесь, как обычно, $\delta_{x,1}-$ символ Кронекера).

Такая ситуация рассмотрена в примере 5.2.1 [39] и там же показано, что A есть К-модуль. Положим $B = \{0, 2\}$. Из (4.2.4) следует, что $B \in SuA$. Покажем, что $A' = B$. В самом деле, $A \cdot A = 0$ и для любых $x, y \in \mathbb{Z}_2$ и $a, b \in \mathbb{Z}_4$ согласно (4.2.4) имеем

$$(x, y)\square(a + b) - (x, y)\square a - (x, y)\square b \in B,$$

а также

$$(1, 0)\square(1 + 3) - (1, 0)\square 1 - (1, 0)\square 3 = 0 - 2 - 0 = 2,$$

поэтому согласно предложению 3.2.1 $A' = A^{(1)} = [A^{(0)}, A^{(0)}]_{\mathcal{K}} = [A, A]_{\mathcal{K}} = B$. Далее, так как $B \cdot B = 0$ и $K\square B = 0$, то $B' = 0$, поэтому ряд коммутантов для A имеет вид : $A = A^{(0)} \trianglerighteq A^{(1)} = B \trianglerighteq A^{(2)} = 0$. Таким образом, A – разрешимый К-модуль.

Наконец, докажем, что К-модуль A – без центра, откуда будет следовать, что этот К-модуль не нильпотентен. В самом деле, согласно следствию 3.6.8 $Z(A) \subseteq AnnA = B$. Остается показать, что $2 \notin Z(A)$. Для этого, воспользовавшись формулой (4.3.4), получим $(1, 0)\square(1 + 2) - (1, 0)\square 1 - (1, 0)\square 2 =$ $= 0 - 2 - 0 = 2$. Это согласно следствию 3.5.2 приводит к требуемому соотношению. Итак, A – разрешимый, но не нильпотентный К-модуль. ◊

§ 5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КАТЕГОРИИ К-МОДУЛЕЙ И КАТЕГОРИИ *m*-КОЛЕЦ

5.1. Инъективные *m*-алгебры

В этом пункте будет показано, что в категории $\mathcal{З}$ нет инъективных объектов, кроме нулевых. Начнем с определений.

Объект A категории $\mathcal{M}$ называется *инъективным*, если для любых двух ее объектов B и C и для любого мономорфизма $\mu: B \to C$ и морфизма $\varphi: B \to A$ существует морфизм $\psi: C \to A$ такой, что $\varphi = \psi \circ \mu$. Иначе говоря, диаграмма *дополняема до коммутативной*.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[dl, dashed] \\ A & \end{tikzcd}$$

Рис. 5.1.1

З а м е ч а н и е 1. Согласно следствию 7.2.1 [39] в категории К-*Mod* каждый инъективный гомоморфизм является мономорфизмом, и, обратно, каждый мономорфизм инъективен. Такой же факт, как и во всякой категории структуризованных множеств со свободными объектами [35], имеет место в категории $\mathcal{K}_0$ и в рассматриваемой ниже категории ассоциативных коммутативных колец и их гомоморфизмов, обозначаемой далее через $\mathcal{C}$. Поэтому в данном выше определении инъективного объекта в этих категориях слово “мономорфизм” можно заменить на слово “инъективный гомоморфизм”.◊

Сначала рассмотрим случай, когда $\mathcal{Z}$ = К-*Mod*.

Лемма 1. В категории $\mathcal{C}$ нет инъективных объектов, кроме нулевых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – инъективное ассоциативное коммутативное кольцо и пусть $\mu\colon A \to B$ – вложение A в качестве идеала в ассоциативное коммутативное кольцо B с единицей 1, которое существует согласно лемме 11.8.1 из [39]. Ввиду инъективности A существует гомоморфизм $\psi\colon B \to A$ такой, что $\psi\circ\mu = IdA$. Отсюда вытекает, что ψ сюръективно, поэтому для всякого $a \in A$ существует элемент $b \in B$ такой, что $\psi(b) = a$. Следовательно, $a\psi(1) = \psi(b)\psi(1) = \psi(b\cdot 1) = \psi(b) = a$, так что $\psi(1)$ является единицей кольца A, которую будем обозначать также через 1. Предположим, *ex adverso*, что $1 \neq 0$ в A. Тогда рассмотрим соответствие $\zeta\colon \mathbb{Z} \to A$, где для $n \in \mathbb{Z}$ $\zeta(n) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$, $\zeta(-n) = -\zeta(n)$, $\zeta(0) = 0$. Очевидно, что ζ – гомоморфизм колец. Если $Ker\,\zeta = \mathbb{Z}$, то $0 = \zeta(n) = 1$, что противоречит предположению $1 \neq 0$. В другом случае ζ – ненулевой гомоморфизм. Тогда пусть $\iota\colon \mathbb{Z} \to P$ – вложение кольца $\mathbb{Z}$ в некоторое поле P мощности большей, чем мощность A. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\zeta"'] & P \arrow[dl, dashed, "\rho"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Рис. 5.1.2

которая дополняется гомоморфизмом $\rho: P \to A$ до коммутативной в силу инъективности кольца A. Таким образом, имеем равенство $\zeta = \rho\circ\iota$. Так как ζ – ненулевой гомоморфизм, то отсюда следует, что гомоморфизм ρ – также ненулевой. Из этого выводим, что ρ – инъективный гомоморфизм по причине того, что P – поле. Но это противоречит тому, что мощность P больше, чем мощность A. Полученное противоречие доказывает лемму.◊

Лемма 2. Пусть A есть К-модуль. Тогда существует К-модуль B, с мультипликативной единицей, содержащий A в качестве подмодуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим кольцо $B = A \times \mathbb{Z}$**,** где группа $(A \times \mathbb{Z}, +)$ является прямым произведением групп $(A, +)$ и $(\mathbb{Z}, +)$, а умножение задается по правилу : для любых $a, b \in A$ и $m, n \in \mathbb{Z}$

$$(a, m)(b, n) = (ab + n\cdot a + m\cdot b, mn). \tag{5.1.1}$$

Тогда, как показано в § 11 [39], $(A \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ – это ассоциативное коммутативное кольцо с единицей $(0, 1)$, причем отображение $\gamma: a \mapsto (a, 0)$ есть вложение кольца A в кольцо B. Определим действие элемента $x \in$ К на $(a, m) \in A \times \mathbb{Z}$ следующим образом :

$$x\square(a, m) = (x\square a, 0). \tag{5.1.2}$$

Проверим, что отображение $\alpha: x \mapsto x\square$ – есть гомоморфизм m-кольца К в m-кольцо B^B. Действительно, пользуясь тем, что A есть К-модуль, формулами (5.1.1) и (5.1.2), для любых $x, y \in$ К, $a \in A$ и $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{gathered}(x + y)\square(a, m) = ((x + y)\square a, 0) = (x\square a + y\square a, 0) = (x\square a, 0) + (y\square a, 0) = \\ = x\square(a, m) + y\square(a, m), (x\, y)\square(a, m) = ((xy)\square a, 0) = ((x\square a)(y\square a), 0) = \\ = (x\square a, 0)(y\square a, 0) = = (x\square(a, m)(y\square(a, m), (x \circ y)\square(a, m) = ((x \circ y)\square a, 0) = \\ = (x\square(y\square a), 0) = x\square(y\square a, 0) = x\square(y\square(a, m)). \end{gathered} \tag{5.1.3}$$

Отсюда следует, что α есть представление m-кольца К и (К, B, α) есть К-модуль. Далее из (5.1.2) имеем включение К$\square(A \times 0) \subseteq A \times 0$ и для $x \in$ К,

$a \in A$ $\gamma(x\square a) = (x\square a,\ 0) = x\square(a,\ 0) = x\square\gamma(a)$. Отсюда следует, что γ – вложение К-модуля A в К-модуль B. ◊

Лемма 3. Если A – инъективный К-модуль, то $(A, +, \cdot)$ – кольцо с единицей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях леммы 2 рассмотрим диаграмму (рис. 5.1.3)

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "IdA"'] & B \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 5.1.3

которая должна быть дополняема в силу инъективности К-модуля A, т. е. существует гомоморфизм $\varphi\colon B \to A$ такой, что $\varphi\circ\gamma = IdA$. Отсюда следует, что φ сюръективен, поэтому элемент $\varphi((0,\ 1))$ должен быть единицей кольца $(A, +, \cdot)$.◊

Теорема 1. Пусть A – инъективный объект в категории К-*Mod*. Тогда A – нулевой объект.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – инъективный К-модуль. Согласно лемме 3 кольцо $(A, +, \cdot)$ имеет единицу, которую, как обычно, обозначаем через 1. Рассмотрим кольцо $B = A \times A$ − декартов квадрат кольца A. Действие элементов из К на B определим следующим образом : для $x \in$ К и $a, b \in A$

$$x\square(a,\ b) = \begin{cases} (0,0), & \text{если} \quad b \neq 0, \\ (x\square a, 0) & \text{если} \quad b = 0. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Покажем, что отображение $\alpha\colon x \mapsto x\square$ – есть гомоморфизм m-кольца К в m-кольцо B^{B}. Действительно, пусть $x, y \in$ К и $a, b \in A$. Если $b \neq 0$, то согласно (5.1.4) с использованием соотношения (6) п. 1.1 имеем

$$(x + y)\square(a,\ b) = (0,\ 0) = (0,\ 0)+ (0,\ 0) = x\square(a,\ b)+ y\square(a,\ b),\ (x\,y)\square(a,\ b) =$$
$$= (0,\ 0) = (0,\ 0)(0,\ 0) = (x\square(a,\ b)(y\square(a,\ b),\ (x\circ y)\square(a,\ b) = (0,\ 0) =$$
$$= (x\square 0,\ 0) = x\square(0,\ 0) = x\square(y\square(a,\ b)).$$

В случае $b = 0$ согласно (5.1.4) получаем

$$(x + y)\square(a, b) = ((x + y)\square a, 0) = (x\square a + y\square a, 0) = (x\square a, 0)+ (y\square a, 0) =$$
$$= x\square(a, b)+ y\square(a, b),\ (x\, y)\square(a, b) = ((xy)\square a, 0) = ((x\square a)(y\square a), 0) =$$
$$= (x\square a, 0)(y\square a, 0) = (x\square(a, b)(y\square(a, b),\ (x\circ y)\square(a, b) = ((x\circ y)\square a, 0) =$$
$$= (x\square(y\square a), 0) = x\square(y\square a, 0) = x\square(y\square(a, b)).$$

Отсюда следует, что (К, B, α) есть m-тройка и К-модуль. Рассмотрим естественное вложение $\iota\colon A \to A \times A$ кольца A в кольцо B, где для $a \in A$ $\iota(a) = (a, 0)$. На самом деле ι является гомоморфизмом К-модулей. Действительно, для любого $x \in$ К и $a \in A$ получим $\iota(x\square a) = (x\square a, 0) = x\square(a, 0) = x\square\iota(a)$. Мы теперь можем составить диаграмму (рис. 5.1.4), которая ввиду инъективности A должна дополняться гомоморфизмом $\varphi : B \to A$ таким, что

$$\varphi\circ\iota = IdA. \tag{5.1.5}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "IdA"'] & B \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Рис. 5.1.4

Положим для $a, b \in A$

$$\psi(a) = \varphi((a, 0)),\ \eta(b) = \varphi((0, b)). \tag{5.1.6}$$

Очевидно, что ψ и η – эндоморфизмы кольца A, при этом выполняется условие : для любых $a, b \in A$

$$\varphi((a, b)) = \psi(a) + \eta(b). \tag{5.1.7}$$

Пользуясь (5.1.5), теперь выводим для любого $a \in A$: $\psi(a) = \varphi((a, 0)) = \varphi(\iota(a)) = a$. Теперь (5.1.7) можно переписать в виде

$$\varphi((a, b)) = a + \eta(b). \tag{5.1.8}$$

Так как φ и η – гомоморфизмы колец, то благодаря (5.1.8) получим для любых $a, b, c, d \in A$

$$\varphi((a, b)(c, d)) = \varphi((ac, b\,d)) = ac + \eta(bd) = \varphi((a, b))\varphi((c, d)) = (a + \eta(b))(\,c +$$
$$+ \eta(d)) = ac + a\,\eta(d) + \eta(b)c + \eta(b)\eta(d) = ac + a\eta(d) + \eta(b)c + \eta(bd).$$

Отсюда следует, что $a\eta(d) + \eta(b)c = 0$. Отсюда, полагая здесь $a = 0$, $c = 1$, приходим к тому, что $\eta(b) = 0$ для любого $b \in A$. Теперь благодаря (5.1.8) для любых $a, b \in A$ имеем

$$\varphi((a, b)) = a. \tag{5.1.9}$$

Привлекая формулу (5.1.4) вместе с (5.1.9), выводим для a, $b \in A$, если $b \neq 0$, то для любого $x \in К$ $0 = \varphi((0, 0)) = \varphi(x \square (a, b) = x \square (\varphi(a, b)) = x \square a$. Отсюда следует, что A является чистым К-модулем. Так как категорию $\mathcal{C}$ можно считать полной [35] подкатегорией категории К-*Mod*, состоящую из чистых К-модулей и их гомоморфизмов и так как мономорфизмы в этой подкатегории являются мономорфизмами категории К-*Mod* и обратно, то К-модуль A как инъективный объект категории К-*Mod* и как объект категории $\mathcal{B}$ является инъективным объектом категории $\mathcal{B}$ и потому нулевым объектом согласно лемме 1. ◊

Лемма 4. Пусть $(A, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо, $|A| > 2$, $(К, +, \cdot, \circ) = (A_0^A, +, \cdot, \circ)$. Тогда К- модуль (К, A), где $f \square a = f(a)$ для $f \in К$, $a \in К$, прост.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, *е.а.*, что $I \in StA$, $\{0\} \subset I \subset A$. Тогда существуют элементы $a \in I$, $a \neq 0$, $b \in A$, $b \notin I$ и для некоторого $f \in К$ $f \square a = b$. Ввиду стабильности идеала I тогда $b = f \square a - f \square 0 \in I$, что приводит к противоречию. Следовательно, A – простой К-модуль.◊

Лемма 5. Пусть $(A, +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей 1, $|A| > 2$, $(К, +, \cdot, \circ) = (A_0^A, +, \cdot, \circ)$. Тогда m-кольцо К – простое.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, *е.а.*, что $J \in \Im(К)$, $\{c_0\} \subset I \subset Ê$. Для каждого $a \in A$ определим *квазипостоянное преобразование* $f_a \in A_0^A$ по правилу : если $b \in A \setminus \{0\}$, то $f_a(b) = a$. Отметим, что квазипостоянные преобразования обладают почти такими же свойствами по отношению к преобразованиям из A_0^A, как и постоянные преобразования c_a по отношению к преобразованиям из A^A (см., например, п. 3.1 книги [39]). Именно для любых $a, b \in A$ и $f \in A_0^A$ выполняются соотношения :

C1. $f_a \pm f_b = f_{a \pm b}$.

C2. $f_a f_b = f_{ab}$.

C3. $f f_1 = f$.

C4. $f \circ f_a = f_{f(a)}$.

C5. $f_0 f = f_0$.

Положим

$$I = \{ a \in A \mid f_a \in J \}. \tag{5.1.10}$$

Благодаря C1 и C2 I является идеалом кольца $(A, +, \cdot)$. Далее, если $a \in I$, $b \in A$ и $f \in A_0^A$, то, используя C1, C4, и то, что идеал J стабилен слева, имеем $f_{f(a+b)-f(a)} = f_{f(a+b)} - f_{f(a)} = f \circ (f_a + f_b) - f \circ f_a \in J$. Значит, $I \in StA$, и так как К-модуль A прост согласно лемме 4, то либо $I = 0$, либо $I = A$. Покажем, что первый случай невозможен. Действительно, так как $J \neq \{f_0\}$, то для некоторых $a, b \in A$ существует преобразование $f \in J$ такое, что $f(a) = b \neq 0$. Теперь, используя инвариантность справа идеала J и свойство C4, получаем $f_b = f_{f(a)} = . f \circ f_a \in J$. Согласно (5.1.10) это означает, что $b \in I \neq 0$. Остается возможность $I = A$. Но тогда $f_1 \in J$ и благодаря C3 тогда $J =$ К. Противоречие показывает, что A_0^A – простое m-кольцо.◊

***Теорема* 2.** В категории $\mathcal{K}_0$ всякий инъективный объект является нулевым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – инъективный объект категории $\mathcal{K}_0$, причем $A \neq 0$. Рассмотрим кольцо $(B, +, \cdot) = (A \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$, где группа $(A \times \mathbb{Z}, +)$ является прямым произведением групп $(A, +)$ и $(\mathbb{Z}, +)$, а умножение задается по правилу : для любых $a, b \in A$ и $m, n \in \mathbb{Z}$

$$(a, m)(b, n) = (ab + n \bullet a + m \bullet b, mn), \tag{5.1.11}$$

где $0 \bullet a = 0$, $n \bullet a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}$ и $(-n) \bullet a = -(n \bullet a)$, если $n \in \mathbb{N}$. Тогда, как показано в § 11 [39], $(A \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ – это ассоциативное коммутативное кольцо с единицей $(0, 1)$, причем отображение $\gamma: a \mapsto (a, 0)$ есть вложение кольца A в кольцо B. Будем строить точный A-модуль исходя из кольца B. Именно действие элементов из A на элементы из кольца B определим следующим образом : если $a, b \in A$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\alpha(a)((b, n)) = \begin{cases} (a, 0), & \text{если} \quad n \neq 0, \\ (a \circ b, 0), & \text{если} \quad n = 0. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

Покажем, что α – гомоморфизм m-колец. В самом деле, пусть $a, b, c \in A$ и $p \in P$. Если $n \neq 0$, то согласно (5.1.12)

$$\alpha(a + b)((c, n)) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \alpha(a)((c, n)) + \alpha(b)((c, n)) =$$
$$= (\alpha(a) + \alpha(b))((c, n)),\ \alpha(ab)((c, n)) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) =$$
$$= (\alpha(a)((c, n)))(\alpha(b)((c, n))) = (\alpha(a)\alpha(b))((c, n)),\ \alpha(a \circ b)((c, n)) = (a \circ b, 0) =$$
$$= \alpha(a)(\alpha(b)((c, n))) = (\alpha(a) \circ \alpha(b))((c, n)).$$

Если $n = 0$, то

$$\alpha(a + b)((c, n)) = ((a + b) \circ c, 0) = (a \circ c + b \circ c, 0) = (a \circ c, 0) + (b \circ c, 0) =$$
$$= \alpha(a)(((c, n)) + \alpha(b)((c, n)) = (\alpha(a) + \alpha(b))((c, n)).$$

Совершенно аналогично, $\alpha\,(ab)((c, n)) = (\,\alpha\,(a)\;\alpha\,(b))((c, n))$, а также

$$\alpha(a{\circ}b)((c, n)) = (a{\circ}b{\circ}c, 0) = \alpha\,(a)((b{\circ}c, 0)) = (\,\alpha\,(a)(\,\alpha\,(b)((c, 0) =$$
$$= (\,\alpha\,(a){\circ}\,\alpha\,(b))((c, n)).$$

Следовательно,

$$\alpha\,(a + b) = \alpha\,(a) + \alpha\,(b),\; \alpha\,(ab) = \alpha\,(a)\,\alpha\,(b),\; \alpha\,(a{\circ}b) = \alpha\,(a){\circ}\,\alpha\,(b).$$

Это означает, что α − гомоморфизм m-колец и (A, B, α) есть m-тройка. Покажем, что она эффективна. В самом деле, если $a \in Ker\,\alpha$, то согласно (5.1.11) $\alpha\,(a)((0, 1)) = (a, 0) = (0, 0)$, поэтому $a = 0$.

Теперь ввиду инъективности m-кольца A должен существовать гомоморфизм β m-кольца B_0^B в m-кольцо A такой, что $\beta{\circ}\,\alpha = idA$. Отсюда следует, что β – ненулевой сюръективный гомоморфизм m-кольца B_0^B на A, а так как B – бесконечное кольцо с единицей, то согласно лемме 5 m-кольцо B_0^B – простое. Поэтому гомоморфизм β должен быть инъективным, что противоречит тому, что мощность B_0^B больше мощности A.◊

Из доказательства теоремы 1 выделим

С л е д с т в и е 1. Всякое (нуль-симметричное) m-кольцо вкладывается в качестве под-m-кольца в m-кольцо всех преобразований некоторого ассоциативного коммутативного кольца, перестановочных с нулевым преобразованием.◊

З а м е ч а н и е 2. Результаты этого пункта соответствуют аналогичным результатам в теории почтиколец [41, 62, 65], …. Однако доказательства не аналогичны.◊

5.2. Проективные *m*-алгебры

Понятие проективного объекта [17] двойственно понятию инъективного объекта. Такое понятие не очень удобно для m-алгебр, так как и в категории К-*Mod* и в категории $\mathcal{K}_0$ не всякий эпиморфизм является сюръективным гомоморфизмом как и в категории $\mathcal{C}.$ коммутативных ассоциативных колец. Поэтому под проективной m-алгеброй естественно понимать проективный объект категории $\mathcal{Z}$ относительно класса сюръективных гомоморфизмов [4]. Именно, m-алгебру A будем называть *проективной*, если для любых К-m-алгебр B и C, для любого сюръективного гомоморфизма μ m-алгебры C на m-алгебру B и любого гомоморфизма φ из A в B существует гомоморфизм ψ из A в C такой, что $\varphi = \mu{\circ}\,\psi$, иначе говоря, диаграмма дополняема морфизмом ψ до коммутативной.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\
C \arrow[r, "\mu"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Рис. 5.2.1

Очевидно, что всякая свободная m-алгебра проективна. Так же, как и для колец, доказывается

Предложение 1. Пусть $A = \coprod_{i\in I} A_i$ – свободное произведение семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. m-алгебр. Тогда m-алгебра A проективна в том и только в том случае, когда проективна каждая из m-алгебр A_i. $\Diamond$

Следующее утверждение вытекает из известного факта (см., например, [74]) для многообразий универсальных алгебр.

Теорема 1. m-алгебра A проективна тогда и только тогда, когда она является ретрактом некоторой свободной m-алгебры.

Теорема 2. m-алгебра A проективна тогда и только тогда, когда любой ее идеал является ядром некоторого ее идемпотентного эндоморфизма.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что m-алгебра A проективна и пусть $I \in \Im(A)$. Рассмотрим диаграмму 5.2.1, где $\mu = \nu_I = natI\colon A \to A/I$, $\varphi = Id\,(A/I)$. Ввиду проективности A существует гомоморфизм ψ такой, что $\varphi\circ\psi = id\,(A/I)$. Отсюда следует, *inter alia*, что гомоморфизм ψ инъективен. Положим $\varepsilon = \psi\circ\mu : A \to A$. Для всякого $a \in A$ имеем, используя инъективность ψ:

$$a \in Ker\varepsilon \Leftrightarrow \psi(\mu(a)) = 0 \Leftrightarrow \mu(a) = 0 \Leftrightarrow a \in I.$$

Следовательно, идеал I оказывается ядром идемпотентного эндоморфизма ε.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть всякий идеал m-алгебры A является ядром некоторого идемпотентного эндоморфизма этой m-алгебры. Рассмотрим диаграмму 5.2.1, где μ − сюръективный гомоморфизм. Положим $I = Ker\,\mu$. Можно считать, что $B = A/I$ и $\mu = \nu_I = natI\colon A \to A/I$. . По предположению $I = Ker\,\varepsilon$ для некоторого идемпотентного эндоморфизма ε

m-алгебры A. В этом случае ε индуцирует гомоморфизм γ: $A / I \to A$ такой, что $\gamma \circ \mu = \varepsilon$. Так как ε − идемпотентный эндоморфизм, то для всякого $a \in A$ получим $\varepsilon(\varepsilon(a)) = \varepsilon(\gamma(\mu(a))) = \varepsilon(\gamma(a + I)) = \varepsilon(a)$, откуда вытекает, что $\gamma(a + I) + I = a + I$, поэтому $\mu \circ \gamma = Id\ (A / I)$. Полагая теперь $\psi = \gamma \circ \varphi$: $C \to A$, имеем $\mu \circ \psi = \mu \circ \gamma \circ \varphi = \varphi$. Следовательно, A − проективная m-алгебра.◊

Согласно лемме 2.3.1 отсюда выводим

С л е д с т в и е 1. m-алгебра A проективна тогда и только тогда, когда любой ее идеал является второй компонентой в некотором полупрямом разложении этой m-алгебры.◊

У п р а ж н е н и е 1. Пусть e – инъективный элемент m-кольца К, причем $e \in E$(К)*. Тогда К$\circ e$ как подмодуль естественного К-модуля является проективным К-модулем. ◊

5.3. Образующие и кообразующие

Для m-алгебр A и B обозначаем через $Im(A, B)$ – идеал $\ll \bigcup\limits_{\varphi \in Hom(A,B)} Im\varphi \gg$ m-алгебры B, а через $Ker(A, B)$ – идеал $\bigcap\limits_{\varphi \in Hom(A,B)} Ker\varphi$ m-алгебры A. m-алгебру A называем *образующей*, если для любых m-алгебр B и C и для любого ненулевого гомоморфизма $\mu \in Hom(B, C)$ существует гомоморфизм $\varphi \in Hom(A, B)$ такой, что $\mu \circ \varphi \neq c_0$. Двойственно, m-алгебру A называем *кообразующей*, если для любых m-алгебр B и C для любого ненулевого гомоморфизма $\mu \in Hom(B, C)$ существует гомоморфизм $\varphi \in Hom(C, A)$ такой, что $\varphi \circ \mu \neq c_0$.

Предложение 1. Для того чтобы m-алгебра A была образующей, необходимо и достаточно, чтобы для любой m-алгебры B выполнялось равенство

$$Im(A, B) = B. \tag{5.3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A есть образующая, B и C – произвольные m-алгебры. Обозначим идеал $\ll \bigcup\limits_{\varphi \in Hom(A,B)} Im\varphi \gg$ через $\widetilde{B}$. Если $\widetilde{B} \neq B$, то гомоморфизм $\nu_{\widetilde{B}} = nat\,\widetilde{B}$: $B \to B / \widetilde{B}$ – не нулевой. Так как A – образующая, то существует $\psi \in Hom(A, B)$ такой, что $\nu_{\widetilde{B}} \circ \psi \neq c_0$. Но тогда $Im\psi$ не содержится в $\widetilde{B}$, что противоречит определению идеала $\widetilde{B}$. Так что остается возможность $\widetilde{B} = B$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что для любой m-алгебры B выполняется равенство (5.3.1) и докажем, что A – образующая. Пусть B

и C – произвольные m-алгебры, $\mu \in Hom(B, C)$ и $\mu \neq c_0$. Если для любого $\varphi \in Hom(A, B)$ будет $\mu \circ \varphi = c_0$, то согласно (5.3.1) $B =$

$= \ll \bigcup_{\varphi \in Hom(A,B)} Im\varphi \gg \subseteq Ker\mu$, что противоречит предположению $\mu \neq c_0$.

Значит, существует $\varphi \in Hom(A, B)$ такой, что $\mu \circ \varphi \neq c_0$, и К-модуль A является образующим. ◊

Предложение 2. Для того чтобы m-алгебра A была кообразующей, необходимо и достаточно, чтобы для любой m-алгебры B выполнялось равенство

$$Ker(B, A) = 0. \tag{5.3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть A – кообразующая и предположим, что равенство (5.3.2) не выполняется для некоторой m-алгебры B. Тогда идеал $J = \bigcap_{\varphi \in Hom(\hat{A},\grave{A})} Ker\varphi$ – не нулевой. Обозначим через μ вложение идеала J в m-алгебру B. Тогда $\mu \in Hom(J, B)$ и $\mu \neq c_0$. Так как A – кообразующая, то существует $\varphi \in Hom(B, A)$ такой, что $\varphi \circ \mu \neq c_0$. Но тогда J не содержится в $Ker\varphi$, что противоречит определению идеала J. Следовательно, $J = 0$ и равенство (5.3.2) выполняется.

Достаточность. Пусть (5.3.2) выполняется для любой m-алгебры B и докажем, что A – кообразующая. Для этого предположим, что $\mu \in Hom(C, B)$ для каких-то m-алгебр B и C, причем $\mu \neq c_0$. Если для каждого $\varphi \in Hom(B, A)$ будет $\varphi \circ \mu = c_0$, то согласно (5.3.2) $\mu(C) \subseteq$

$\subseteq \bigcap_{\varphi \in Hom(\hat{A},\grave{A})} Ker\varphi = Ker(B, A) = 0$, что противоречит предположению $\mu \neq c_0$.

Значит, A – кообразующая. ◊

Лемма 1. Пусть A и B – m-алгебры, B – образующая и $Im(A, B) =$ $= B$. Тогда m-алгебра A – тоже образующая.

Доказательство. Пусть A и B – m-алгебры, B – образующая и $Im(A, B) = B$. Предположим, что C и D – некоторые m-алгебры, $\mu \in Hom(C, D)$ и $\mu \neq c_0$. Так как B – образующая, то существует $\varphi \in Hom(B, C)$ такой, что $\mu \circ \varphi \neq c_0$. Если теперь для любого $\psi \in Hom(A, C)$ будет $\mu \circ \psi = c_0$, то для каждого $\in Hom(A, B)$, было бы $\mu \circ \varphi \circ \rho = c_0$, что привело бы к включению $\bigcup_{\rho \in Hom(A,B)} Im\rho \subseteq Ker\, \mu \circ \varphi$. Но тогда $B = Im(A, B) =$

$= \ll \bigcup_{\rho \in Hom(A,B)} Im\rho \gg \subseteq Ker\, \mu \circ \varphi$, что противоречит тому, что $\mu \circ \varphi \neq c_0$. Следовательно, A – образующая. ◊

Двойственным образом доказывается

Лемма 2. Пусть A – кообразующая и B – такая m-алгебра, что

$Ker(A, B) = 0$. Тогда m-алгебра B – тоже кообразующая. ◊

Теорема 1. Для m-алгебры A следующие утверждения равносильны.

А) m-алгебра A – образующая;

Б) для любого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. экземпляров m-алгебры A свободное произведение $\coprod_{i\in I} A_i$ является образующим;

В) для некоторого непустого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. экземпляров m-алгебры A свободное произведение $\coprod_{i\in I} A_i$ является образующим;

Г) для любой m-алгебры B существует гомоморфизм $\varphi\colon \coprod_{i\in I} A_i \to B$ свободного произведения некоторого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. экземпляров m-алгебры A в m-алгебру B такой, что

$$\ll Im\varphi \gg\ = B. \tag{5.3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. А) $\Rightarrow$ В). Пусть A – образующая и $\widetilde{A} = \coprod_{i\in I} A_i$ – свободное произведение семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. экземпляров m-алгебры A. и пусть $\gamma_i : A_i \to A$ – каноническое вложение m-алгебры A_i в $\widetilde{A}$, $i\in I$. Предположим, что B и C – некоторые m-алгебры, $\mu\in Hom(B, C)$ и $\mu \neq c_0$. Так как A – образующая, то существует $\varphi\in Hom(A, B)$ такой, что $\mu\circ\varphi \neq c_0$. Для каждого $i\in I$ К-модуль A_i есть экземпляр К-модуля A, соответствующий экземпляр гомоморфизма φ обозначим через φ_i. Из $\mu\circ\varphi \neq c_0$ тогда следует, что

$$\mu\circ\varphi_i \neq c_0 \tag{5.3.4}$$

для любого $i\in I$. Из определения свободного произведения вытекает, что для некоторого единственного гомоморфизма $\psi : \widetilde{A} \to B$ выполняется равенство

$$\varphi_i = \psi\circ\gamma_i \tag{5.3.5}$$

для любого $i\in I$. Ввиду (5.3.4) и (5.3.5) тогда $c_0 \neq \mu\circ\varphi_i = \mu\circ\psi\circ\gamma_i$ для любого $i\in I$, откуда следует, что $\mu\circ\psi \neq c_0$. Таким образом, $\widetilde{A}$ – образующая.

Б) $\Rightarrow$ В). Очевидно.

В) $\Rightarrow$ А). Пусть $\widetilde{A} = \coprod_{i\in I} A_i$ – свободное произведение семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. экземпляров m-алгебры A. и пусть для $i\in I$ $\gamma_i : A_i \to A$ – каноническое вложение m-алгебры A_i в $\widetilde{A}$. Покажем, что A – образующая. Для этого предположим, что B и C – некоторые m-алгебры,

$\mu \in Hom(B, C)$ и $\mu \neq c_0$. Так как $\widetilde{A}$ – образующая, то существует $\varphi \in Hom(\widetilde{A}, B)$ такой, что $\mu \circ \varphi \neq c_0$. Если бы для каждого $i \in I$ было бы $\mu \circ \varphi \circ \gamma_i = c_0$, то ввиду равенства $c_0 \circ \gamma_i = c_0$ и коуниверсальности свободного произведения тогда бы $\mu \circ \varphi = c_0$, что приводит к противоречию. Следовательно, m-алгебра A_i – образующая, а так как A изоморфен A_i, то A – образующая. Итак, утверждения А), Б), В) равносильны.

А) $\Rightarrow$ Г). Пусть A – образующая. Тогда согласно предложению 1 для m-алгебры B имеет место равенство (5.3.1). Зафиксируем произвольную m-алгебру B. В качестве множества индексов I рассматриваем множество $Hom(A, B)$. Для каждого $\varphi \in I$ пусть A_φ – соответствующий экземпляр m-алгебры A. Теперь для каждого A_φ имеем гомоморфизм $\varphi : A_\varphi \to B$ и каноническое вложение $\gamma_\varphi ; A_\varphi \to \widetilde{A}$ m-алгебры A_φ в свободное произведение $\widetilde{A} = \coprod_{\varphi \in I} A_\varphi$ семейства $\{A_\varphi\}_{\varphi \in I}$ m-алгебр. В силу коуниверсальности свободного произведения для некоторого единственного гомоморфизма $\psi : \widetilde{A} \to B$ выполняется равенство

$$\varphi = \psi \circ \gamma_\varphi \tag{5.3.6}$$

для любого $\varphi \in I$. Докажем равенство

$$\ll Im\psi \gg = B. \tag{5.3.7}$$

Для этого, воспользовавшись (5.3.6), имеем $\psi(\gamma_\varphi(A_\varphi)) = = \varphi(A_\varphi)$, поэтому и так как $\forall \varphi \in I\ (\varphi(A_\varphi) = \varphi(A))$, получим $\psi(\bigcup_{\varphi \in I} \gamma_\varphi(A_\varphi)) = \bigcup_{\varphi \in I} \psi(\gamma_\varphi(A_\varphi)) =$

$= \bigcup_{\varphi \in I} \varphi(A_\varphi)$. Теперь благодаря (5.3.1)

$$\ll Im\psi \gg = \ll \psi(\widetilde{A}) \gg \supseteq \ll \psi(\bigcup_{\varphi \in I} \gamma_\varphi(A_\varphi)) \gg =$$

$$= \ll \bigcup_{\varphi \in I} \varphi(A_\varphi) \gg = Im\,(A, B) = B.$$

Отсюда следует равенство (5.3.7), что и требовалось.

Г) $\Rightarrow$ А). Пусть B – произвольная m-алгебра. Из Г) следует, что для некоторого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. экземпляров m-алгебры A существует гомоморфизм $\varphi : \widetilde{A} = \coprod_{i \in I} A_i \to B$ свободного произведения в m-алгебру B такой, что выполняется (5.3.3). Как и выше, для $i \in I$ пусть $\gamma_i : A_i \to \widetilde{A}$ –

каноническое вложение m-алгебры A_i в $\widetilde{A}$. Зафиксируем изоморфизм ζ_i : $A \to A_i$ m-алгебры A на ее экземпляр A_i, $i \in I$. Положим для $i \in I$ φ_i = $= \varphi \circ \gamma_i \circ \zeta_i : A \to B$. Предположим, что C – некоторая m-алгебра, $\mu \in Hom(B, C)$ и $\mu \neq c_0$. Допустим, *е.а.*, что для каждого $i \in I$ будет $\mu \circ \varphi_i = c_0$, Тогда $\mu \circ \varphi_i = \mu \circ \varphi \circ \gamma_i \circ \zeta_i = c_0$ и так как ζ_i – изоморфизм, то $\mu \circ \varphi \circ \gamma_i = c_0$. Отсюда следует, что $\varphi(\gamma_i(A_i)) \subseteq Ker\mu$ и, следовательно, $\bigcup\limits_{i\in I}\varphi(\gamma_i(A_i))$ =

$\varphi(\bigcup\limits_{i\in I}\gamma_i(A_i)) \subseteq Ker\mu$. Если учесть, что согласно сказанному в конце п. 2.5 множество $\bigcup\limits_{i\in I}\gamma_i(A_i)$ порождает $\widetilde{A}$ как под-m-алгебру, то отсюда следует, что $\varphi(\widetilde{A})) \subseteq Ker\mu$ и так как $Ker\mu \trianglelefteq B$, то благодаря (5.3.3) B = $= \ll Im\varphi \gg \subseteq Ker\mu$, что противоречит тому, что $\mu \neq c_0$. Противоречие показывает, что для некоторого $i \in I$ будет $\mu \circ \varphi \circ \gamma_i \neq c_0$, поэтому $\mu \circ \varphi \neq c_0$. Это означает, что A – образующая. А) доказано. Теорема доказана. ◊

Двойственно доказывается

Теорема 2. Для m-алгебры A следующие утверждения равносильны.

А) m-алгебра A – кообразующая;

Б) для любого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. экземпляров m-алгебры A декартово произведение $\overline{\prod\limits_{i\in I} A_i}$ является кообразующей m-алгеброй;

В) для некоторого непустого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. экземпляров m-алгебры A декартово произведение $\overline{\prod\limits_{i\in I} A_i}$ этого семейства является кообразующей m-алгеброй;

Г) любая m-алгебра изоморфна под-m-алгебре декартова произведения некоторого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. экземпляров m-алгебры A. ◊

У п р а ж н е н и е 1. Доказать лемму 2 и теорему 2. ◊

У п р а ж н е н и е 2. Доказать следующее утверждение.

m-алгебра A является образующей тогда и только тогда, когда для любых m-алгебр B и C и любого гомоморфизма $\mu \in Hom(B, C)$, для которого отображение $\varphi \mapsto \mu \circ \varphi$ из множества $Hom(A, B)$ в множество $Hom(A, C)$ есть сюръекция, является эпиморфизмом категории К-Mod. ◊

§ 6. ДОПОЛНЕНИЯ

Введенные в этом параграфе понятия происходят из теории колец [17] и играют вспомогательную роль в рассмотрениях последующих глав.

6.1. Существенные и косущественные под-*m*-алгебры

Под-m-алгебру B m-алгебры A называем *косущественной* (*малой*), если для любой под-m-алгебры $C \in SubA$ из равенства $B \vee C = A$ следует, что $C = A$ (обозначение : $B \overset{\circ}{\subsetneq} A$), и *существенной* (*большой*), если для любой под-m-алгебры $C \in SubA$ $B \cap C = 0 \Rightarrow C = 0$, (обозначение : $B \overset{\times}{\subsetneq} A$). Идеал B m-алгебры A называем *идеально малым* (*i-малым*), если для любого идеала $C \in \Im(A)$ из $B + C = A$ следует, что $C = A$, (обозначение : $B \overset{\triangleleft}{\subsetneq} A$), и *идеально большим* (*i-большим*), если для любого идеала $C \in \Im(A)$ из $B \cap C = 0$ следует, что $C = 0$ (обозначение : $B \overset{\triangleleft\times}{\subsetneq} A$).

Гомоморфизм $\varphi \in Hom(A, B)$ называем *косущественным* (*малым*), если $Ker\varphi \overset{\circ}{\subsetneq} A$, *существенным* (*большим*), если $Im\varphi \overset{\times}{\subsetneq} B$, *i-малым*, если $Ker\varphi \overset{\triangleleft}{\subsetneq} A$, и *i-большим*, если $Im\varphi \overset{\triangleleft\times}{\subsetneq} B$.

Непосредственно из определений получаем

Следствие 1. Для любых под-m-алгебр B и C m-алгебры A выполняются следующие соотношения.

1°. $B \overset{\circ}{\subsetneq} A \Leftrightarrow \forall\, C \in Sub\, A\ (C \neq A \Rightarrow B \vee C \neq A)$.

2°. $B \overset{\times}{\subsetneq} A \Leftrightarrow \forall\, C \in SubA\ (C \neq 0 \Rightarrow B \cap C \neq 0)$.

3°. $B \overset{\triangleleft}{\subsetneq} A \Leftrightarrow \forall\, C \in \Im(A)\ (C \neq A \Rightarrow B + C \neq A)$.

4°. $B \overset{\triangleleft\times}{\subsetneq} A \Leftrightarrow \forall\, C \in \Im(A)\ (C \neq 0 \Rightarrow B \cap C \neq 0)$.

5°. $A \neq 0 \& B \overset{\circ}{\subsetneq} A \Rightarrow B \neq A)$.

6°. $A \neq 0 \& B \overset{\times}{\subsetneq} A \Rightarrow B \neq 0)$.

7°. $A \neq 0 \& B \overset{\triangleleft}{\subsetneq} A \Rightarrow B \neq A)$.

8°. $A \neq 0 \& B \overset{\triangleleft\times}{\subsetneq} A \Rightarrow B \neq 0)$.

9°. $0 \overset{\circ}{\subsetneq} A \overset{\times}{\subsetneq} A \;\&\; 0 \overset{\triangleleft}{\subsetneq} A \overset{\triangleleft\times}{\subsetneq} A$.

Лемма 1. Пусть $C, B \in SubA$, D и E – некоторые m-алгебры. При этих предположениях имеют место следующие утверждения:

а) $C \leq B \overset{\circ}{\subsetneq} A \Rightarrow C \overset{\circ}{\subsetneq} A$;

б) для любого конечного семейства $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, под-m-алгебр

m-алгебры A, если $A_i \subsetneq^{\circ} A$ для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$, то $\bigvee_{i=1}^{n} A_i \subsetneq^{\circ} A$;

в) если $\varphi \in Hom(A, D)$, $B \subsetneq^{\circ} A$ и $\varphi(B) \in \Im(D)$, то $\varphi(B) \subsetneq^{\circ} D$;

г) если $\varphi \in Hom(A, D)$, $\psi \in Hom(D, E)$, причем φ и ψ – i-малые сюръективные гомоморфизмы, то $\psi \circ \varphi \in Hom(A, E)$ – i-малый сюръективный гомоморфизм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $C \le B \subsetneq^{\circ} A$. Предположим, что $D \le A$ и $C \vee D = A$. Тогда $A = C \vee D \subseteq B \vee D$, поэтому $A = B \vee D$ и так как B – малая под-m-алгебра, отсюда следует, что $D = A$;

б) пусть $A_i \subsetneq^{\circ} A$ для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Утверждение докажем по индукции по n. Начнем со случая $n = 2$. Предположим, что $D \le A$ и $(A_1 \vee A_2) \vee D = A$. Тогда $A_1 \vee (A_2 \vee D) = A$ и ввиду того, что $A_1 \subsetneq^{\circ} A$, должно быть $A_2 \vee D = A$, а так как $A_2 \subsetneq^{\circ} A$, то $D = A$. Значит, $A_1 \vee A_2 \subsetneq^{\circ} A$. Пусть теперь $n > 2$ и утверждение верно для семейств под-m-алгебр с меньшим, ,чем n количеством элементов. Предположим, что $D \le A$ и $(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \vee D =$ $= A$. Тогда $(\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i) \vee (A_n \vee D) = A$ и так как по предположению индукции $\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i \subsetneq^{\circ} A$, то должно быть $A_n \vee D = A$, а теперь ввиду $A_n \subsetneq^{\circ} A$ выходит, что $D = A$. Итак, $\bigvee_{i=1}^{n} A_i \subsetneq^{\circ} A$ и (б) доказано;

в) пусть $\varphi \in Hom(A, D)$, и $\varphi(B) \in \Im(D)$. Предположим, что $E \le D$ и

$$\varphi(B) \vee E = D. \tag{6.1.1}$$

Так как $\varphi(B) \trianglelefteq D$, то из этого вытекает равенство $\varphi(B) + E = A$. Теперь для произвольного $a \in A$ существуют элементы $b \in B$ и $e \in E$ такие, что $\varphi(a) =$ $= \varphi(b) + e$. Отсюда получаем равенства $e = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b)$. Следовательно, $a - b \in \overset{-1}{\varphi}(E)$ и $a \in B + \overset{-1}{\varphi}(E)$. Ввиду произвольности элемента a отсюда следует, что $A = B + \overset{-1}{\varphi}(E) = B \vee \overset{-1}{\varphi}(E)$, и так как $B \subsetneq^{\circ} A$, из этого выводим равенство $\overset{-1}{\varphi}(E) = A$. Теперь приходим к тому, что $\varphi(A) =$ $= \varphi(\overset{-1}{\varphi}(E)) = E \cap \varphi(A)$, следовательно, $\varphi(B) \subseteq \varphi(A) \subseteq E$, а теперь благодаря (6.1.1) $E = D$, так что $\varphi(B) \subsetneq^{\circ} D$.

г) пусть $\varphi\in Hom(A, D)$, $\psi\in Hom(D, E)$, причем φ и ψ – косущественные сюръективные гомоморфизмы. Положим $I = Ker(\psi\circ\varphi)$. Так как φ сюръективен, то $I = \overset{-1}{\varphi}(Ker\psi)$. Допустим, что $B \le A$ и $I \vee B = A$. Так как $I \trianglelefteq A$, то отсюда следует, что $I + B = A$. Теперь благодаря сюръективности гомоморфизма φ имеем

$$D = \varphi(A) = \varphi(I + B) = \varphi(I) + \varphi(B) = \varphi(\overset{-1}{\varphi}(Ker\psi)) + \varphi(B) = Ker\psi + \varphi(B).$$

Так как ψ косущественен, то отсюда следует, что

$$\varphi(B) = D. \qquad (6.1.2)$$

Теперь надо доказать равенство

$$Ker\varphi + B = A. \qquad (6.1.3)$$

Для этого предположим, что $a\in A$. Из (6.1.2) вытекает, что для некоторого $b\in B$ будет $\varphi(a) = \varphi(b)$, поэтому $\varphi(a - b) = 0$ и $a - b\in Ker\varphi$. Отсюда следует, что $a\in Ker\varphi + B$. Ввиду произвольности a получаем равенство (6.1.3). Остается применить косущественность гомоморфизма φ и получить равенство $B = A$. Мы заключаем, что гомоморфизм $\psi\circ\varphi$ косущественен. ◊

Введем обозначение. Если A есть m-алгебра, то $Sub^oA = \{B\in SubA \mid B \overset{\circ}{\subsetneq} A\}$. Из утверждений (а) и (б) предыдущей леммы вытекает

С л е д с т в и е 2. Множество Sub^oA является идеалом решетки $SubA$. ◊

С л е д с т в и е 3. Пусть $C \le B \le A$ и $C \trianglelefteq B$. Тогда

$$B \overset{\circ}{\subsetneq} A \Leftrightarrow ((B/C) \overset{\circ}{\subsetneq} (A/C))\&(C \overset{\circ}{\subsetneq} A). \qquad (6.1.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \overset{\circ}{\subsetneq} A$, $C \trianglelefteq B$. Согласно лемме 1 тогда $C \overset{\circ}{\subsetneq} A$. Докажем, что

$$B/C \overset{\circ}{\subsetneq} A/C. \qquad (6.1.5)$$

Для этого предположим, что $D\in SubA$, $C \le D \le A$ и $(B/C) \vee (D/C) = A/C$. Тогда по второй теореме о гомоморфизмах $B \vee D = A$ и ввиду $B \overset{\circ}{\subsetneq} A$ получим $D = A$ и $D/C = A/C$, что завершает доказательство (6.1.5).

Обратно, предположим, что

$$C \overset{\circ}{\subsetneq} A \qquad (6.1.6)$$

и выполняется (6.1.9). Пусть $D\in SubA$ и

$$B \vee D = A. \qquad (6.1.7)$$

Введем в рассмотрение подмодуль $E = C + D$. Из (6.1.11) вытекает равенство $B \vee E = A$, откуда по второй теореме о гомоморфизмах $(B/C) \vee (E/C) = A/C$. Благодаря (6.1.2) тогда $E/C = (C + D)/C = A/C$ и, значит, $C + D = A$. Применяя (6.1.6), получаем требуемое равенство $D = A$. Итак, $B \overset{\lhd}{\subsetneq} A$. Соотношение (6.1.4) доказано. ◊

В следующем утверждении представлены некоторые свойства отношения “$\overset{\lhd}{\subsetneq}$”, близкие свойствам отношения косущественности, отмеченные в лемме 1.

Лемма 2. а) пусть $D, C, B \in \Im(A)$, $D \subseteq C \subseteq B$ и $C \overset{\lhd}{\subsetneq} B$. Тогда $D \overset{\lhd}{\subsetneq} A$;

б) для любого конечного семейства $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, идеалов m-алгебры A, если $A_i \overset{\lhd}{\subsetneq} A$ для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \overset{\lhd}{\subsetneq} A$;

в) если $\varphi \in Hom(A, D)$, $B \overset{\lhd}{\subsetneq} A$ и $\varphi(B) \in \Im(D)$, то $\varphi(B) \overset{\lhd}{\subsetneq} D$;

г) если $\varphi \in Hom(A, D)$, $\psi \in Hom(D, E)$, причем φ и ψ – i-малые сюръективные гомоморфизмы, то $\psi \circ \varphi \in Hom(A, E)$ – i-малый сюръективный гомоморфизм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $D, C, B \in \Im(A)$, $D \subseteq C \subseteq B$ и $C \overset{\lhd}{\subsetneq} B$. Докажем, что $D \overset{\lhd}{\subsetneq} A$. Для этого предположим, что $E \in \Im(A)$ и

$$D + E = A. \tag{6.1.8}$$

Тогда $A = D + E \subseteq C + E$, так что $A = C + E$. Используя теперь модулярность решетки $\Im(A)$ (следствие 1.1.1), отсюда выводим $B = B \cap A = C + B \cap E$. Из этого ввиду $C \overset{\lhd}{\subsetneq} B$ получим равенство $B \cap E = B$ и включение $B \subseteq E$, а также $D \subseteq E$. Теперь из (6.1.8) выводим равенство $E = A$. Следовательно, $D \overset{\lhd}{\subsetneq} A$ и утверждение (а) доказано. Остальные утверждения этой леммы доказываются так же, как и соответствующие утверждения леммы 1. ◊

Введем обозначение. Если A есть m-алгебра, то $\Im^{\lhd}(A) = \{B \in \Im(A) \mid B \overset{\lhd}{\subsetneq} A\}$. Из утверждений а) и б) предыдущей леммы вытекает

С л е д с т в и е 4. Множество $\Im^{\lhd}(A)$ является идеалом решетки $\Im(A)$. ◊

Аналогично доказательству следствия 3 доказывается

С л е д с т в и е 5. Пусть $C, B \in \Im(A)$ и $C \subseteq B$. Тогда

$$B \overset{\lhd}{\subsetneq} A \Leftrightarrow ((B/C) \overset{\lhd}{\subsetneq} (A/C)) \& (C \overset{\lhd}{\subsetneq} A). \ \Diamond$$

Лемма 3. Пусть A есть m-алгебра и $a \in A$. Тогда

$$< a > \overset{\circ}{\subsetneq} A \Leftrightarrow a \in \Phi(A). \qquad (6.1.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Rightarrow$. Пусть $< a > \overset{\circ}{\subsetneq} A$ и предположим, *ex adverso*, что $a \notin \Phi(A)$. Тогда согласно (4.1.23) существует максимальная под-m-алгебра $B \in \mathcal{M}aA$ такой, что $a \notin B$. Из этого вытекает, что $B \neq < a > \vee B$ и ввиду максимальности подмодуля B имеем равенство $< a > \vee B = A$. Теперь благодаря малости под-m-алгебры $< a >$ получаем равенство $B = A$, что приводит к противоречию. Следовательно, $a \in \Phi(A)$.

$\Leftarrow$. Обратно, пусть $a \in \Phi(A)$ и предположим, что под-m-алгебра $< a >$ не является косущественной. Тогда множество

$$\Gamma = \{ C \in SubA \mid C \neq A, < a > \vee C = A \} \qquad (6.1.10)$$

не пусто. Зафиксируем в этом множестве произвольное линейно упорядоченное (по включению) подмножество (цепь) $\{C_i\}_{i \in I}$ и положим $C = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$.

Ясно, что $C = \bigvee\limits_{i \in I} C_i \in SubA$ и при этом согласно (6.1.14)

$$< a > \vee C = < a > \vee \left(\bigvee_{i \in I} C_i \right) = \bigvee_{i \in I} (< a > \vee C_i) = \bigvee_{i \in I} A = A. \qquad (6.1.11)$$

Если бы $a \in C$, то $a \in \bigcup\limits_{i \in I} C_i$ и тогда для некоторого $i \in I$ будет $a \in C_i$. Тогда $< a > \subseteq C_i$ и так как $C_i \in \Gamma$, то согласно (6.1.10) $A = < a > \vee C = C$, что невозможно. Противоречие показывает, что $a \notin C$ и благодаря (6.1.11) и (6.1.10) $C \in \Gamma$. Применяя теперь лемму Цорна, заключаем, что Γ имеет максимальный элемент. Пусть это будет C. Докажем, что $C \in \mathcal{M}aA$. Для этого предположим, что $B \in SubA$ и $C \subseteq B$. Отсюда, так как $C \in \Gamma$ согласно (6.1.14), получим $A = < a > \vee C \subseteq < a > \vee B$ и

$$A = < a > \vee B. \qquad (6.1.12)$$

Если теперь $a \notin B$, то $B \in \Gamma$ и тогда $C = B$ ввиду максимальности C. В другом случае $< a > \subseteq B$ и тогда благодаря (6.1.12) имеем $A =$
$= < a > \vee B \subseteq B \vee B \subseteq B$, так что $A = B$. Следовательно, $C \in \mathcal{M}a\, A$. Так как $a \notin C$, то согласно (4.1.23) $a \notin \Phi(A)$ в противоречие с предположением. Значит, $< a > \overset{\circ}{\subsetneq} A$. (6.1.13) доказано. Лемма доказана. $\Diamond$

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 4. Пусть A есть m-алгебра и $a \in A$. Тогда

$$\ll a \gg \overset{\circ}{\subsetneq} A \Leftrightarrow a \in \bigcap \{ B \mid B \in \mathcal{M}a\,\mathfrak{I}(A) \}. \Diamond \qquad (6.1.13)$$

Обратимся теперь к существенным под-m-алгебрам.

Лемма 5. а) пусть $D, C, B \in SubA, D \subseteq C \subseteq B$ и $D \overset{\times}{\subsetneq} A$. Тогда $C \overset{\times}{\subsetneq} B$;

б) для любого конечного семейства $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, под-m-алгебр m-алгебры A если для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $A_i \overset{\times}{\subsetneq} A$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \overset{\times}{\subsetneq} A$;

в) если $\varphi \in Hom(C, A), B \overset{\times}{\subsetneq} A$, то $\overset{-1}{\varphi}(B) \overset{\times}{\subsetneq} C$;

г) если $\varphi \in Hom(A, B)$, $\psi \in Hom(B, C)$, причем φ и ψ – существенные инъективные гомоморфизмы, то $\psi \circ \varphi \in Hom(A, C)$ – существенный инъективный гомоморфизм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $D \leq C \leq B \leq A$ и $D \overset{\times}{\subsetneq} A$. Предположим, что $E \leq B$ и $C \cap E = 0$. Тогда $E \leq A$ и $D \cap E \subseteq C \cap E = 0$. Так что $D \cap E = 0$ и ввиду существенности D получаем требуемое равенство $E = = 0$. Значит, $C \overset{\times}{\subsetneq} B$;

б) пусть $A_i \overset{\times}{\subsetneq} A$ для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Утверждение будем доказывать по индукции по n. При $n = 1$ доказывать нечего. Пусть теперь $n > 1$ и предположим, что утверждение верно для семейств существенных под-m-алгебр числом меньше n. Пусть $B \leq A$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \cap B = 0$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i \cap (A_n \cap B) = 0$ и так как по предположению индукции $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i \overset{\times}{\subsetneq} A$, то $A_n \cap B = 0$, отсюда ввиду существенности под-m-алгебры A_n должно выполняться равенство $B = 0$. Мы пришли к тому, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \overset{\times}{\subsetneq} A$, как и требовалось;

в) пусть $B \overset{\times}{\subsetneq} A$ и $\varphi \in Hom(C, A)$. Предположим, что $D \leq C$ и

$$\overset{-1}{\varphi}(B) \cap D = 0. \tag{6.1.14}$$

Если $b \in B \cap \varphi(D)$, то для некоторого $d \in D$ должно быть $b = \varphi(d)$. Но тогда $d \in \overset{-1}{\varphi}(B) \cap D = 0$ согласно (6.1.14), поэтому $b = 0$. Значит, $B \cap \varphi(D) = 0$ и так как $B \overset{\times}{\subsetneq} A$, отсюда следует, что $\varphi(D) = 0$. Мы тогда получаем включения $D \subseteq \overset{-1}{\varphi}(0) \subseteq \overset{-1}{\varphi}(B)$, что благодаря (6.1.14) приводит к тому, что $D = 0$. Тем самым показано, что $\overset{-1}{\varphi}(B) \overset{\times}{\subsetneq} C$;

г) пусть $\varphi \in Hom(A, B)$, $\psi \in Hom(B, C)$, где φ и ψ – существенные инъективные гомоморфизмы. Тогда гомоморфизм $\psi \circ \varphi$ также инъективен. Докажем, что он существенен. Для этого предположим, что $D \in SubC$ и $\psi(\varphi(A)) \cap D = 0$. Тогда из включения $\psi(\overset{-1}{\psi}(D)) \subseteq D$ следует, что $\psi(\varphi(A)) \cap \psi(\overset{-1}{\psi}(D)) = 0$. Если теперь $b \in \varphi(A) \cap \overset{-1}{\psi}(D)$, то $\psi(b) \in \psi(\varphi(A)) \cap \psi(\overset{-1}{\psi}(D)) = 0$, поэтому $\psi(b) = 0$. Теперь инъективность ψ влечет равенство $b = 0$. Значит, $\varphi(A) \cap \overset{-1}{\psi}(D) = 0$. Так как гомоморфизм φ существенен, отсюда следует, что $\overset{-1}{\psi}(D) = 0$. Если $c \in \psi(B) \cap D$, то для некоторого $b \in B$ должно быть $c = \psi(b) \in D$. Но тогда $b \in \overset{-1}{\psi}(D) = 0$, так что $b = 0$ и $c = \psi(0) = 0$. Тем самым установлено, что $\psi(B) \cap D = 0$ и ввиду существенности ψ отсюда следует, что $D = 0$. Итак, $\psi(\varphi(A)) \subsetneqq C$ и гомоморфизм $\psi \circ \varphi$ существенен, г) доказано. Лемма доказана. $\Diamond$

Введем обозначение : $Sub^{\times}A = \{B \in SubA \mid B \subsetneqq A\}$. Из утверждений а) и б) предыдущей леммы вытекает

С л е д с т в и е 6. Множество $Sub^{\times}A$ является фильтром решетки $SubA$. $\Diamond$

Лемма 6. Пусть A есть К-модуль и $B \leq A$. Тогда

$$B \subsetneqq A \Leftrightarrow \forall a \in A(a \neq 0 \Rightarrow \exists f \in \mathbb{Z}[t]t(f(a) \neq 0 \,\&\, (f(a) \in B \vee$$
$$\vee \exists x \in \mathrm{K}(x \square f(a) \neq 0 \,\&\, x \square f(a) \in B))). \qquad (6.1.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Rightarrow$. Пусть $B \subsetneqq A$. Согласно следствию 1 тогда для любого ненулевого подмодуля $C \in SuA$ $B \cap C \neq 0$. Пусть $a \in A$ и $a \neq 0$. Тогда $< a > \neq 0$ и поэтому $B \cap < a > \neq 0$. Далее, подкольцо $< a >_r$ кольца $(A, +, \cdot)$, порожденное элементом a, содержится в $< a >$ и оно состоит из значений многочленов $f \in \mathbb{Z}[t]t$ с целыми коэффициентами без свободного члена при $t = a$. Если $B \cap < a >_r \neq 0$, то для некоторого $f \in \mathbb{Z}[t]t$ будет $f(a) \neq 0$ и $f(a) \in B$. Предположим теперь, что $B \cap < a >_r = 0$. Рассмотрим тогда подмодуль $\mathrm{K} \square a \in SuA$. Если $\mathrm{K} \square a \neq 0$, то должно быть $B \cap (\mathrm{K} \square a) \neq 0$, поэтому для некоторого $x \in \mathrm{K}$ будет $x \square a \neq 0$, $x \square a \in B$ и здесь в качестве f можно взять одночлен t. Рассмотрим теперь случай $\mathrm{K} \square a \neq 0$. Если для любого многочлена $f \in \mathbb{Z}[t]t$ такого, что $f(a) \neq 0$ будет $x \square f(a) = 0$ для любого $x \in \mathrm{K}$, то $< a >_r = < a >$, что противоречит предположению $B \cap < a >_r = 0$ и $B \cap < a > \neq 0$. Таким образом, существует многочлен $f \in \mathbb{Z}\,[t]t$ такой, что $\text{К}\square f(a) \neq 0$. Так как $\text{К}\square f(a) \leq A$, то отсюда следует, что $B \cap (\text{К}\square\ f(a)) \neq 0$ и для некоторого $x \in \text{К}$ должно быть $x\square f(a) \neq 0$ и $x\square f(a) \in B$.

$\Leftarrow$.Пусть правая часть соотношения (6.1.15) выполняется. Докажем, что $B \overset{\times}{\subsetneq} A$. Для этого предположим, что $C \leq A$ и $C \neq 0$. Тогда существует ненулевой элемент $a \in C$. Из того, что выполняется правая часть соотношения (6.1.15), видно, что $B \cap < a > \neq 0$, поэтому $B \cap C \neq 0$, что и требовалось. ◊

Лемма 7. а) пусть $D, C, B \in \mathfrak{I}(A), D \subseteq C \subseteq B$ и $D \overset{\bowtie}{\subsetneq} A$. Тогда $C \overset{\bowtie}{\subsetneq} B$;

б) для любого конечного семейства $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $i \in \mathbb{N}$, идеалов m-алгебры A, если для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $A_i \overset{\bowtie}{\subsetneq} A$, то $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \overset{\bowtie}{\subsetneq} A$;

в) если $\varphi \in Hom(C, A), B \overset{\bowtie}{\subsetneq} A$, то $\overset{-1}{\varphi}(B) \overset{\bowtie}{\subsetneq} C$;

г) если $\varphi \in Hom(A, B)$, $\psi \in Hom(B, C)$, причем φ и ψ – i-большие инъективные гомоморфизмы, то $\psi \circ \varphi \in Hom(A, C)$ – i-большой инъективный гомоморфизм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится так же, как и доказательство леммы 5 с использованием того факта, что прообраз идеала при гомоморфизме есть идеал. ◊

Введем обозначение : $\mathfrak{I}^{\bowtie}(A) = \{B \in \mathfrak{I}(A) \mid B \overset{\bowtie}{\subsetneq} A\}$. Из утверждений а) и б) вытекает

С л е д с т в и е 7. _Множество $\mathfrak{I}^{\bowtie}(A)$ является фильтром решетки $\mathfrak{I}(A)$. ◊

У п р а ж н е н и е 1. Доказать следующее утверждение.

Пусть $B \leq A$. Тогда следующие утверждения равносильны.

а) $B \overset{\circ}{\subsetneq} A$;

б) для любой системы образующих $\{a_i \mid i \in I\}$ m-алгебры A и любой системы (мультимножества [32]) элементов $\{b_i \mid i \in I\}$ под-m-алгебры B система $\{a_i - b_i \mid i \in I\}$ является системой образующих m-алгебры A;

в) элиминация из системы $\{a_i \mid i \in I\}$ образующих m-алгебры A элементов из B не нарушает свойства быть системой образующих m-алгебры A. ◊

. У п р а ж н е н и е 2. Показать, что если $\mathcal{M}a\, A = \varnothing$, то любая конечнопорожденная под-m-алгебра m-алгебры A косущественна, а если

$\mathcal{M}a\mathfrak{I}(A) = \varnothing$, то любой конечнопорожденный идеал m-алгебры A идеально малый. $\Diamond$

У п р а ж н е н и е 3. Доказать следующие утверждения.

а) пусть A есть m-алгебры, являющаяся прямой суммой семейства своих идеалов $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ – такое семейство его под-m-алгебр, что $B_i \overset{\square}{\looparrowleft} A_i$ для всякого $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Положим $B =$

$= \bigvee\limits_{i=1}^{n} B_i$. Тогда $B = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\oplus} B_i$ и $B \overset{\square}{\looparrowleft} A$;

б) пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\oplus} A_i$ – прямая сумма семейства идеалов $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ m-алгебры A ($n \in \mathbb{N}$) и пусть $B \in SubA$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1) $B \cap A_i \overset{\times}{\looparrowleft} A_i$ для любого $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

2) $\bigvee\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \overset{\times}{\looparrowleft} A$;

3) $B \overset{\times}{\looparrowleft} A$. $\Diamond$

6.2. Дополнения под-m-алгебр

Понятие дополнения играет существенную роль в вопросах разложения m-алгебр из $\mathcal{Z}$ в прямую сумму идеалов. Пусть A есть m-алгебра и $B \in SubA$. Под-m-алгебра $C \leq A$ называется *аддитивным дополнением к* B (сокращенно, C есть а. д. к B), если $A = B + C$ и C является минимальным среди под-m-алгебр $D \leq A$ со свойством $A = B \vee D$. В этом случае пишем $A = B \overset{\text{а.д.}}{+} C$. Идеал $C \trianglelefteq A$ называется идеальным *аддитивным дополнением к* B (сокращенно, C есть i. а. д. к B), если $A = B + C$, и C является минимальным среди идеалов $D \trianglelefteq A$ со свойством $A = B + D$. В этом случае пишем $A = B \overset{i\text{.а.д.}}{+} C$. Под-$m$-алгебра $C \leq A$ называется *дополнением по пересечению к* B, если $B \cap C = 0$ (сокращенно, C есть д. п. к B,) и C является максимальным среди под-m-алгебр $D \leq A$ со свойством $B \cap D = 0$. Идеал $C \trianglelefteq A$ называется *идеальным дополнением по пересечению к* B (сокращенно, C есть i. д. п. к B), если $B \cap C = 0$ и C является максимальным среди идеалов $D \trianglelefteq A$ со свойством $B \cap D = 0$. Далее предполагаем, что A есть некоторый произвольная m-алгебра из $\mathcal{Z}$.

С л е д с т в и е 1. Пусть $B, C \in \Im(A)$ и

$$A = B \oplus C. \tag{6.2.1}$$

Тогда C является а. д. к B, i. а. д. к B, д. п. к B, i. а. д. к B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется (6.2.1), то по определению прямой суммы

$$A = B + C \tag{6.2.2}$$

и

$$B \cap C = 0 \tag{6.2.3}$$

Сначала покажем, что C есть а.д. к B. Для этого предположим, что $D \leq A$, $A = B \vee D$ и $D \subseteq C$. Ввиду равенства (6.2.1) и предложения 2.2.1 можно считать, что $A = B_1 \times C_1$, где B_1 и C_1 – m-алгебры, изоморфные соответственно B и C, при этом $B = B_1 \times 0$ и $C = 0 \times C_1$. Так как $D \subseteq C$, то для некоторой под-m-алгебры $D_1 \leq C_1$, изоморфной D, должно быть $D =$
$= 0 \times D_1$. Ввиду (6.2.1) действия в A покомпонентны, откуда следует, что множество $B + D = B_1 \times 0 + 0 \times D_1$ является под-m-алгеброй в A, содержащей B и D, поэтому и благодаря (6.2.2) $A = B \vee D = B + D = B_1 \times D_1 = B + C = B_1 \times C_1$, из чего вытекает, что $D_1 = C_1$ и $D = C$. Значит, C является минимальной под-m-алгеброй со свойством $B \vee C = A$. Тем более C является минимальным идеалом со свойством $B \vee C = B + C = A$. Следовательно, C есть а. д. к B и i. а. д. к B. Ввиду (6.2.3) C есть д. п. к B. Тем более C является максимальным идеалом с таким свойством, так что C является i. д. п. к B. ◊

Лемма 1. Пусть $B, D \in SubA$ и

$$B \cap D = 0 \tag{6.2.4}$$

Тогда существует под-m-алгебра $C \in SubA$ такая, что $D \subseteq C$ и C есть д. п. к B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{ C \in SubA \mid B \cap C = 0 \}. \tag{6.2.5}$$

Ввиду (6.2.4) $D \in \Gamma$. Пусть $\{C_i\}_{i \in I}$ – некоторая цепь в Γ, содержащая D в качестве элемента. Положим $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Очевидно, $C = \bigvee_{i \in I} C_i \in SubA$ и так как $C_i \in \Gamma$ для любого $i \in I$, то согласно (6.2.5) $B \cap C = B \cap (\bigcup_{i \in I} C_i) =$
$= \bigcup_{i \in I} (B \cap C_i) = \bigcup_{i \in I} 0 = 0$, поэтому $C \in \Gamma$. Теперь по лемме Цорна множество

Γ имеет максимальный элемент, скажем, C, причем его можно подобрать так, что $D \subseteq C$. Понятно, что C есть д. п. к B. ◊

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 2. Пусть $B \in SubA$, $D \in \mathfrak{I}(A)$ и $B \cap D = 0$.
Тогда существует идеал $C \in \mathfrak{I}(A)$ такой, что $D \subseteq C$ и C есть *i.* д. п. к B.◊

Лемма 3. Пусть $B, C, D \in SubA$ и

$$A = B + C. \tag{6.2.6}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) если C есть а. д. к B, то

$$B \cap C \overset{\circ}{\subsetneq} C; \tag{6.2.7}$$

б) если C есть а. д. к B и D есть а. д. к C, $D \trianglelefteq A$, а также $D \subseteq B$, то

$$B/D \overset{\circ}{\subsetneq} A/D. \tag{6.2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть выполняется (6.2.6) и C есть а. д. к B. Предположим, что $D \leq C$ и

$$(B \cap C) \vee D = C. \tag{6.2.9}$$

Тогда, используя (6.2.6), выводим

$$A = B + C = B \vee C = B \vee ((B \cap C) \vee D) = (B \vee (B \cap C)) \vee D = B \vee D.$$

Из этого ввиду того, что $D \subseteq C$ и C есть а. д. к B, получаем равенство $C = D$;

в) пусть $B, C, D \in SubA$ и

$$A = B \overset{\text{а.д.}}{+} C. \tag{6.2.10}$$

$$A = C \overset{\text{а.д.}}{+} D. \tag{6.2.11}$$

Также предположим, что $D \trianglelefteq A$ и $D \subseteq B$. Требуется доказать выполнение (6.2.8). Для этого предположим, что $D \leq E \leq A$ и $(B/D) \vee (E/D) = A/D$. По второй теореме о гомоморфизмах тогда имеем равенство

$$B \vee E = A. \tag{6.2.12}$$

Покажем, что

$$E = D + H \tag{6.2.13}$$

для некоторой под-m-алгебры $H \leq E$. Для этого положим

$$H = \{ c \in C \mid c + D \subseteq E \}. \tag{6.2.14}$$

Сначала требуется установить, что H есть под-m-алгебра m-алгебры E. Из (6.2.14) сразу следует, что $H \subseteq E$ поскольку $D \subseteq E$.Далее предположим, что $c_1, c_2 \in H$. Тогда согласно (6.2.14) $c_1 + c_2$ и c_1c_2 – элементы из C и $(c_1 + D) + (c_2 + + D) \subseteq E + E \subseteq E$, $(c_1 + D)(c_2 + D) \subseteq E\, E \subseteq E$. Теперь ввиду того, что $D \subseteq E$ и D – идеал кольца $(A, +, \cdot)$, имеем

$$(c_1 + c_2) + D = (c_1 + D) + (c_2 + D) + D \subseteq E + E \subseteq E,$$

$$(c_1c_2) + D \subseteq (c_1 + D)(c_2 + D) + D \subseteq E + E \subseteq E,$$

поэтому $c_1 + c_2, c_1c_2 \in H$ и H есть подкольцо кольца $(A, +, \cdot)$.

Далее сначала предположим, что $\mathcal{Z}$ = К-*Mod.* Теперь если $x \in$К и $h \in H$, то согласно (6.2.14) $h \in C$ и для произвольного фиксированного $d \in D$ элемент $e = h + d$ принадлежит E. Так как $C, E \in SuA, D \in StA$, то из предудущего следуют соотношения $x\square h \in C$, $x\square e \in E$, $x\square(h + d) - x\square h \in D$. Отсюда и используя включение $D \subseteq E$, выводим :

$$x\square h + D = x\square (h + d) - (x\square(h + d) - x\square h) + D = x\square\, e - (x\square(h + d) - x\square h) +$$
$$+ D \subseteq E + D + D \subseteq E + D \subseteq E + E \subseteq E..$$

Значит, согласно (6.2.14) $x\square h \in H$ и $H \in SuA$. Из (6.2.14) также следует включение $H + D \subseteq E$. Для доказательства обратного включения предположим, что e – произвольный элемент из E. Тогда из (6.2.11) следует существование таких элементов $c \in C$ и $d \in D$, что $e = c + d$. Отсюда, снова воспользовавшись включением $D \subseteq E$, получим $c + D = e - d + D \subseteq$ $\subseteq E - D + D \subseteq E + D \subseteq E + E \subseteq E$.. В результате по формуле (6.2.14) имеем $c \in H$ и $e \in H + D$. Таким образом, $E \subseteq H + D$ и равенство (6.2.13) доказано.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$. Снова пусть $c_1, c_2 \in H$. Согласно (6.2.14) $c_2 \in C$ и для произвольного фиксированного $d \in D$ элемент $e = c_2 + d$ принадлежит E. Так как $H \subseteq C \cap E$ и $D \in \mathfrak{I}(A)$, то из предудущего следуют соотношения $c_1 \circ c_2 \in C$, $c_1 \circ e \in E$, $c_1 \circ (c_2 + d) - c_1 \circ c_2 \in D$. Отсюда и используя включение $D \subseteq E$, выводим :

$$c_1 \circ c_2 + D = c_1 \circ (c_2 + d) - (c_1 \circ (c_2 + d) - c_1 \circ c_2) + D = c_1 \circ e - (c_1 \circ (c_2 + d) - c_1 \circ c_2) \subseteq$$
$$\subseteq E + D + D \subseteq E + D \subseteq E + E \subseteq E..$$

Следовательно, $c_1 \circ c_2 \in H$ и $H \leq A$. Далее доказательство равенства (6.2.13) проводится так же, как и в случае $\mathcal{Z}$ = К-*Mod.*

Теперь, используя (6.2.12) и включение $D \subseteq B$, имеем $A = B \vee E =$ $= B \vee (D + H) \subseteq B \vee (B + H) = B + H$. Отсюда следует, что $A = B + H$ и так как $H \subseteq C$, то из (6.2.10) вытекает, что $H = C$. Теперь благодаря (6.2.13) и (6.2.11) получаем равенства $E = D + H = D + C = A$. Следовательно, $E/D = A/D$, что и требовалось для установления (6.2.8). ◊

Лемма 4. Пусть $B \in SubA$, $C \in \Im(A)$ и

$$A = B + C. \tag{6.2.15}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) то, что C есть i. а. д. к B, равносильно следующему соотношению:

$$\forall D \in \Im(A)(D \subseteq C \quad ((B \quad C) \quad D \quad C \quad D \quad C)); \tag{6.2.16}$$

б) если $D \trianglelefteq A$ и

$$A = B \overset{i.\text{а.д.}}{+} C, \tag{6.2.17}$$

$$A = C \overset{i.\text{а.д.}}{+} D, \tag{6.2.18}$$

то

$$A = D \overset{i.\text{а.д.}}{+} C, \tag{6.2.19}$$

а также

$$B/D \subsetneq A/D. \tag{6.2.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $B \leq A$, $C, D \in \Im(A)$, $D \subseteq C$ и выполняется (6.2.17). Предположим также, что выполняется равенство

$$(B \cap C) + D = C. \tag{6.2.21}$$

Ввиду (6.2.17), тогда $A = B + C = B + (B \cap C) + D = B + D$. Отсюда так как C содержит идеал C и является i. а. д. к B, то $C = D$. Обратно, пусть для идеала C и подмодуля B K-модуля A выполняется соотношение (6.2.16) и равенство (6.2.15). Предположим, что $D \in \Im(A)$, $D \subseteq C$, и выполняется равенство $A = B + D$. Используя модулярность решетки подгрупп группы $(A, +)$, тогда имеем $C = A \cap C = (B + D) \cap C = (B \cap C) + D$. Из этого согласно соотношению (6.2.16) приходим к требуемому равенству $C = D$. Так что C является i. а. д. к B. а) доказано;

б) пусть $B \leq A$, C, $D \in \Im(A)$, и выполняются соотношения (6.2.17) и (6.2.18). Докажем, что C есть i. а. д. к D. Из (6.2.18) имеем равенство $A =$ $= D + C$. Предположим, что $E \trianglelefteq A$, $E \subseteq C$ и

$$A = D + E. \tag{6.2.22}$$

Используя модулярность решетки подгрупп группы $(A, +)$, тогда имеем $C = A \cap C = (D + E) \cap C = (D \cap C) + E$. Отсюда, используя (6.2.17), получим $A = B + C = B + (D \cap C) + E = (D \cap C) + (B + E)$. При этом $(D \cap C), (B + E) \in \Im(A)$ и ввиду модулярности решетки $\Im(A)$ получаем

$$D = A \cap D = ((D \cap C) + (B + E)) \cap D = (D \cap C) + B + E) \cap D.$$

Учитывая (6.2.18) и применяя соотношение (6.2.16) при $B = C, C = D$ и $D = (B + E) \cap D$, приходим к тому, что $(B + E) \cap D = D$, откуда следует, что $D \subseteq B + E$. Теперь, используя (6.2.22), получаем : $A = D + E \subseteq B + E + E \subseteq B + E$. Следовательно, $A = B + E$ и так как $E \subseteq C$ согласно (6.2.17) получаем равенство $E = C$. Тем самым соотношение (6.2.19) доказано.

Для доказательства (6.2.20) предположим, что $B \leq A$, $C, D \in \Im(A)$ и выполняются соотношения (6.2.17) и (6.2.18) и, кроме того, $D \subseteq B$. Требуется доказать соотношение (6.2.20). Предположим, что $E \in \Im(A), D \subseteq E$ и $(B/D) + (E/D) = A/D$. Отсюда следует, что

$$B + E = A, \tag{6.2.23}$$

Поскольку $D \subseteq E$ и $A = C + D$ согласно (6.2.18), то ввиду модулярности решетки $\Im(A)$ будет $E = A = E \cap (C + D) = (E \cap C) + D$. Теперь, используя это и включение $D \subseteq B$, получим

$$A = B + E = B + (E \cap C) + D = (E \cap C) + (B + D) = (E \cap C) + B.$$

Отсюда, так как $E \cap C \trianglelefteq A, E \cap C \subseteq C$ и (6.2.17), получаем $E \cap C = C$ и $C \subseteq E$. Теперь, привлекая (6.2.18) и включение $D \subseteq E$, получаем $A = C + D \subseteq E + E \subseteq E$ и $A = E$. Тем самым доказано, что $E/D = A/D$ и $B/D \subsetneq A/D$. ◊

Лемма 5. Пусть $B \in SubA$, $C \in \Im(A)$ и

$$B \cap C = 0. \tag{6.2.24}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) C есть i. д. п. к B тогда и только тогда, когда

$$(B + C)/C \subsetneq A/C; \tag{6.2.25}$$

б) если $B \trianglelefteq A$ и C есть i. д. п. к B, а также D есть i. д. п. к C, то C есть i. д. п. к D;

в) если $B \subseteq D$, C есть i. д. п. к B, а также D есть i. д. п. к C, то для любого идеала $E \in \Im(A)$ если $E \subseteq D$ и $B \cap E = 0$, то $E = 0$;

г) если $B \trianglelefteq A$ и C есть i. д. п. к B, то

$$B + C \subsetneq A. \tag{6.2.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть C есть i. д. п. к B. Тогда $B \in SubA$, $C \in \mathfrak{I}(A)$ и выполняется (6.2.24). Предположим, что для некоторого идеала D m-алгебры A, содержащего C, выполняется равенство

$$((B + C)/C) \cap (D/C) = 0. \tag{6.2.27}$$

Отсюда по второй теореме о гомоморфизмах вытекает равенство

$$(B + C) \cap D = C\,. \tag{6.2.28}$$

Используя модулярность решетки подгрупп группы $(A, +)$ тогда имеем $C = (B + C) \cap D = (B \cap D) + C$, поэтому $B \cap D \subseteq C$. Отсюда благодаря равенству (6.2.24) выводим $B \cap D = B \cap D \cap C = B \cap C \cap D = 0 \cap D = 0$. Теперь по определению i. д. п. $D = C$. Тем самым доказано (6.2.25).

Обратно, предположим, что $B \in SubA$, $C \in \mathfrak{I}(A)$ и выполняется (6.2.24) вместе с (6.2.25). Пусть $D \in \mathfrak{I}(A)$, $C \subseteq D$ и $B \cap D = 0$. Тогда благодаря модулярности решетки подгрупп группы $(A, +)$ имеем $C = (B \cap D) + C = (B + C) \cap D$, откуда следует равенство $((B + C)/C) \cap (D/C) = 0$, а это ввиду предположения (6.2.25) приводит к равенству $D/C = 0$. Таким образом, $D = C$ и C оказывается i. д. п. к B. (а) доказано.

Для доказательства (б) предположим, что $B \trianglelefteq A$, C есть i. д. п. к B и D есть i. д. п. к C. Из последнего вытекает равенство

$$C \cap D = 0. \tag{6.2.29}$$

Далее, пусть $E \in \mathfrak{I}(A)$, $C \subseteq E$ и

$$D \cap E = 0. \tag{6.2.30}$$

Так как D есть i. д. п. к C, то согласно утверждению а)

$$(C + D)/D \circlearrowleft A/D. \tag{6.2.31}$$

Отсюда благодаря свойству в) из леммы 6.1.7 при $\varphi = \nu_D = natD$: $A \to A/D$ имеем

$$C + D \circlearrowleft A\,. \tag{6.2.32}$$

Рассмотрим элемент $e \in (C + D) \cap B \cap E$. Должны существовать элементы $c \in C$ и $d \in D$ такие, что $e = c + d$. Ввиду того, что $C \subseteq E$, имеем $d = e - c \in E - C \subseteq E - E \subseteq E$, откуда согласно (6.2. 30) получим $d \in D \cap E = 0$ и $d = 0$. Значит, $e = c \in B \cap C = 0$ так как C есть i. д. п. к B. Таким образом, доказано равенство

$$(C + D) \cap B \cap E = 0. \tag{6.2.33}$$

Так как $B \cap E \trianglelefteq A$, то из (6.2.33) благодаря соотношению (6.2.32) вытекает равенство $B \subseteq E = 0$, а это ввиду включения $C \subseteq E$ и того, что C есть

i. д. п. к B, приводит к равенству $E = C$. Следовательно, C есть i.д.п. к D. б) доказано.

в) предположим, что $B \subseteq D$, C есть i. д. п. к B, а также D есть i. д. п. к C. Отсюда, в частности, следуют равенства (6.2.24) и (6.2.29). Предположим также, что $E \in \Im(A)$,

$$E \subseteq D \tag{6.2.34}$$

и

$$B \cap E = 0. \tag{6.2.35}$$

Требуется доказать, что $E = 0$. Для этого установим равенство

$$B \cap (C + E) = 0. \tag{6.2.36}$$

В самом деле, пусть $b \in B \cap (C + E)$. Тогда для некоторых $c \in C$ и $e \in E$ выполняется равенство $b = c + e$, отсюда, используя (6.2.34) и включение $B \subseteq D$, получаем $c = b - e \in B - E \subseteq D - D \subseteq D$. Следовательно, благодаря (6.2.29), имеем $c \in C \cap D = 0$ и $c = 0$. Отсюда согласно (6.2.35) получаем $b = 0 + e \in B \cap E = 0$ и $b = 0$. Значит, (6.2.35) выполняется. Теперь, ввиду того, что идеал C содержится в $C + E$ и является i. д. п. к B, приходим к равенству $C + E = C$ и к включению $E \subseteq C$. Из этого, а также из (6.2.34) и (6.2.29) выводим : $E \subseteq C \cap D = 0$ и $E = 0$, что и требовалось для завершения доказательства в).

г) пусть $B \trianglelefteq A$ и C есть i. д. п. к B. Тогда выполняется (6.2.24) и согласно следствию 2.2.2 $B + C = B \oplus C$. Предположим, что $D \in \Im(A)$ и $(B + C) \cap D = 0$. Тогда $(B + C) + D = (B \oplus C) \oplus D = B \oplus (C \oplus D)$. Следовательно, $B \cap (C + D) = 0$, отсюда следует, что $C = C + D = C \oplus D$ и $D = 0$ ввиду того, что C содержится в идеале $C + D$ и является i. д. п. к B. Следовательно, $B + C \varsubsetneq A$. г) доказано. Лемма доказана.

Упражнение 1. Провести подробное доказательство леммы 2.◊

Упражнение 2. Доказать следующие утверждения в предположении, что A есть алгебра из $\mathfrak{Z}$.

а) пусть $B, C, D \in \Im(A)$. Тогда если C есть а. д. к B и D есть а. д. к C, а также $D \subseteq B$, то $B/D \varsubsetneq A/D$.

б) пусть $B \in SubA$, $C \in \Im(A)$, тогда C есть i. д. п. к B тогда и только тогда, когда $B \cap C = 0$ и $(B + C)/C) \varsubsetneq (A/C)$.

в) пусть $B \in SubA$, $C, D \in \Im(A)$, тогда если $B \trianglelefteq A$ и C есть д. п. к B, а также D есть д. п. к C, то C есть д. п. к D.◊

ГЛАВА II

РАЗЛОЖЕНИЯ В ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ИЛИ ПРОСТЫХ *m*-АЛГЕБР

§ 1. СТРОГО ПРИВОДИМЫЕ И ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ *m*-АЛГЕБРЫ

1.1. Чистые и обыкновенные элементы

Как уже было сказано, m-алгебра A называется минимальной, если $|\,SubA\,| = 2$ и простой, если $|\,\Im(A)\,| = 2$. В какой то мере описание минимальных m-колец дается в §12 книги [39]. В случае $\mathfrak{Z}$ = К-*Mod* минимальные m-алгебры – это неприводимые К-модули. Напомним (п. 3.5 гл. I), что К-модуль A называется чистым, если К□A = 0 и обыкновенным, если К□$A \neq 0$. Соответственно, элемент $a \in A$ называем *чистым*, если К□a = 0 и *обыкновенным*, если К□$a \neq 0$. К-модуль A называется *циклическим* [39], если A = К□a для некоторого $a \in A$ (в этом случае элемент a считается *образующим* циклического К-модуля A). Ненулевой К-модуль A называется *строго циклическим*, если он является циклическим и всякий его элемент либо чист, либо является образующим. Из леммы 9.2.1 книги [39] следует, что К-модуль A неприводим в том и только в том случае, когда он является строго циклическим и множество его чистых элементов не содержит ненулевых подколец кольца $(A, +, \cdot)$. Из теоремы 9.4.1 и следствия 9.4.1 , *ibidem*, выходит, что каждый неприводимый К-модуль либо *тривиален* (т. е. его аддитивная группа конечна и имеет простой порядок), либо изоморфен фактормодулю естественного К-модуля $_{\text{К}}\text{К}$ по допустимому идеалу. Так что структура неприводимого К-модуля в некотором смысле может считаться известной, если известна структура m-кольца К. То же самое можно сказать о прямых произведениях и прямых суммах неприводимых К-модулей. Изучение свойств К-модулей с такими разложениями – одна из целей этой главы.

Лемма 1. Пусть A – обыкновенный К-модуль. Тогда A есть расширение идеала $_{\text{К}}\ll$ К□$A \gg$, порожденного обыкновенными элементами, при помощи чистого К-модуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in$ К, $a \in A$. Тогда по определению фактормодуля x□$(a + {}_{\text{К}}\ll$ К□$A \gg) = x$□$a + {}_{\text{К}}\ll$ К□$A \gg \subseteq$ К□$A + {}_{\text{К}}\ll$ К□$A \gg \subseteq$

$\subseteq {}_{К}\ll К\square A \gg$, поэтому $К\square(A/_{К}\ll К\square A\gg) = 0$ и $A/_{К}\ll К\square A\gg$ – чистый К-модуль.◊

Следствие 1. Всякий обыкновенный простой К-модуль порожден как идеал обыкновенными элементами.◊

1.2. Гамильтоновы *m*-алгебры

Напомним (п. 3.1 гл. I), что *m*-алгебра A называется гамильтоновой, если $\Im(A) = SubA$.

Следствие 1. Всякая под-*m*-алгебра гамильтоновой *m*-алгебры гамильтонова.◊

С помощью второй теоремы о гомоморфизмах также легко получить

Следствие 2. Всякий гомоморфный образ гамильтоновой *m*-алгебры гамильтонов.◊

С использованием следствие 2.2.4 главы I имеем

Следствие 3. Прямая сумма семейства гамильтоновых *m*-алгебр есть гамильтонова *m*-алгебра.◊

Из результатов работы [56] также имеем

Следствие 4. *m*-алгебра A гамильтонова тогда и только тогда, когда любая ее под-*m*-алгебра, порожденная тремя или меньшим числом элементов, является гамильтоновой *m*-алгеброй.◊

Далее получим несколько вспомогательных утверждений, нужных в дальнейшем. Напомним (п. 3.1 гл. I), что К-модуль A называется стройным, если для любого $x\in К$ преобразование $x\square– : A \to A$ является эндоморфизмом кольца $(A, +, \cdot)$.

Лемма 1. Пусть B и C различные неприводимые подмодули гамильтонова К-модуля A. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если B и C – обыкновенные К-модули, то они изоморфны и являются стройными К-модулями;

2) если B и C изоморфны, то это – кольца с нулевым умножением.

Доказательство. 1) так как B и C различны, то ввиду их неприводимости $B\cap C = 0$, а так как это – идеалы К-модуля A, то благодаря его гамильтоновости,

$$B + C = B\oplus C \qquad (1.2.1)$$

согласно следствию 2.2.2. Теперь, так как B и C – обыкновенные неприводимые К-модули, то они циклические и существуют элементы $b\in B$ и $c\in C$ такие, что $B = К\square b$ и $C = К\square c$. Рассмотрим множество $B_1 = \{ x\square b \mid x\square c = 0 \}$. Докажем, что B_1 есть подмодуль К-модуля B. В самом деле, пусть $x, y, z\in К$ и $x\square c = y\square c = 0$, т. е $x\square b, y\square b\in B_1$, тогда

$$0 = x\square c + y\square c = (x + y)\square c, \quad 0 = (x\square c)(y\square c) = (xy)\square c,$$
$$0 = z\square 0 = z\square(x\square c) = (z \circ x)\square c.$$

Отсюда следует, что $x\square b + y\square b = (x + y)\square b \in B_1$, $(x\square b)(y\square b) = = (xy)\square b \in B_1$, $z\square(x\square b) = (z \circ x)\square b \in B_1$. Значит, $B_1 \leq B$. Ввиду неприводимости К-модуля B должно быть либо $B_1 = 0$, либо $B_1 = B$. Во втором случае $К\square c = 0$, что противоречит обыкновенности К-модуля C. Следовательно, $B_1 = 0$, что означает выполнение соотношения : $\forall x \in К(x\square c = 0 \Rightarrow x\square b = 0)$. Меняя местами в этих рассуждениях подмодули B и C, приходим к обратной импликации, в результате получаем

$$\forall x \in К(x\square c = 0 \Leftrightarrow x\square b = 0). \tag{1.2.2}$$

Теперь рассмотрим соответствие $\varphi: B \to C$, где для $x \in К$

$$\varphi(x\square b) = x\square c. \tag{1.2.3}$$

Будем доказывать, что φ – изоморфизм К-модулей. Сначала убедимся в том, что φ есть отображение. В самом деле, если $x, y \in К$ и $x\square b = x\square b$, то $(x - y)\square b = x\square b - y\square b = 0$, поэтому согласно (1.2.3) $0 = (x - y)\square c = x\square c - y\square c$ и $x\square c = y\square c$. Теперь требуется показать, что φ – гомоморфизм К-модулей. Для этого, предполагая, что $x, y \in К$ и используя (1.2.3), имеем

$$\varphi(x\square b + y\square b) = \varphi((x + y)\square b) = (x + y)\square c = x\square c + y\square c = \varphi(x\square b) + \varphi(y\square b),$$
$$\varphi((x\square b)(y\square b)) = \varphi((xy)\square b) = (x\,y)\square c = (x\square c)(y\square c) = (\varphi(x\square b))(\,\varphi(y\square b)),$$
$$\varphi(y\square(x\square b)) = \varphi((y \circ x)\square b) = (y \circ x)\square c = y\square(x\square c),$$

поэтому φ – гомоморфизм, причем инъективный согласно (1.2.2). Так как $0 \neq \varphi(B) \leq C$, то благодаря неприводимости C должно быть равенство $\varphi(B) = C$. Итак, φ – изоморфизм.

Далее введем в рассмотрение множество

$$D = \{\, a + \varphi(a) \mid a \in B \,\} \subseteq B + C. \tag{1.2.4}$$

Учитывая (1.2.3) и поскольку для каждого $a \in B$ существует $x \in К$ такой, что $a = x\square b$, имеем

$$D = \{\, x\square b + \varphi(x\square b) \mid x \in К \,\} = \{\, x\square b + x\square c \mid x \in К \,\} =$$
$$= \{\, x\square(b + c) \mid x \in К \,\} = К\square(b + c) \in SuA.$$

Отсюда ввиду гамильтоновости A получаем, что $D \in StA$. Значит, можно использовать стабильность D. Именно для любых элементов a, d из B, x из К и учитывая (1.2.1), выводим

$$x\square a + \varphi(x\square(a + d) - x\square d)) = x\square a + (x\square(\varphi(a + d)) - x\square\varphi(d)) = x\square a +$$
$$+ x\square(\varphi(a) + \varphi(d)) - x\square\varphi(d) = x\square(a + \varphi(a) + \varphi(d)) - x\square\,\varphi(d) \in D.$$

Отсюда ввиду того, что $x\square a \in B$, $\varphi(x\square(a + d)) - x\square\varphi(d) \in C$, $x\square a + \varphi\,(x\square a) \in D$, и так как каждый элемент из D единственным образом определяется своей первой проекцией, то $\varphi(x\square a) = \varphi(x\square(a + d) - x\square d))$ и $x\square a = x\square(a + d) - x\square d)$. Следовательно, имеет место соотношение

$$\forall\ a, d \in B\ \ \forall\ x \in K(x\square(a + d) = x\square a + x\square d). \tag{1.2.5}$$

Предположим теперь, что B и C – произвольные изоморфные не равные подмодули К-модуля A. Докажем, что умножение в кольцах B и C нулевое. Действительно, пусть φ: $B \to C$ – изоморфизм. Определим множество D по формуле (1.2.4). Как и выше, доказывается, что D является идеалом К-модуля A. Отсюда следует, что если $a, d \in B$, то $(a + \varphi(a))d = ad \in D$. С другой стороны, $ad + \varphi(ad) \in D$, поэтому $\varphi(ad) = 0$ и $ad = 0$. Следовательно, умножение в кольцах B и C нулевое. Теперь для $a, d \in B$ и $x \in K$ $x\square(ad) = 0 = (x\square a)(x\square d)$, а это вместе с (1.2.5) означает, что B и C – стройные К-модули.◊

Лемма 2. Пусть B и C различные минимальные под-m-кольца гамильтонова m-кольца A. Тогда если m-кольца B и C изоморфны, то $B\circ B = 0 = C\circ C = B\cdot B = C\cdot C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду гамильтоновости m-кольца A m-кольца B и C являются идеалами m-кольца A, поэтому $B + C \in SubA$. Положим $H = B + C$. Так как B и C различны, то ввиду их минимальности $B \cap C = 0$, а так как это – идеалы m-кольца A, то благодаря его гамильтоновости

$$B + C = B \oplus C \tag{1.2.6}$$

согласно следствию 2.2.2.

Предположим, что φ – изоморфизм m-кольца B на m-кольцо C. Рассмотрим множество $D = \{\ a + \varphi(a) \mid a \in B\ \} \subseteq B + C$. Так же, как и в доказательстве леммы 1, доказывается, что $D \in SubA = \Im(A)$. Если теперь $a, b \in B$, то согласно (1.2.6) $\varphi(a)\circ b \in B \cap C = 0$, поэтому ввиду инвариантности справа идеала D $(a + \varphi(a))\circ b = a\circ b + \varphi(a)\circ b = a\circ b = a\circ b + \varphi(a\circ b)$. Отсюда следует, что $\varphi(a\circ b) = 0$ и так как φ – изоморфизм, $a\circ b = 0$. Значит, $B\circ B = = 0 = C\circ C$. Аналогично доказывается, что $B\cdot B = C\cdot C = 0$.◊

Лемма 3. Пусть

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i\ \ - \tag{1.2.7}$$

разложение m-кольца A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ его идеалов, являющихся минимальными и попарно не изоморфными m-кольцами . Тогда A – гамильтоново m-кольцо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $i \in I$ так как A_i – минимальное m-кольцо, то для некоторого a_i будет $A_i = < a_i >$. Пусть $\pi_i: A \to A_i$ – естественные проекции прямой суммы и положим $B_i = Ker\ \pi_i$. Нетрудно видеть, что требуемое утверждение достаточно доказать, что $C \in \mathfrak{I}(A)$ для произвольного циклического под-m-кольца C m-кольца A. Для этого предположим, что $C = < a > \neq 0$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$, существует множество $I_a = \{1, 2, \ldots, n\} \in FinI$, такое, что

$$a = \sum_{i \in I_a} a_i, \tag{1.2.8}$$

где для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_i = \pi_i(a) \in A_i$, $a_i \neq 0$. Покажем, что

$$C = \sum_{i=1}^{n} < a_i > . \tag{1.2.9}$$

В самом деле, ввиду минимальности A_i и $a_i \neq 0$ должно быть $A_i =$ $= < a_i >$, поэтому в случае выполнения (1.2.9) C является идеалом как сумма идеалов. Обратно, пусть $C \in \mathfrak{I}(A)$. Можно считать, что $n > 1$. Покажем, что $< a_1 > \subseteq C$. Для этого обозначим через $F(t)$ свободное m-кольцо многообразия $\mathcal{K}_0$, порожденное символом t. Предположим, что для всякого терма $u(t) \in F(t)$ и любого индекса $i \in \{2, \ldots, n\}$ из $u(a_1) = 0$ следует, что $u(a_i) = 0$. Тогда нетрудно проверить для всякого $i \in \{2, \ldots, n\}$, что соответствие ρ: $A_1 \to A_i$, где для $u(t) \in F(t)$ $\rho(u(a_1)) = u(a_i)$, является гомоморфизмом m-колец, причем ненулевым, так как $a_i \neq 0$. Из этого ввиду минимальности A_i следует сюръективность разложения (1.2.7). Противоречие показывает, что для некоторого терма $u(t) \in F(t)$ должно быть $u(a_1) \neq 0$, но $\forall i \in \{2, \ldots, n\}(u(a_i) = 0)$. Из этого, а также (1.2.9) и (1.2.7) выводим $u(a_1) = u(a_1) + \sum_{i=2}^{n} u(a_i) = u(\sum_{i \in I_a} a_i) = u(a) \in C$. Значит, так как $A_1 =$ $= < u(a_1) > \subseteq C$. Аналогично, для всякого $i \in \{2, \ldots, n\}$ имеем $A_i \subseteq C$, поэтому $\sum_{i=1}^{n} A_i = = \bigvee_{i=1}^{n} A_i \subseteq C$. Так как $C \subseteq \sum_{i=1}^{n} A_i$, то имеем равенство (1.2.9). Из этого следует, что C является идеалом как сумма идеалов. ◊

Пример 1. Пусть $(N, +, \circ)$ − почтикольцо с единицей e (т. е. e − единица его o-полугруппы $(N, \circ)$). Пусть A − *унитальная* (т. е. $e \square a = a$ для любого $a \in A$) N-группа. N-группа A называется *ручной* [71], если выполняется условие: $\forall x \in N \forall a, b \in A \exists y \in N\ (x \square (a + b) - x \square b = y \square a)$.

Пусть теперь (К, +, , , ∘) − m-кольцо с единицей и A − К-модуль с нулевым умножением, который является ручной К-группой по отношению к почтикольцу (K, +, ∘). Нетрудно установить, что K-модуль A гамильтонов.◊

Упражнение 1. Доказать следующие утверждения:

а) для того чтобы K-модуль A был гамильтоновым, необходимо и достаточно, чтобы для любых $a, b \in A$ и $x, y \in K$ существуют. $z, u \in K$ такие, что $(x\square a)b = z\square a, x\square(y\square a + b) - x\square b = u\square a$;

б) для того чтобы K-модуль A был гамильтоновым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a \in A$ подмодуль $< a >$ состоит из элементов вида $\sum_{i=1}^{n} x_i \square f_i(a) + f_0(a)$, где $n \in \mathbb{N}$, для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, f_i(a) \in \mathbb{Z}[a]a$ для $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, а также для любых элементов $b \in A, x \in K$ и любого многочлена $f(a) \in \mathbb{Z}[a]a$ выполняется включение $\{ f(a)b, x\square(f(a) + b) - x\square b\} \subseteq$
$\subseteq < a >$.◊

1.3. *m*-алгебры с условиями разложимости в прямое произведение

m-алгебра A называется *строго приводимой*, если любая ее под-m-алгебра B выделяется прямым слагаемым, т. е. существует под-m-алгебра $C \le A$ такая, что

$$A = B \oplus C. \tag{1.3.1}$$

Замечание 1. Аналогичное понятие для колец (кольца со свойством P) рассматривалось в работе [31].◊

Следствие 1. Каждая строго приводимая m-алгебра является гамильтоновой.◊

m-алгебра A называется *вполне разложимой*, если она либо нулевая, либо является прямой суммой идеалов, каждый из которых есть минимальная m-алгебра.

В соответствии с терминологией теории полугрупп [20], …, m-алгебра A называется *ретрактной*, если любая ее под-m-алгебра B является ретрактом. Согласно лемме 2.3.1 это предполагает существование идеала $C \trianglelefteq A$ такого, что $A = B \leftthreetimes C$.

Следуя [29], m-алгебру A называем *вполне приводимой*, если любой ее идеал B выделяется прямым слагаемым.

Введем обозначения. Класс всех строго приводимых m-алгебр обозначаем через $\mathcal{S}$, класс всех вполне разложимых –через $\mathcal{R}$, класс всех ретрактных – через $\mathcal{P}$, класс вполне приводимых – через $\mathcal{B}$, а класс всех гамильтоновых m-алгебр – через $\mathcal{H}$. Из следствия 1 сразу следует

С л е д с т в и е 2. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$.

С л е д с т в и е 3 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A есть m-алгебра из класса $\mathcal{S}$ и $B \le A$, то для некоторого идеала $C \trianglelefteq A$ выполняется (1.3.1) и согласно замечанию 2.3.1 $A = B \rtimes C$. Поэтому A – ретрактная m-алгебра и $\mathcal{S} \subseteq$ $\subseteq \mathcal{P}$. Пусть теперь A – ретрактная m-алгебра и $B \trianglelefteq A$. Тогда должен найтись идеал $C \trianglelefteq A$ такой, что $A = B \rtimes C$. Согласно следствию 2.3.1 тогда выполняется (1.3.1) и B выделяется прямым слагаемым. Так что $\mathcal{P} \subseteq$ $\subseteq \mathcal{B}$.◊

С л е д с т в и е 4. Если m-алгебра A строго приводима, то решетки Sub^oA, $\Im^{\triangleleft}(A)$, $Sub^{\times}A$ и $\Im^{\bowtie}(A)$ одноэлементны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – строго приводимая m-алгебра и $B \in SubA$. Тогда выполняется (1.3.1) для некоторого идеала $C \trianglelefteq A$. Если теперь $B \subsetneq^{o} A$, то из равенства $A = B + C$ следует, что $C = A$ и поэтому $B = 0$. Следовательно, $Sub^oA = \{0\}$. Если $B \subsetneq^{\times} A$, то из $B \cap C = 0$ следует, что $C = 0$ и потому $B = A$. Значит, $Sub^{\times}A = \{A\}$. Аналогично доказывается, что решетки $\Im^{\triangleleft}(A)$ и $\Im^{\bowtie}(A)$ одноэлементны.◊

В соответствии с терминологией теории решеток m-алгебру A называем *атомной* (*коатомной*, *атомичной*, *коатомичной*), если решетка $SubA$ атомна (соответственно, коатомна, атомична, коатомична).

Очевидно, всякий коатом решетки $SubA$ является максимальной под-m-алгеброй m-алгебры A, а всякий атом B (т. е. элемент множества $\mathcal{M}iA$) – минимальныой под-m-алгеброй. Последний факт будем записывать так : $B \propto A$

Лемма 1. Всякая конечнопорожденная ненулевая под-m-алгебра является коатомной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется показать, что всякая собственная под-m-алгебра конечнопорожденной m-алгебры A содержится в некотором максимальном подмодуле. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ порождают A как m-алгебру. Пусть $B \le A$ и $B \ne A$. Рассмотрим множество $\Phi = \{\ C \in SubA \mid B \subseteq C \ne A\ \}$. Так как $B \in \Phi$, то $\Phi \ne \varnothing$. Пусть Γ – некоторое линейно упорядоченное (по включению) подмножество (цепь) в Φ.

Положим $D = \bigcup_{C\in\Gamma} C$. Ясно, что $D \le A$ и $B \subseteq D$. Предположим, *е. а.,* что $D = A$. Тогда $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$ и для каждого $i \in \{1, 2,\ldots, n\}$ существует $C_i \in \Gamma$, для коего $a_i \in C_i$. Если, скажем, C_n – наибольшая из этих под-m-алгебр C_i., то $a_i \in C_n$ для любого $i \in \{1, 2,\ldots, n\}$, поэтому $A =$
$= < a_1, a_2, \ldots, a_n > \subseteq C_n$ и $A = C_n$, что приводит к противоречию. Следовательно, $D \ne A$ и $D \in \Phi$. Теперь по лемме Цорна множество Φ обладает максимальным элементом. Пусть это будет C. Тогда $B \subseteq C \ne A$ и остается показать, что $C \in \mathcal{M}a\,A$. В самом деле, если $E \in SubA$ и $C \subseteq E \ne A$, то $B \subseteq E \ne A$, поэтому $E \in \Phi$ и ввиду максимальности C должно быть $C = D$. Следовательно, $B \subseteq C \in \mathcal{M}aA$. Итак, решетка $SubA$ коатомна, что означает коатомность m-алгебры A.◊

Лемма 2. Всякая ненулевая строго приводимая m-алгебра A является атомной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – строго приводимая m-алгебра и $B \le A$. Очевидно, что B содержит некоторую конечнопорожденную под-m-алгебру C, которая согласно лемме 1 должна содержать некоторую под-m-алгебру $D \in \mathcal{M}aC$. Так как A строго приводима, то $D \in \Im(A)$ и для некоторого идеала $E \trianglelefteq A$ имеет место разложение

$$A = D \oplus E. \tag{1.3.2}$$

Покажем, что

$$C = D \oplus (C \cap E). \tag{1.3.3}$$

В самом деле, ясно, что $D + (C \cap E) \subseteq C$. С другой стороны, если $c \in C$, то ввиду (1.3.2) $c = d + e$ для некоторых $d \in D$ и $e \in E$. Так как $D \subseteq C$, отсюда следует, что $e = c - d \in C - D \subseteq C - C \subseteq C$, поэтому $e \in C \cap E$ и $c \in D+(C \cap E)$. Так что $C = D + (C \cap E)$. Из (1.3.2) также следует, что $D \cap (C \cap E) = 0$, поэтому и так как ввиду гамильтоновости A под-m-алгебры D и $C \cap E$ являются идеалами m-алгебры A, верно равенство (1.3.3).

Теперь по третьей теореме о гомоморфизмах

$$C/D = (D + (C \cap E))/D \approx (C \cap E)/(D \cap C \cap E) = (C \cap E)/0 = C \cap E.$$

Из этого ввиду максимальности подмодуля D в C следует, что подмодуль $C \cap E$ К-модуля B неприводим. Следовательно, решетка $SubA$ атомна.◊

Лемма 3. Пусть

$$A = \sum_{i\in I} A_i \ - \tag{1.3.4}$$

разложение m-алгебры A в сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ идеалов, являющихся минимальными m-алгебрами. Пусть $B\in \Im(A)$. Тогда верны следующие утверждения:

а) существует такое $J \subseteq I$, что

$$A = B\oplus \sum_{i\in J}{}^{\oplus} A_i \;; \tag{1.3.5}$$

б) существует такое $M \subseteq I$, что

$$B \approx \sum_{i\in M}{}^{\oplus} A_i \;. \tag{1.3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{\, L \subseteq I \mid B + \sum_{i\in L} A_i = B \oplus \sum_{i\in L}{}^{\oplus} A_i \,\}. \tag{1.3.7}$$

Полагая $\sum_{i\in\varnothing}{}^{\oplus} A_i = 0$, приходим к тому, что $\varnothing \in \Gamma$ и, значит, $\Gamma \neq \varnothing$. Считаем, что Γ упорядочено по включению. Пусть Λ – некоторая цепь в Γ. Положим $\tilde{L} = \bigcup_{L\in\Lambda} L$. Проверим, что $\tilde{L} \in \Gamma$, тогда по лемме Цорна можно утверждать существование максимального элемента в Γ. Для этого предположим, что $E\in Fin\,\tilde{L}$. Тогда найдется подмножество $L\in \Lambda$ такое, что $E \subseteq L$. Отсюда следует согласно (1.3.7) равенство

$$B + \sum_{i\in L} A_i = B \oplus \sum_{i\in L}{}^{\oplus} A_i \;. \tag{1.3.8}$$

Если теперь $b\in B$ и $a_i\in A_i$ для $i\in E$, то из (1.3.8) следует, что в случае $b + \sum_{i\in E} a_i = 0$ все элементы b и a_i должны быть равны нулю и что в случае $\mathcal{Z}$ = К-Mod для любого $x\in$ K выполняется равенство $x\,\square\,(b + \sum_{i\in E} a_i) = x\,\square\, b + \sum_{i\in E} x\square a_i$. В случае $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$ все операции выполняются покомпонентно. Из этого ввиду того, что $B\in \Im(A)$ и $A_i \in \Im(A)$ для $i\in I$, получаем равенства $B + \sum_{i\in E} A_i = B \oplus \sum_{i\in E}{}^{\oplus} A_i$ и $B + \sum_{i\in \tilde{L}} A_i = B\oplus \sum_{i\in \tilde{L}}{}^{\oplus} A_i$. Следовательно, $\tilde{L} \in \Gamma$ и Γ имеет максимальный элемент, скажем, J. Положим $D = B +$

$+\sum_{i\in J} A_i$. Тогда согласно (1.3.7) $D = B \oplus \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i$. Для произвольного $i \in I$ рассмотрим идеал $D + A_i \in \Im(A)$. Если $D \cap A_i = 0$, то согласно следствию 2.2.2 $D + A_i = D \oplus A_i$. В этом случае $J \subset J \cup \{i\} \in \Gamma$, что противоречит максимальности J в Γ. Следовательно, $D \cap A_i = A_i$ и $A_i \subseteq D$. Ввиду произвольности индекса i отсюда следует согласно (1.3.4), что $A = \sum_{i\in I} A_i \subseteq D$ и $A = D$. Равенство (1.3.5) доказано. Утверждение а) доказано.

Для доказательства б), применяя к идеалу $C = \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i$ те же рассуждения, что и для B в а), установим существование такого подмножества $M \subseteq I$, что $A = \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i \oplus \sum_{i\in M}^{\oplus} A_i = C \oplus \sum_{i\in M}^{\oplus} A_i$. Привлекая теперь (1.3.5) и третью теорему о гомоморфизмах, имеем

$$B \approx B/0 = B/(B \cap \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i) \approx (B + \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i)/\sum_{i\in J}^{\oplus} A_i =$$

$$= A / \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i = (\sum_{i\in J}^{\oplus} A_i \oplus \sum_{i\in M}^{\oplus} A_i)/\sum_{i\in J}^{\oplus} A_i \approx \sum_{i\in M}^{\oplus} A_i,$$

что и требовалось доказать.◊

Аналогично доказывается.

Лемма 4. Пусть $A = \sum_{i\in I} A_i$ – разложение m-алгебры A в сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ идеалов, являющихся простыми m-алгебрами. Пусть $B \in \Im(A)$. Тогда верны следующие утверждения:

а) существует такое $J \subseteq I$, что $A = B \oplus \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i$;

б) существует такое $M \subseteq I$, что $B \approx \sum_{i\in M}^{\oplus} A_i$. ◊

С л е д с т в и е 5. Имеют место следующие утверждения относительно вполне разложимых m-алгебр:

В1) если m-алгебра A является суммой идеалов, каждая из которых является минимальной m-алгеброй, то A вполне разложима;

В2) всякий идеал вполне разложимой m-алгебры вполне разложим;

В3) любой гомоморфный образ вполне разложимой m-алгебры вполне разложим;

В4) прямая сумма любого непустого семейства вполне разложимых m-алгебры есть вполне разложимая m-алгебра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В1) следует из леммы 3, если положить $B = 0$;

В2) непосредственно следует из леммы 3;

В3) пусть (1.3.4) есть разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных m-алгебр и пусть φ – гомоморфизм m-алгебры A на некоторую ненулевую m-алгебру C. Зафиксируем произвольный индекс $i\in I$. По второй теореме о гомоморфизмах $\varphi(A_i)\in \Im(C)$.Так как $A_i \propto A$, то либо $\varphi(A_i) = 0$, либо m-алгебра $\varphi(A_i)$ изоморфна A_i и потому минимальна. Далее, так как $C = \varphi(A) = \varphi(\sum\limits_{i\in J}{}^{\oplus} A_i) = \sum\limits_{i\in I}\varphi(A_i)$, то C оказывается суммой идеалов, каждый из которых есть минимальная m-алгебра, поэтому согласно утверждению В1) C вполне приводима;

В4) очевидно.◊

Теорема 1. Пусть A – строго приводимая m-алгебра. Тогда любая ее под-m-алгебра, в частности, сама m-алгебра A вполне разложима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – строго приводимая m-алгебра и $0 \neq B \leq A$. Положим

$$B_0 = \sum_{C\propto B}{}^{\oplus} C\,. \tag{1.3.9}$$

Ввиду леммы 2 $B_0 \neq \varnothing$. По определению строго приводимой m-алгебры должна существовать под-m-алгебра $D \leq A$ такая, что $A = B_0 \oplus D$. Ввиду гамильтоновости m-алгебры A (следствие 1 и следствие 1.1.1) решетка $SubA$ модулярна, поэтому $B = B\cap A = B\cap(B_0 + D) = B_0 + (B\cap D)$ и так как $B_0\cap(B\cap D) = 0$, то согласно следствию 2.2.2 $B = B_0 \oplus (B\cap D)$. Если теперь $B\cap D \neq 0$, то согласно лемме 2 существует подмодуль $C\propto (B\cap D)$ и тогда $B_0 + C = B_0\oplus C \leq B$, что противоречит определению (1.3.9). Так что остается возможность $B\cap D = 0$, а тогда $B = B_0$ и под-m-алгебра B разлагается в прямую сумму минимальных под-m-алгебр.◊

С л е д с т в и е 6. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.◊

Теорема 2. Пусть A – гамильтонова m-алгебра. Тогда следующие утверждения равносильны.

Г1) A – строго приводимая m-алгебра;

Г2) каждая под-m-алгебра в A есть сумма минимальных под-m-алгебр;

Г3) A есть сумма минимальных под-m-алгебр;

Г4) A – вполне разложимая m-алгебра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Г1) $\Rightarrow$ Г2) Следует из теоремы 1.

Г2) $\Rightarrow$ Г3). Очевидно.

Г3) $\Rightarrow$ Г4). Пусть (1.3.9) – разложение m-алгебры A в сумму минимальных под-m-алгебр. В силу гамильтоновости A это – сумма идеалов, являющихся минимальными под-m-алгебрами. Поэтому в силу утверждения В1) следствия 4 A – вполне разложимая m-алгебра.

Г4) $\Rightarrow$ Г1). Пусть (1.3.4) есть разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных под-m-алгебр и пусть $B \in SubA$. Тогда ввиду гамильтоновости A будет $B \in \Im(A)$ и согласно лемме 3 $A =$ $= B \oplus \sum_{i\in J}^{\oplus} A_i$ для некоторого $J \subseteq I$. Поэтому B выделяется прямым слагаемым.◊

С л е д с т в и е 7. $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{H}$.

Из теоремы 2 также легко вытекает

С л е д с т в и е 8. Каждая строго приводимая m-алгебра атомична.◊

Напомним из п. 1.1, что каждый неприводимый К-модуль либо является обыкновенным строго циклическим К-модулем, изоморфным фактор-модулю естественного К-модуля ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$ по некоторому его допустимому идеалу, либо является чистым К-модулем с аддитивной группой $\mathbb{Z}_p$ простого порядка p, причем в последнем случае с точностью до изоморфизма имеются всего два варианта для кольца $(A, +, \cdot)$ – либо умножение нулевое, либо $(A, +, \cdot) = (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ – простое поле.

В связи с этим и леммой 1.2.1 приведем следующее утверждение, нужное в дальнейшем.

Лемма 5. Пусть A – обыкновенный неприводимый абелев К-модуль. Тогда всякий его ненулевой элемент является обыкновенным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В предположениях леммы положим $B =$ $= \{ b \in A \mid \mathrm{K}\Box b = 0 \}$ – множество его чистых элементов. Если мы покажем, что $B \le A$, то будет выполняться равенство $B = 0$ ввиду обыкновенности и неприводимости К-модуля A. Дабы это показать, рассмотрим для $a \in A$ отображение $\psi_a : \mathrm{K} \to A$, где для $x \in \mathrm{K}$ $\psi_a(x) = x\Box a$. Так как A есть К-модуль, то ψ_a является гомоморфизмом из группы (К, +) в группу $(A, +)$. Рассмотрим отображение $\psi: a \mapsto \psi_a$. Из стройности К-модуля A

(следствие 3.1.1 и предложение 3.1.1) следует, что ψ является гомоморфизмом группы $(A, +)$ в группу гомоморфизмов (с поаргументным сложением) группы (К, +) в группу $(A, +)$. При этом множество B есть ядро гомоморфизма ψ и потому оказывается подгруппой группы $(A, +)$. Так как умножение в A нулевое и К□B $=\{0\} \subseteq B$, то $B \in SuA$. Итак, $B = 0$ и все ненулевые элементы являются обыкновенными.◊

Следующая теорема дает описание строго приводимых К-модулей с точностью до строения неприводимых К-модулей.

Теорема 3. Пусть A – вполне разложимый К-модуль и

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \ - \qquad (1.3.10)$$

его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ неприводимых подмодулей. Предположим, что выполняются следующие два условия:

(*) Если $i, j \in I$, $i \neq j$ и оба К-модуля A_i и A_j обыкновенны, то они изоморфны и являются абелевыми К-модулями.

(**) Если $i, j \in I$, $i \neq j$ и К-модули A_i и A_j – чистые и изоморфные, то у них умножение нулевое, а аддитивная группа проста (т. е. простого порядка).

Тогда A – строго приводимый К-модуль. Обратно, если A – строго приводимый К-модуль и (1.3.13) – его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ неприводимых подмодулей, то это семейство удовлетворяет условиям (*) и (**).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A – строго приводимый ненулевой К-модуль. Тогда согласно теореме 1 A вполне разложим. Пусть (1.3.10) – его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ неприводимых подмодулей. Предположим, что $i, j \in I$ и $i \neq j$. Благодаря следствию 1 A – гамильтонов К-модуль и можно воспользоваться леммой 1.2.1. Именно если A_i и A_j обыкновенные К-модули, то согласно утверждению 1) этой леммы они изоморфны и являются стройными К-модулями, а согласно утверждению 2) у них умножение нулевое. Теперь согласно следствию 3.1.1 A_i и A_j – абелевы К-модули. Если A_i и A_j – чистые и изоморфные, то согласно утверждению 2) леммы 1.2.1 у них умножение нулевое, а ввиду неприводимости аддитивная группа $(A_i, +)$ не имеет нетривиальных подгрупп и потому проста и имеет простой порядок. Итак условия (*) и (**) выполняются. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть A – вполне разложимый К-модуль и

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i(\pi_i) \ - \qquad (1.3.11)$$

его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ неприводимых подмодулей, где для $i\in I$ $\pi_i : A \to A_i$ – естественная проекция, и пусть для этого семейства выполняются условия (*) и (**). Если мы установим, что A – гамильтонов К-модуль, то его строгая приводимость будет следовать из теоремы 2. Предположим, что $B\in SuA$. Надо доказать, что B есть идеал К-модуля A. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда B как подмодуль порождается одним элементом. Тогда если $<a> = \ll a \gg$ для любого $a\in A$, то каждый подмодуль будет суммой однопорожденных идеалов и сам будет идеалом.

Итак, зафиксируем произвольный ненулевой элемент $a\in A$ и положим $J = \{\, i\in I \mid \pi_i(a) \neq 0 \,\}$ и

$$C = \sum_{i\in J}{}^{\oplus} A_i\ . \tag{1.3.12}$$

Нетрудно видеть, что если подмодуль $<a>$ является идеалом в C, то он будет также идеалом в A, так что можно ограничиться элементами из C.

Предположим сначала, что $|J| = 1$. Тогда для $i\in J$ $a\in A_i = C$ и ввиду неприводимости A_i будет $<a> = A_i = C$ и $<a> \trianglelefteq C$. Далее предполагаем, что $|J| > 1$. В соответствии с условиями (*) и (**) возможны следующие случаи:

а) C – чистый К-модуль.

б) существует индекс $i\in J$, такой, что A_i – обыкновенный К-модуль, не изоморфный никакому подмодулю A_j для $j\in J\setminus\{i\}$, при этом эти последние – чистые К-модули.

в) существуют индексы $i, j\in J$ такие, что $i \neq j$ и A_i и A_j – изоморфные обыкновенные К-модули.

Рассмотрим сначала случай а) чистого К-модуля C. Тогда каждый идеал кольца $(C, +, \cdot)$ является идеалом К-модуля A, поэтому достаточно показать, что

$$<a>\cdot C \subseteq <a>. \tag{1.3.13}$$

Положим

$$J_1 = \{\, i\in J \mid A_i\cdot A_i = 0 \,\}, J_2 = \{\, i\in J \mid (A_i, +, \cdot) \text{ – поле}\}. \tag{1.3.14}$$

Из сказанного выше, следует равенство $J = J_1 \sqcup J_2$ и что если $i\in J_2$, то кольцо $(A_i, +, \cdot)$ изоморфно полю вычетов [9] $(\mathbb{Z}_{p_i}, +, \cdot)$ для некоторого простого числа p_i, при этом числа p_i для различных индексов i различны благодаря условию (**).

Рассмотрим в первую очередь случай $J_2 = \varnothing$. Тогда умножение в C нулевое и $< a >\cdot C = \{0\} \subseteq < a >$. Более сложный случай, когда $J_2 \neq \varnothing$. Для $i \in J_2$ можно считать, что $(A_i, +, \cdot) = (\mathbb{Z}_{p_i}, +, \cdot)$, причем элементы из $\mathbb{Z}_{p_i}$ будем представлять как классы вычетов $\overline{c} = c + p_i\mathbb{Z}$, где $c \in \mathbb{Z}$. Умножение в кольце $\mathbb{Z}$ будем обозначать через "$\bullet$". Пусть b – произвольный элемент из C. Покажем, что существует число $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$a\cdot b = n \bullet a^2, \tag{1.3.15}$$

где (как и в п. 5.1 гл. I)

$$n \bullet a^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ \underbrace{a^2 + a^2 + \ldots a^2}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.3.16}$$

Пусть $i \in J_2$. Из наших предположений следует, что существуют целые числа c_i и d_i такие, что $\pi_i(a) = \overline{c}_i$, $\pi_i(b) = \overline{d}_i$. При этом ввиду того, что $\pi_i(a) \neq 0$ должно быть $c_i \not\equiv 0 \ (mod p_i)$ и, значит, $c_i \bullet c_i \not\equiv 0 \ (mod p_i)$. Так как множество J_2 конечно и все числа p_i для различных i различны, то система сравнений

$$\left\{ \ n \bullet c_i \bullet c_i \equiv c_i d_i \ (mod p_i), i \in J_2 \right.$$

имеет решение относительно $n \in \mathbb{N}_0$. Следовательно,

$$\forall i \in J_2 (\pi_i(n \bullet a^2) = n \bullet \pi_i(a^2) = n \bullet \overline{c}_i^2 = \overline{n \bullet c_i \bullet c_i} = \overline{c_i \bullet d_i} =$$

$$= \overline{c}_i \overline{d}_i = \pi_i(a)\pi_i(b) = \pi_i(ab)). \tag{1.3.17}$$

Если $i \in J_1$, то ввиду (1.3.14) и (1.3.16) $\pi_i(ab) = \pi_i(0) = \pi_i(n \bullet a^2)$. Следовательно, используя (1.3.17) и то, что $J = J_1 \sqcup J_2$, выводим равенство (1.3.15). Из этого равенства следует, что $ab \in < a >$. Ввиду произвольности b отсюда следует включение (1.3.13) и, значит, $< a > \in StC$. Случай а) рассмотрен;

б) выделим индекс $j \in J$ такой, что A_j есть обыкновенный К-модуль, не изоморфный никакому из подмодулей A_i для $i \in J \setminus \{j\}$. Тогда согласно условию (*) все подмодули A_i для $i \in J \setminus \{j\}$ – чистые. Тогда их прямая сумма $B = \sum_{i \in J \setminus \{j\}} {}^{\oplus} A_i$ также является чистым К-модулем. Из (1.3.13) следует разложение

$$C = A_j \oplus B. \quad (1.3.18)$$

Обозначим через π естественную проекцию этой прямой суммы на второй сомножитель B. Пусть снова b – произвольный элемент из C. Ради краткости дополнительно введем обозначения : $c = \pi_j(a)$, $d = \pi(a)$, $e = \pi_j(b)$, $h = \pi(b)$. В этих обозначениях вследствие (1.3.18) имеем

$$a = c + d, b = e + h. \quad (1.3.19)$$

Так как B – чистый К-модуль и $d \neq 0$, то, как и при рассмотрении случая а), должно существовать число $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$d \cdot h = n \bullet d^2. \quad (1.3.20)$$

Далее, так как К-модуль A_j – обыкновенный неприводимый, то он строго циклический, поэтому существует элемент $g \in A_j$ такой, что

$$A_j = К \square g. \quad (1.3.21)$$

С другой стороны, поскольку $c \in A_j$ и $c \neq 0$, то $< c > = A_j$. Значит, должен существовать терм $u(t)$ из однопорожденного свободного К-модуля $F(t)$ такой, что

$$g = u(c). \quad (1.3.22)$$

Теперь согласно (1.3.21) и ввиду того, что $ce \in A_j$, должен существовать элемент $x \in К$, для которого выполняется равенство $ce - n \bullet c^2 = x \square g$. Отсюда, используя (1.3.18), (1.3.19), (1.3.20), (1.3.22) и то, что B – чистый К-модуль, выводим

$$ab = (c + d)(e + h) = ce + dh = n \bullet c^2 + x \square g + n \bullet d^2 =$$
$$= n \bullet c^2 + x \square u(c) + n \bullet d^2 + x \square u(d) = n \bullet a^2 + x \square u(a) \in < a >.$$

Тем самым показано, что $< a >$ есть идеал кольца $(C, +, \cdot)$. Для доказательства его стабильности при тех же соглашениях предположим, что y – произвольный элемент из К. Так как $A_j \in StC$, то $y \square (c + e) - y \square e \in A_j$ и благодаря (1.3.22) найдется элемент $z \in К$, удовлетворяющий условию $y \square (c + e) - y \square e = z \square g$. Это позволяет с использованием соотношений (1.3.18), (1.3.19) (1.3.22) и того, что B – чистый К-модуль, получить

$$y \square (a + b) - y \square b = y \square (c + d + e + h) - y \square (e + h) = y \square ((c + e) +$$
$$+ (d + h)) - y \square (e + h) = y \square (c + e) + y \square (d + h)) - y \square e - y \square h =$$
$$= y \square (c + e) - y \square e = z \square g = z \square u(c) + z \square u(d) = z \square (u(c) + u(d)) = z \square u(a) \in < a >.$$

Следовательно, $< a > \in StC$. Это завершает рассмотрение случая б);

в) положим $J_0 = \{ i \in J \mid A_i$ – обыкновенный К-модуль $\}$.
В данном случае из условия (*) следует, что все подмодули A_i для $i \in J_0$ изоморфны и являются абелевыми К-модулями, т. е. (следствие 3.1.1) стройными и с нулевым умножением.

Сначала рассмотрим случай $J_0 = J$. Тогда C – кольцо с нулевым умножением, поэтому $< a >$ – идеал этого кольца. Далее, из стройности каждой компоненты A_i для $i \in J$ легко следует стройность самого К-модуля C, поэтому для произвольного $b \in C$ и $x \in$ К имеем

$$x \square (a + b) - x \square b = x \square a + x \square b - x \square b = x \square a \in < a >.$$

Таким образом, $< a > \in StC$.

Наконец, осталось рассмотреть случай $J_0 \neq J$. Положим тогда $J_1 = J \setminus J_0$, а также $B = \sum\limits_{i \in J_0}{}^{\oplus} A_i$, $D = \sum\limits_{i \in J_1}{}^{\oplus} A_i$. При этом B – абелев, а D – чистый К-модуль.

Теперь из (1.3.13) получаем разложение

$$C = B \oplus D. \tag{1.3.23}$$

Пусть снова b – произвольный элемент из C. Из (1.3.23) следует существование элементов $c, e \in B$ и $d, h \in D$, причем $c \neq 0 \neq d$ и имеют место равенства (1.3.20). Так как D – чистый К-модуль и $d \neq 0$, то, как и выше, существует число $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что выполняется равенство (1.3.20). Используя вышеуказанные равенства, разложение (1.3.23) и то, что умножение в кольце B нулевое, получаем

$$a \cdot b = (c + d) \cdot (e + h) = c \cdot e + d \cdot h = d \cdot h = n \bullet d^2 = n \bullet c^2 + n \bullet d^2 =$$
$$= n \bullet (c^2 + d^2) = n \bullet a^2 \in < a >.$$

Следовательно, $< a >$ является идеалом кольца $(C, +, \cdot)$. Для доказательства его устойчивости при тех же соглашениях предположим, что x – произвольный элемент из К. Тогда, воспользовавшись соотношениями (1.3.19), (1.3.23), стройностью К-модуля B и чистотой К-модуля D, приходим к следующим выкладкам:

$$x \square (a + b) - x \square b = x \square (c + d + e + h) - x \square (e + h) = x \square ((c + e) + (d +$$
$$+ h)) - x \square (e + h) = x \square (c + e) + x \square (d + h) - x \square e - x \square h = x \square (c +$$
$$+ e) - x \square e = x \square c + x \square e - x \square e = x \square c = x \square c + x \square d = x \square a \in < a >.$$

Итак, $< a > \in StC$. Теорема доказана.◊

С л е д с т в и е 9. Подкласс $\mathcal{S}$ многообразия К-*Mod* замкнут справа и слева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – строго приводимый К-модуль и B его гомоморфный образ. Согласно следствию 1 A – гамильтонов К-модуль, а благодаря предложению 1.2.1 B – также гамильтонов. По теореме 2 A вполне разложим и по следствию 4 его гомоморфный образ B также вполне разложим. Снова воспользовавшись теоремой 2, приходим к тому, что B как гамильтонов и вполне разложимый К-модуль строго приводим.

Пусть теперь $B \le A$. По определению строгой приводимости B является прямым слагаемым, а тогда согласно предложению 2.2.2 гл. I и образом идемпотентного эндоморфизма, так что по доказанному выше, B – строго приводимый К-модуль.◊

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 3 как следствие (случай чистого К-модуля) получается описание колец со свойством P, данное в работе [31].

Теорема 4. Пусть A – вполне разложимое m-кольцо и

$$A = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i \quad - \tag{1.3.24}$$

его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных под-m-колец. Предположим, что выполняются следующие условия:

(***) Если $i, j \in I$, $i \ne j$ и оба К m-кольца A_i и A_j изоморфны, то они являются абелевыми m-кольцами.

Тогда A строго приводимое m-кольцо. Обратно, если A – строго приводимое m-кольцо и (1.3.27) – его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных m-колец, то это семейство удовлетворяет условию (***).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A – строго приводимое ненулевое m-кольцо. Тогда согласно теореме 1 A вполне разложимо. Пусть (1.3.27) – его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных m-колец. Благодаря следствию 1 A – гамильтоново m-кольцо и можно воспользоваться леммой 1.2.2. Именно если $i, j \in I$, $i \ne j$ и оба К m-кольца A_i и A_j изоморфны, то они согласно следствию 3.1.5 гл. I являются абелевыми m-кольцами. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть A – вполне разложимое m-кольцо и (1.3.24) – его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных m-колец, и пусть для этого семейства выполняется условие (***). Отметим, что согласно следствию 3.1.6 гл. I прямая сумма абелевых m-колец есть абелево m-кольцо. Из условия (***) тогда следует, что возможны три случая:

а) A – абелево m-кольцо;

б) семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ состоит из попарно не изоморфных минимальных m-колец, ни одно из которых не является абелевым;

в) A разлагается в прямую сумму двух m-колец типа а) и б).

Согласно следствию 3.1.7 гл. I в случае а) A – гамильтоново m-кольцо. В случае б) гамильтоновость A следует из леммы 1.2.3. Рассмотрим случай в). Пусть $A = B\oplus C$, где B – абелево m-кольцо, а C разлагается в прямую сумму (1.3.27) семейства $\{A_i\}_{i\in I}$, состоящего из попарно не изоморфных минимальных m-колец, ни одно из которых не является абелевым. Как обычно, для $i\in I$ через π_2 обозначаем проекцию прямой суммы на идеал A_i. Для доказательства гамильтоновости m-кольца A рассмотрим произвольный элемент этого m-кольца и покажем, что порожденное им под-m-кольцо является идеалом m-кольца A. Пусть $b\in B$, $c\in C$ и $H = {}$ $= < b + c >\in SubA$. Если $b = 0$, то $H\in SubC$ и согласно случаю б) $H\in \Im(A)$. Так что можно предполагать, что $b \neq 0 \neq c$, а также что $b\notin H$, иначе $c\in H$, и тогда $H = < b + c > \subseteq < b > + < c > \subseteq H$ и $H = < b > + < c >$. Ввиду гамильтоновости B и C, а также согласно следствию 2.2.3 гл. I $< b > \trianglelefteq B$ и $< c > \trianglelefteq C$, а так как $< b >\cap< c > = 0$, то согласно следствию 2.2.2 гл. I $H = < b >\oplus< c >$. Теперь согласно следствию 2.2.4 гл. I $H \trianglelefteq A$. Аналогично, можем предполагать, что $c\notin H$. При этих предположениях для всякого $i\in I$ такого, что $\pi_i(c) \neq 0$. Ввиду минимальности A_i получим, что $< \pi_i(c) > = A_i$. Далее, под-m-кольцо $< b >$ m-кольца B является ненулевым и абелевым согласно следствию 1.3.6. гл. I. Рассмотрим множества $I_1 = B\cap H, J_1 = \{x\in B \mid \exists y\in C\,(x+y\in H)\}, I_2 = C\cap H, J_2 = \{y\in C \mid \exists x\in B\,(x+y\in H)\}$. Ясно, что I_1, J_1 и I_2, J_2 являются под-m-кольцами m-колец соответственно B и C и ввиду гамильтоновости последних будут их идеалами. При этом $H \subseteq J_1 + J_2$. Докажем, что m-кольца J_1/I_1 и J_2/I_2 изоморфны. Для этого предположим, что $a\in J_1$. Тогда существует элемент $b\in J_2$ такой, что $a + b\in I$. Положим $\kappa(a + I_1) = b + I_2$. Так же, как и в доказательстве теоремы 4.2.1 устанавливается, что соответствие κ является изоморфизмом m-кольца J_1/I_1 на J_2/I_2. Значит, так как m-кольцо J_1/I_1 абелево согласно следствию 1.3.6. гл. I, то m-кольцо J_2/I_2 также абелево. Отметим, что $J_2 \neq I_2$, иначе

$c \in H$ и придем к противоречию. Теперь согласно лемме 3 m-кольцо J_2 изоморфно прямой сумме идеалов некоторого подсемейства семейства $\{A_i\}_{i \in I}$, а также фактор-m-кольцо J_2/I_2 изоморфно некоторому подсемейству семейства $\{A_i\}_{i \in I}$. Но тогда одно из m-колец должно быть абелевым, что противоречит нашему допущению относительно этого семейства. Противоречие показывает, что $H \in \mathfrak{I}(A)$ и m-кольцо A гамильтоново. Теперь согласно теореме 2 заключаем, что m-кольцо A строго приводимо.◊

1.4. Вполне приводимые *m*-алгебры

Из утверждений § 2 гл. I книги [29] о вполне приводимых Ω-группах выводим следующие теоремы:

Теорема 1. Класс $\mathcal{B}$ замкнут относительно операций взятия идеалов, гомоморфных образов, прямых произведений, подпрямых произведений конечных систем m-алгебр.◊

Теорема 2. m-алгебра A вполне приводима тогда и только тогда, когда она является прямой суммой простых под-m-алгебр. ◊

Теорема 3. Если A – вполне приводимая m-алгебра без центра, то она имеет единственное разложение в виде прямой суммы простых под-m-алгебр.◊

У п р а ж н е н и е 1. Доказать следующее утверждение. Пусть A – вполне приводимая m-алгебра. Тогда решетки $\mathfrak{I}^{\lhd}(A)$ и $\mathfrak{I}^{\bowtie}(A)$ одноэлементны.◊

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что всякая вполне приводимая m-алгебра проективна.

1.5. Ретрактные *m*-алгебры

В этом пункте выясним связи между ретрактными и вполне разложимыми m-алгебрами.

Лемма 1. Класс $\mathcal{P}$ замкнут справа и слева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – ретрактная m-алгебра и $B \trianglelefteq A$. Надо доказать, что фактор-m-алгебра A/B тоже ретрактна. По определению существует идеал $C \trianglelefteq A$ такой, что $A = B \leftthreetimes C$. Так как B и C – оба идеалы, то согласно следствию 2.2.2 главы I $A = B \oplus C$. При этом, очевидно, $C \approx A/B$. Следуя предложению 2.2.1, *ibid.,* представим A в виде прямого произведения $B \times C$. Естественную проекцию $B \times C$ на C обозначим через π. Пусть теперь $D \leq C$. Так как m-алгебра A ретрактна, то существует идеал $E \trianglelefteq A$ такой, что $A = (B \times D) \rightthreetimes E$. Отсюда следует, что

$$(B \times D) + E = A \tag{1.5.1}$$

и

$$(B \times D) \cap E = \{(0, 0)\}. \tag{1.5.2}$$

Положим $H = \pi(E)$. По второй теореме о гомоморфизмах $H \in \Im(A)$. Опираясь на (1.5.1), выводим

$$C = \pi(A) = \pi((B \times D) + E) = \pi(B \times D) + \pi(E) = D + H. \tag{1.5.3}$$

Предположим, что $a \in D \cap H$. Тогда существует $b \in B$ такой, что $(b, a) \in E$.Следовательно, $(b, a) \in (B \times D) \cap E$ и благодаря (1.5.2) $a = 0$. Итак, $D \cap H = 0$, что вместе с (1.5.3) показывает, что $C = D \rightthreetimes H$ и D является ретрактом, что и требовалось для доказательства того, что каждый гомоморфный образ ретрактной m-алгебры является ретрактной m-алгеброй.

Предположим теперь, что $B \leq A$. Так как A ретрактна, то согласно следствию 2.2.5 гл. I B является образом при идемпотентном эндоморфизме m-алгебры A и по доказанному выше B ретрактна.◊

Окончательный результат в этом пункте состоит в установлении факта совпадения классов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$.

Теорема 1. m-алгебра A ретрактна тогда и только тогда, когда она вполне разложима.

Доказательство. Необходимость. Пусть A – ретрактная ненулевая m-алгебра. Согласно следствию 1.3.2 она вполне приводима, а тогда по теореме 1.4.2 разлагается в прямую сумму простых идеалов, т. е. имеем разложение $A = \sum\limits_{i \in I}{}^{\oplus} A_i$, где $A_i \in \Im(A)$ и A_i – простая m-алгебра для любого $i \in I$. Зафиксируем произвольное $i \in I$ и покажем, что на самом деле $A_i \propto A$. Тем самым будет доказано, что A вполне разложима. В самом деле, предположим что $B \leq A_i$. Согласно лемме 1 A_i – ретрактная m-алгебра, поэтому должен существовать идеал $C \trianglelefteq A_i$ такой, что $A_i = B \rightthreetimes C$. Ввиду простоты A_i должно быть либо $C = 0$, либо $C = A_i$. Значит, либо $B = A_i$, либо $B = 0$. Значит, A_i минимальна.

Достаточность. Пусть A – вполне разложимая m-алгебра и

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \text{ –} \tag{1.5.4}$$

его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных под-m-алгебр. Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{ L \subseteq I \mid B + \sum_{i\in L} A_i = B \curlywedge \sum_{i\in L}{}^{\oplus} A_i \}. \tag{1.5.5}$$

Полагая $\sum_{i\in\varnothing}{}^{\oplus} A_i = 0$, приходим к тому, что $\varnothing \in\Gamma$ и, значит, $\Gamma \neq \varnothing$. Считаем, что Γ упорядочено по включению. Пусть Λ – некоторая цепь в Γ. Положим $\tilde{L} = \bigcup_{L\in\Lambda} L$. Проверим, что $\tilde{L} \in\Gamma$, тогда по лемме Цорна можно утверждать существование максимального элемента в Γ. Для этого предположим, что $E\in Fin\,\tilde{L}$. Тогда найдется подмножество $L\in\Lambda$ такое, что $E \subseteq L$. Отсюда следует согласно (1.5.4) равенство

$$B + \sum_{i\in L} A_i = B \curlywedge \sum_{i\in L}{}^{\oplus} A_i . \tag{1.5.6}$$

Если теперь $b\in B$ и $a_i\in A_i$ для $i\in E$, то из (1.5.5) следует, что в случае $b + \sum_{i\in E} a_i = 0$ все элементы b и a_i при $i\in E$ должны быть равны нулю.Тогда $B \cap \sum_{i\in E}{}^{\oplus} A_i \subseteq B\cap \sum_{i\in L}{}^{\oplus} A_i = \{0\}$ и ввиду того, что $B\in SubA$ и $\sum_{i\in L}{}^{\oplus} A_i \in\Im(A)$ для $i\in I$, получаем равенство $B + \sum_{i\in E} A_i = B \curlywedge \sum_{i\in E}{}^{\oplus} A_i$ и $B + \sum_{i\in \tilde{L}} A_i = B \curlywedge \sum_{i\in \tilde{L}}{}^{\oplus} A_i$. Следовательно, $\tilde{L} \in\Gamma$ и Γ имеет максимальный элемент, скажем, J. Положим $D = B + \sum_{i\in J} A_i$. Тогда согласно (1.5.4) $D = B \curlywedge \sum_{i\in J} A_i$. Для произвольного $j\in I$ рассмотрим подмодуль $D + A_j \leq A$. Если $D\cap A_j = 0$, то $(\sum_{i\in J} A_i)\cap A_j = 0$ и согласно следствию 2.2.2 гл. I

$$\sum_{i\in J} A_i + A_j = .\sum_{i\in J} A_i \oplus A_j = \sum_{i\in J\cup\{j\}}{}^{\oplus} A_i \tag{1.5.7}$$

К тому же из равенства $D\cap A_j = 0$ легко следует, что $B\cap \sum_{i\in J\cup\{j\}}{}^{\oplus} A_i = 0$, поэтому $B + \sum_{i\in J\cup\{j\}} A_i = B \curlywedge \sum_{i\in J\cup\{j\}}{}^{\oplus} A_i$. Но это приводит к тому, что

$J \subset J \cup \{j\} \in \Gamma$, в противоречие с максимальностью J в Γ . Следовательно, $D \cap A_j \neq 0$ и ввиду минимальности A_j должно выполняться включение $A_j \subseteq D$. Ввиду произвольности индекса j отсюда следует согласно (1.5.3), что $A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i \subseteq D$ и $A = D =. B \searrow \sum_{i \in J} A_i$. Значит, любая под-m-алгебра m-алгебры A является ретрактом и, значит, A – ретрактная m-алгебра.◊

В связи с этой теоремой исследуем взаимоотношения между подклассами $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$ класса $\mathcal{Z}$.Из следствий 1.3.1, 1.3.3, 1.3.6, 1.3.7 и теоремы 1 следуют соотношения

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} = \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} . \tag{1.5.8}$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{H}. \tag{1.5.9}$$

Все К-модули последующих примеров предполагаются чистыми, а m-кольца К – с нулевой суперпозицией, т. е. К∘К = 0, поэтому их структура определяется их редуктами.

Пример 1. Пусть $(A, +, \cdot) = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – поле рациональных чисел. Тогда $|\Im(A)| = 2$, $\mathbb{Z} \in SubA \setminus \Im(A)$, поэтому – простой, но не неприводимый К-модуль, а также $(A, +, \cdot, \circ)$ – простое, но не минимальное m-кольцо. В обоих случаях A – вполне приводимая , но не вполне разложимая m-алгебра.◊

Пример 2. Пусть $(A, +, \cdot) = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ – прямое произведение простых полей вычетов $\mathbb{Z}_p$ по модулю p. Тогда согласно теореме 1.3.3 A – вполне разложимый, но не строго приводимый К-модуль, а m-кольцо. $(A, +, \cdot, \circ)$ вполне разложимо, но не строго приводимо по теореме 1.3.4.◊

Пример 3. Рассмотрим случай $(A, +, \cdot) = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – кольцо целых рациональных чисел как чистый К-модуль.. Тогда $SuA = StA$ и К-модуль A гамильтонов. Так как $\mathcal{M}iA = \varnothing$, то этот К-модуль не является строго приводимым. Точно также m-кольцо . $(A, +, \cdot, \circ)$ – гамильтоново, но не строго приводимо.◊

Подводя итоги, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Включения (1.5.5) являются строгими, кроме того,

$$\mathcal{S} = \mathcal{B} \cap \mathcal{H}. \tag{1.5.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что включения (1.5.8) – строгие, следует из вышеприведенных примеров. Далее, из (1.5.8) и (1.5.9) следует, что $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$. С другой стороны, если A – вполне приводимая гамильтонова m-алгебра, то она разлагается в прямую сумму простых под-m-алгебр (теорема 1.4.2), которые в силу гамильтоновости должны быть минимальными, поэтому A вполне разложима и благодаря теореме 1.3.2 она оказывается строго приводимой. Таким образом, равенство (1.5.10) верно, и мы можем изобразить ситуацию с рассматриваемыми классами следующим графом (рис. 1.5.1).

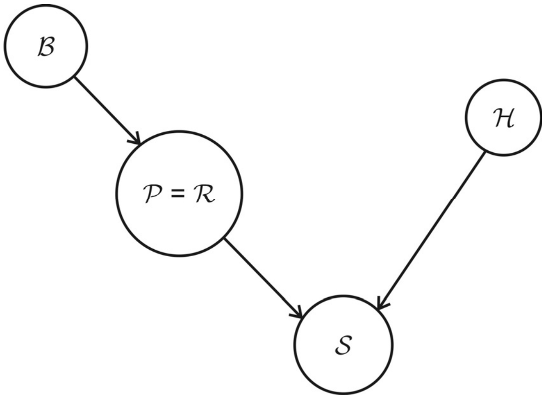


Рис. 1.5.1

§ 2. ИЗОМОРФИЗМЫ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

2.1. Теоремы об изоморфизмах

В этом пункте займемся вопросами изоморфизмов прямых разложений m-алгебр в прямые суммы минимальных или простых под-m-алгебр, усиливая некоторые теоремы из п. 3.6 гл. I и п. 1.4. этой главы.

Лемма 1. Пусть

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \quad (\pi_i, \rho_i) - \tag{2.1.1}$$

разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ под-m-алгебр, где для $i\in I$. π_i: $A \to A_i$ – естественная проекция, а $\rho_i : A_i \to A$ – естественное вложение. Будем рассматривать два случая:

а) m-алгебры A_i минимальны для всех $i\in I$;

б) m-алгебры A_i просты для всех $i\in I$.

Предположим еще, что для двух идеалов $B, C\in\Im(A)$ имеется разложение

$$A = B \oplus C, \qquad (2.1.2)$$

и пусть σ: $A \to B$ и τ: $A \to C$ – естественные проекции этой прямой суммы на компоненты. Тогда для каждого $i\in I$ существует изоморфизм φ_i под-m-алгебры A_i на некоторую m-алгебру $B_i\in SubA$, такой, что

$$(\varphi_i = \sigma\circ\rho_i)\vee(\varphi_i = \tau\circ\rho_i). \qquad (2.1.3)$$

При этом имеет место разложение

$$A = B_i \oplus \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} A_j . \qquad (2.1.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторый произвольный индекс $i\in I$. Из (2.1.1) следует, что

$$A = A_i \oplus \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} A_j . \qquad (2.1.5)$$

Обозначим $D = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} A_j$. Тогда из (2.1.5) следует, что

$$A = A_i \oplus D. \qquad (2.1.6)$$

Пусть $a\in A_i$ и $a \neq 0$. Тогда имеются следующие возможности: либо $\sigma(a) \neq 0$ и $\tau(a) = 0$, либо $\sigma(a) = 0$ и $\tau(a) \neq 0$, либо $\sigma(a) \neq 0$ и $\tau(a) = 0$, либо $\sigma(a) = 0$ и $\tau(a) \neq 0$, либо $\sigma(a) \neq 0$ и $\tau(a) \neq 0$. В первом случае положим $\varphi_i = \sigma\circ\rho_i$ и $B_i = Im\varphi_i$. Тогда φ_i – ненулевой гомоморфизм простого К-модуля A_i в B, откуда следует, что его ядро нулевое и он инъективен, так что его образ B_i изоморфен К-модулю A_i. Что касается гомоморфизма $\tau\circ\rho_i$, то его ядро ненулевое и ввиду простоты К-модуля A_i оно совпадает с A_i. Значит, $\tau\circ\rho_i = c_0$. Так как для каждого $a\in A_i$

$$a = \sigma(a) + \tau(a), \qquad (2.1.7)$$

то $a = \sigma(a)$, поэтому $B_i = A_i$ и тогда (2.1.4) следует из (2.1.5). Аналогично рассматривается второй случай. В третьем случае оба гомоморфизма $\sigma\circ\rho_i$ и $\tau\circ\rho_i$ являются изоморфизмами. В этом случае рассмотрим подмодули $Im(\sigma\circ\rho_i)$ и $Im(\tau\circ\rho_i)$. Оба они не могут содержаться в D, иначе ввиду (2.1.7) $A_i \subseteq D$ в противоречие с (2.1.6). Предположим, что

$$Im\,(\sigma\circ\rho_i) \not\subseteq D. \tag{2.1.8}$$

В этом случае положим $\varphi_i = \sigma\circ\rho_i$ и $B_i = Im\varphi_i$. Докажем сначала, что $B_i \in\Im(A)$. Это следует из того, что ввиду (2.1.3) и согласно замечанию 3.4.1 из главы I B_i является идеалом m-алгебры A как образ некоторой компоненты при прямом разложении (2.1.6) этой m-алгебры при естественной проекции его на компоненту другого разложения (2.1.2).

Докажем, что

$$B_i \cap D = 0. \tag{2.1.9}$$

Это следует из того, что ввиду простоты B_i (так как эта m-алгебра изоморфна A_i) если $B_i \cap D) \neq 0$, то $B_i \subseteq D$, что противоречит ((2.1.8). Значит, (2.1.9) выполняется. Отсюда благодаря следствию 2.2.2 гл. I получаем разложение

$$B_i + D = B_i \oplus D. \tag{2.1.10}$$

Из этого и из (2.1.6) вытекает, что $B_i \approx ((B_i + D)/D)$ − ненулевой идеал согласно второй теореме о гомоморфизмах и, так как $A_i \approx (A_i + + D)/D = A/D$ − простая m-алгебра, то $((B_i + D)/D) = (A/D)$, откуда следует, что $A = B_i + D = B_i \oplus D$, т. е. (2.1.4) выполняется.◊

Лемма 2. В предположениях и обозначениях леммы 1 пусть $m\in\mathbb{N}$ и $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subseteq I$. Тогда существуют изоморфизмы $\varphi_{i_j} : A_{i_j} \to B_{i_j}$, $j\in\{1, 2, \ldots, m\}$, каждый из которых равен либо $\sigma\circ\rho_{i_j}$, либо $\tau\circ\rho_{i_j}$, при этом

$$A = B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_m} \oplus \sum_{j\in I\setminus J}{}^{\oplus} A_j \,. \tag{2.1.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем последовательно использовать лемму 1. Именно, применяя эту лемму к индексу i_1, получаем равенство

$$A = B_{i_1} \oplus \sum_{j\in I\setminus J}{}^{\oplus} A_j \,. \tag{2.1.12}$$

Обозначим $D = \sum\limits_{j \in I \setminus J}^{\oplus} A_j$. Тогда из (2.1.1) и (2.1.12) следуют равенства

$$A = A_{i_1} \oplus D = B_{i_1} \oplus D. \tag{2.1.13}$$

Обозначим через π естественную проекцию A на D, а через ρ – естественное вложение D в A (относительно первого разложения К-модуля A в (2.1.13)). Положим $B_D = Im(\pi\circ\sigma\circ\rho)$, $C_D = Im(\pi\circ\tau\circ\rho)$. Покажем, что

$$D = B_D \oplus C_D. \tag{2.1.14}$$

Для этого предположим, что $d \in D$. Ввиду (2.1.2) имеем равенство

$$d = \sigma(d) + \tau(d). \tag{2.1.15}$$

С другой стороны, из первого разложения (2.1.13) следует, что для некоторых $a_B, a_C \in A_{i_1}$ и d_B, $d_C \in D$ выполняются равенства

$$\sigma(d) = a_B + d_B,\ \tau(d) = a_C + d_C . \tag{2.1.16}$$

Отсюда и из (2.1.15) следует равенство $d = (a_B + a_C) + (d_B + d_C)$ и согласно (2.1.13) $a_B + a_C = 0$ и $d = d_B + d_C$. Так как

$$d_B = (\pi\circ\sigma\circ\rho)(d),\ d_C = (\pi\circ\tau\circ\rho)(d), \tag{2.1.17}$$

то из этих рассуждений следует, что $D = B_D + C_D$. Покажем, что

$$B_D \cap C_D = 0. \tag{2.1.18}$$

В самом деле, пусть $d \in B_D \cap C_D$. Так как $\pi\circ\sigma\circ\rho\circ\pi\circ\sigma\circ\rho = \pi\circ\sigma\circ IdD\circ\sigma\circ\rho =$
$= \pi\circ\sigma\circ\sigma\circ\rho = \pi\circ\sigma\circ\rho$ и, аналогично, $\pi\circ\tau\circ\rho\circ\pi\circ\tau\circ\rho = \pi\circ\tau\circ\rho$, то подмодули B_D и C_D К-модуля D являются образами идемпотентных эндоморфизмов

$\pi\circ\sigma\circ\rho$ и $\pi\circ\tau\circ\rho$ соответственно, поэтому

$$d = (\pi\circ\sigma\circ\rho)(d) = (\pi\circ\tau\circ\rho)(d). \tag{2.1.19}$$

С другой стороны, привлекая разложения (2.1.16) и (2.1.17), имеем

$$\sigma(d) = a_B + d,\ \tau(d) = -a_B + d . \tag{2.1.20}$$

Но тогда из (2.1.16) следует, что $d = \sigma(d) + \tau(d) = 2d$, откуда следует, что $d = 0$. Следовательно, (2.1.18) выполняются. То, что B_D и C_D являются идеалами m-алгебры D, устанавливается так же, как и в доказательстве леммы 1 для B_i. Теперь (2.1.14) следует из (2.1.18) и из того, что $D =$
$= B_D + C_D$.

Далее, если $m > 1$, то $i_2 \in I \setminus \{i_1\}$ и, заменяя в лемме 1 A на D, B на B_D, C на C_D, приходим к разложению $D = B_{i_2} \oplus \sum\limits_{j \in I \setminus \{i_1, i_2\}}^{\oplus} A_j$ и $A = B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \sum\limits_{j \in I \setminus \{i_1, i_2\}}^{\oplus} A_j$. Действуя таким же образом, приходим к разложению (2.1.11).◊

Лемма 3. В предположениях и обозначениях леммы 1 пусть m-алгебра B минимальна в случае а) и проста в случае б). Тогда для некоторого $i \in I$ отображение $\sigma \circ \rho_i$ является изоморфизмом К-модуля A_i на B и

$$A = A_i \oplus C. \qquad (2.1.21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b \in B$ и $b \neq 0$. Положим $J =$

$= \{j \in I \mid \pi_j(b) \neq 0\}$. Согласно лемме 2 для каждого $j \in J$ существует под-m-алгебра $B_j \in SubA$ и изоморфизм $\varphi_j : A_j \to B_j$ такой, что либо

$\varphi_j = \sigma \circ \rho_j$, либо $\varphi_j = \tau \circ \rho_j$, а также

$$A = \sum_{j \in J}^{\oplus} B_j \oplus \sum_{i \in I \setminus J} A_i \ . \qquad (2.1.22)$$

Предположим, что для всех $j \in J$ выполняется возможность $\varphi_j = \tau \circ \rho_j$ В этом случае

$$0 = \tau(b) = \tau(\sum_{j \in J} \pi_j(b)) = \sum_{j \in J} (\tau \circ \rho_j)(\pi_j(b)) = \sum_{j \in J} \varphi_i(\pi_j(b)) \ ,$$

Отсюда ввиду (2.1.22) $\varphi_j(\pi_j(b)) = 0$ для любого $j \in J$ и так как все φ_j – изоморфизмы, то $\pi_j(b) = 0$, так что $b = 0$. Противоречие показывает, что существует индекс $j \in J$ такой, что $\varphi_j = \sigma \circ \rho_j$ Тогда $B_j = \sigma(A_j) \subseteq B$ и так как $B_j \trianglelefteq A$, а поэтому, а также ввиду минимальности или простоты m-алгебры B имеем равенство $B_j = B$. Отсюда следует, что $A = B_j \oplus C$. Заменяя теперь в рассуждениях доказательства леммы 1 D на C, A_i на B_j, B_i на A_j, приходим к равенству $A = A_j \oplus C$.◊

Теорема 1. Пусть

$$A = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i = \sum_{j \in J}^{\oplus} B_j \ – \qquad (2.1.23)$$

разложения m-алгебры A в прямую сумму семейств $\{A_i\}_{i \in I}$ и $\{B_i\}_{i \in J}$ под-m-алгебр. Будем рассматривать два случая :

а) m-алгебры A_i и B_j минимальны для всех $i\in I$ и $j\in J$;

б) m-алгебры A_i и B_j просты для всех $i\in I$ и $j\in J$.

Тогда в обоих случаях существует биекция $\gamma\colon I \to J$ такая, что для каждого $i\in I$ m-алгебры A_i и $B_{\gamma(i)}$ изоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3 каждое A_i изоморфно некоторому B_j и, обратно, каждое B_j изоморфно некоторому A_i. Введем теперь на каждом из множеств I и J свое отношение эквивалентности "$\sim$" по правилу : для $i_1, i_2\in I$ и $j_1, j_2\in J$

$$i_1 \sim i_2 \Leftrightarrow A_{i_1} \approx A_{i_2},\ j_1 \sim j_2 \Leftrightarrow B_{j_1} \approx B_{j_2}.$$

Для $i\in I$ через $\widehat{i}$ обозначаем класс эквивалентности отношения "$\sim$", содержащий элемент I, а через $\widehat{I}$ – фактормножество $I/\sim$. Аналогичные обозначения вводим для J. Определим теперь отображение $\Phi\colon \widehat{I} \to \overline{J}$ следующим образом : для $i\in I, j\in J$ $\Phi(\widehat{i}\,) = \widehat{j}$, если $A_i \approx B_j$. Докажем, что Φ – биекция. В самом деле, очевидно, что Φ – отображение. Далее, если i_1, $i_2\in I$ и $j\in J$, то из равенства $\Phi(\widehat{i_1}\,) = \widehat{j} = \Phi(\widehat{i_2})$ следует, что $A_{i_1} \approx B_j \approx A_{i_2}$, поэтому $A_{i_1} \approx A_{i_2}$ и $\widehat{i_1} = \widehat{i_2}$. Значит, Φ инъективно. Сюръективность Φ следует из того, что для каждого $j\in J$ существует $i\in I$ такой, что $A_i \approx B_j$ и $\Phi(\widehat{i}\,) = \widehat{j}$.

Далее зафиксируем произвольный индекс $i\in I$ и рассмотрим для него возможные случаи, связанные с мощностью класса эквивалентности $\widehat{i}$. Сначала предположим, что этот класс состоит из конечного числа элементов, скажем, $t = |\,\widehat{i}\,| \in \mathbb{N}$. Предположим, что $s\in\mathbb{N}$ и $E = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subseteq \Phi(\widehat{i}\,)$. Тогда по лемме 2 существует индекс $i_1\in\widehat{i}$ такой, что $A = \subseteq A_{i_1} \oplus \sum\limits_{j\in J\setminus\{j_1\}}{}^{\oplus} B_j$. Теперь если $s > 1$, то снова по лемме 2 существует индекс $i_1\in\widehat{i}$ такой, что $A = A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus \sum\limits_{j\in J\setminus\{j_1, j_2\}}{}^{\oplus} B_j$. Действуя таким же образом, приходим к тому, что существуют индексы $i_1, i_2, \ldots, i_s \in\widehat{i}$, для которых выполняется равенство $A = A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus \ldots A_{i_s} \oplus \sum\limits_{j\in J\setminus\{j_1, j_2\}}{}^{\oplus} B_j$. Отсюда следует, что $s \le t$, и поэтому $|\,\Phi(\widehat{i}\,)| \le |\,\widehat{i}\,| = t$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы убедиться в существовании биекции множества $\widehat{i}$ на $\Phi(\widehat{i})$. Так как разложения (2.1.23) равноправны, то достаточно доказать, что существует инъективное отображение из $\widehat{i}$ в $\Phi(\widehat{i})$. В случае конечного $\widehat{i}$ это уже доказано выше, так что в дальнейшем можно предполагать, что $\widehat{i}$ – бесконечное множество. Для каждого $j \in J$ обозначим через $\widetilde{\pi_j}$ естественную проекцию прямой суммы $A = \sum_{j\in J}{}^{\oplus} B_j$ на B_j. Теперь для любого $k \in I$ положим

$$E_k = \{j \in J \mid \tilde{\pi}_j \text{ индуцирует изоморфизм К-модуля } A_k \text{ на } B_j\}. \quad (2.1.24).$$

Мы утверждаем, что для каждого $k \in I$ множество E_k конечно. Действительно, предположим, что $a \in A_k$ и $a \neq 0$ и пусть $j \in E_k$. Тогда $\widetilde{\pi_j}(a) \neq 0$, иначе a попадает в ненулевое ядро гомоморфизма $\widetilde{\pi_j}$, пересечение которого с A_k является идеалом этой m-алгебры и ввиду простоты последней должно с ним совпадать. Но тогда $\widetilde{\pi_j}$ индуцирует на A_k нулевой гомоморфизм в B_j, что противоречит определению E_k. Итак, $\widetilde{\pi_j}(a) \neq 0$. Значит, индекс j попадает в множество $\Lambda_a = \{ l \in J \mid \widetilde{\pi_j}(a) \neq 0 \}$, которое должно быть конечным по определению прямой суммы. Следовательно, $E_k \subseteq \Lambda_a$ и является конечным множеством.

Далее будем доказывать равенство

$$\Phi(\widehat{i}) = \bigcup_{k\in\widehat{i}} E_k. \quad (2.1.25)$$

Для этого сначала займемся включением

$$\bigcup_{k\in\widehat{i}} E_k \subseteq . \Phi(\widehat{i}). \quad (2.1.26)$$

В самом деле, пусть $k \in \widehat{i}$ и $j \in E_k$. Сразу по определения отсюда следует, что $A_i \approx A_k \approx B_j$ и поэтому $j \in \Phi(\widehat{i})$. Значит, (2.1.26) выполняется. Для доказательства обратного включения предположим, что $j \in \Phi(\widehat{i})$. Тогда $A_k \approx B_j$ и согласно лемме 3 найдется индекс $k \in \widehat{i}$ такой, что естественная проекция $\widetilde{\pi_j}$ индуцирует изоморфизм К-модуля A_k на B_j. Так что согласно (2.1.24) $j \in E_k$. Равенство (2.1.25) доказано.

Обозначим через X_i дизъюнктное объединение $\sqcup\ \{ E_k \mid k \in \widehat{i} \}$ множеств E_k при $k \in \widehat{i}$. Из (2.1.25) следует, что существует вложение множества $\Phi(\hat{i})$ в X_i. Далее, поскольку множество E_k конечно, то оно вложимо в множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, поэтому существует инъективное отображение $\Phi(\hat{i})$ в множество $\mathbb{N} \times \hat{i}$, а последнее множество ввиду бесконечности $\hat{i}$ биективно отображается на $\hat{i}$. Отсюда вытекает, что существует инъективное отображение $\Phi(\hat{i})$ в множество $\hat{i}$, что и требовалось. Теорема доказана. ◊

Непосредственно из теоремы 1 вытекают следующие утверждения о строго приводимых и вполне разложимых m-алгебрах.

С л е д с т в и е 1. Любые два разложения строго приводимой m-алгебры в прямую сумму минимальных под-m-алгебр изоморфны в смысле теоремы 1.

С л е д с т в и е 2. Любые два разложения вполне приводимой m-алгебры в прямую сумму простых под-m-алгебр изоморфны в смысле теоремы 1. ◊

2.2. Инварианты строго приводимого К-модуля

Из следствия 2.1.1 и теоремы 1.3.3 следует, что для строго приводимых К-модулей можно ввести систему инвариантов. Именно пусть A – строго приводимый К-модуль и

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \quad - \qquad (2.2.1)$$

его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ неприводимых подмодулей. Введем обозначения :

$I_1 = \{ i \in I \mid A_i$ – обыкновенный К-модуль $\}$;

$I_2 = \{ i \in I \mid A_i$ – чистый К-модуль $\}$;

$I_3 = \{ i \in I \mid A_i$ – чистый К-модуль, $(A_i, +, \cdot)$ – кольцо с нулевым умножением, группа $(A_i, +)$ изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{Z}_{p_i}, +)$ вычетов по простому модулю $p_i\}$;

$I_4 = \{ i \in I \mid A_i$ – чистый К-модуль, $(A_i, +, \cdot)$ – простое поле, изоморфное полю $(\mathbb{Z}_{p_i}, +, \cdot)$ вычетов по простому модулю $p_i\}$.

Отметим, что согласно теореме 1.3.4 если $i, j \in I_4$ и $i \neq j$, то $p_i \neq p_j$, поэтому множество I_4 не более чем счетно. Далее положим для $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\beta_k = |I_k|. \qquad (2.2.2)$$

$$B_k = \begin{cases} \bigoplus\limits_{i\in I_k} A_i, & \text{если} \quad I_k \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad I_k = \varnothing; \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Кроме этого, через π_3 обозначаем мультимножество $\{ p_i \mid i\in I_3\}$ простых чисел – порядков аддитивных групп $(A_i, +)$, где $i\in I_3$. Соответственно через π_4 обозначаем множество $\{ p_i \mid i\in I_4\}$ простых чисел – порядков аддитивных групп $(A_i, +)$, где $i\in I_4$. Из формул (2.2.1) и (2.2.2) выводим разложения :

$$A = B_1 \oplus B_2 = B_1 \oplus B_3 \oplus B_4. \tag{2.2.4}$$

Подмодуль B_1 естественно называть *обыкновенной частью* К-модуля A, а $B_2 = B_3 \oplus B_4$ – его *чистой частью*. Если К-модуль A не является чистым, т. е. согласно (2.2.3) $\beta_1 > 0$, то по теореме 1.3.4 К-модуль B_1 разлагается в прямую сумму семейства экземпляров одного и того же неприводимого обыкновенного К-модуля, будем в этом случае обозначать его через A_1. Согласно теореме 9.4.1 из книги [39] К-модуль A_1 изоморфен фактормодулю естественного К-модуля ${}_{\text{К}}\text{К}$ по некоторому допустимому идеалу T кольца (К, +, ·). При этом если $\beta_1 > 1$, то A_1 – абелев К-модуль, т. е. идеал T должен удовлетворять следующему условию :

$$\forall x, y, z \in \text{К}((xy \in T) \,\&\, (x\circ y + x\circ z - x\circ(y+z) \in T)). \tag{2.2.5}$$

Что касается чистых подмодулей B_3 и B_4, то согласно теоремам 1.3.4 и 2.1.1 они определяются с точностью до изоморфизма соответственно мультимножеством π_3 и множеством π_4, состоящих из простых чисел. Таким образом, мы получаем последовательность

$$(\beta_1, A_1, \pi_3, \pi_4), \tag{2.2.6}$$

удовлетворяющую следующим условиям

И1. β_1 – кардинальное число.

И2. A_1 есть К-модуль. При этом, если $\beta_1 = 0$, то $A_1 = \{0\}$, а если $\beta_1 > 0$, то A_1 – обыкновенный неприводимый К-модуль, изоморфный фактормодулю ${}_{\text{К}}\text{К}/T$, где T – допустимый идеал кольца (К, +, ·). Кроме того, если $\beta_1 > 1$, то A_1 – абелев К-модуль, т. е. для идеала T выполняется условие (2.2.5).

И3. π_3 – мультимножество, состоящее из простых чисел.

И4. π_4 – множество, состоящее из простых чисел.

В случае выполнения этих условий последовательность (2.2.6) назовем К-*допустимой* и если эта последовательность получена как выше исходя из разложения (2.2.1), то будем говорить, что К-модуль A и К-допустимая последовательность (2.2.6) *соответствут друг другу*. Если $(\beta_1, A_1, \pi_3, \pi_4)$ – допустимая последовательность, то соответствующий строго приводимый К-модуль A формируется следующим образом. Пусть I_1 – множество индексов мощности β_1 и $\{A_i\}_{i\in I_1}$ – семейство экземпляров К-модуля A_1. Далее, если $\pi_3 = \{ p_i \mid i \in I_3 \}$ и $\pi_4 = \{ p_i \mid i \in I_4 \}$, где $I_3 \cap I_4 = \varnothing$, то пусть для $i \in I_3$ A_i – такой чистый К-модуль, что аддитивная группа $(A_i, +)$ изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{Z}_{p_i}, +)$ вычетов по модулю p_i, а для $i \in I_4$ A_i – такой чистый К-модуль, что кольцо $(A_i, +, \cdot)$ изоморфно полю $(\mathbb{Z}_{p_i}, +, \cdot)$ вычетов по модулю p_i. Тогда К-модуль

$$A = \sum_{i\in I_1}{}^{\oplus} A_i \oplus \sum_{i\in I_3}{}^{\oplus} A_i \oplus \sum_{i\in I_4}{}^{\oplus} A_i \qquad (2.2.7)$$

строго приводим и соответствует допустимой последовательности (2.2.6).

Две К-допустимые последовательности $(\beta_1, A_1, \pi_3, \pi_4)$ и $(\tilde{\beta}_1, \tilde{A}_1, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4)$ считаются *эквивалентными*, если выполняются следующие условия.

Е1) $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$;

Е2) К-модули A_1 и $\tilde{A}_1$ изоморфны;

Е3) между индексами мультимножеств π_3 и $\tilde{\pi}_3$, а также между индексами множеств π_4 и $\tilde{\pi}_4$ можно установить такие взаимно-однозначные соответствия, что соответствующие простые числа равны. Из теоремы 2.1.1 получаем.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы два строго приводимых К-модуля были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им К-допустимые последовательности были эквивалентны. ◊

Это означает, что К-допустимая последовательность (2.2.6), соответствующая строго приводимому К-модулю A, является его полной системой инвариантов, поэтому в дальнейшем будем также называть эту К-допустимую последовательность *системой инвариантов* К-*модуля* A.

2.3. Инварианты строго приводимого *m*-кольца

Из следствия 2.1.2 и теоремы 1.3.4 следует, что также и для строго приводимых *m*-колец можно ввести систему инвариантов. Именно, пусть A – строго приводимое *m*-кольцо и

$$A = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i \quad - \tag{2.3.1}$$

его разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных *m*-колец. Заметим, что всякое абелево минимальное *m*-кольцо имеет вид $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot, \circ)$, где $(\mathbb{Z}_p, +)$ – группа вычетов по простому модулю p и $\mathbb{Z}_p \cdot \mathbb{Z}_p = 0 =$ $= \mathbb{Z}_p \circ \mathbb{Z}_p$. Введем обозначения :

$I_1 = \{\, i\in I \mid A_i$ – *m*-кольцо, не изоморфное ни одному из *m*-колец A_j, где $j\in I \setminus \{i\} \,\}$.

$I_2 = \{\, i\in I \mid A_i$ – *m*-кольцо, изоморфное некоторому из *m*-колец A_j, где $j\in I \setminus \{i\} \,\}$.

Для $i\in I_2$

$$p_i - \text{ порядок группы } (A_i, +),\ \pi = \{p_i\}_{i\in I_2}\,. \tag{2.3.2}$$

Далее положим для $k\in\{1, 2\}$

$$B_k = \begin{cases} \sum\limits_{i\in I_k}{}^{\oplus} A_i, & \text{если} \quad I_k \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad I_k = \varnothing; \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Из формул (2.3.1) и (2.3.3) выводим разложение :

$$A = B_1 \oplus B_2. \tag{2.3.4}$$

Теперь *m*-кольцу A ставим в соответствие последовательность

$$(I_1, \{A_i\}_{i\in I_1},\ I_2, \pi), \tag{2.3.5}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

К1). $I_1 \cup I_2 \neq \varnothing$.

К2). Если $I_1 = \varnothing$, то $\{A_i\}_{i\in I_1}$ – пустое семейство. Если $I_1 \neq \varnothing$, то $\{A_i\}_{i\in I_1}$ – семейство попарно не изоморфных минимальных *m*-колец, не изоморфных ни одному из абелевых *m*-колец мощности p_i для $i \in I_2$.

К3). Если $I_2 = \varnothing$, то π – пустое семейство. Если $I_2 \neq \varnothing$, то $\pi = \{p_i\}_{i \in I_2}$ – семейство (мультимножество) простых чисел.

В случае выполнения этих условий последовательность (2.3.5) назовем *m-допустимой* и если эта последовательность получена как выше исходя из разложения (2.3.1), то будем говорить, что m-кольцо A и m-допустимая последовательность (2.3.5) *соответствуют друг другу*. Если (2.3.5) – m-допустимая последовательность, то соответствующее строго разложимое m-кольцо A формируется следующим образом. Если $I_2 \neq \varnothing$, и $i \in I_2$, то пусть A_i – абелево m-кольцо мощности p_i. Далее пусть $A = B_1 \oplus B_2$, где m-кольца B_1 и B_2 определяются по формуле (2.3.3). Нетрудно убедиться, что A строго приводимое m-кольцо с соответствующей m-допустимой последовательностью (2.3.5).

Две m-допустимые последовательности $(I_1, \{A_i\}_{i \in I_1}, I_2, \pi)$ и $(\tilde{I}_1, \{\tilde{A}_i\}_{i \in \tilde{I}_1}, \tilde{I}_2, \tilde{\pi})$ считаются *эквивалентными*, если выполняется следующее условие:

Между множествами I_1 и $\tilde{I}_1$, а также I_2 и $\tilde{I}_2$, можно установить такие взаимно-однозначные соответствия, что (в случае не пустоты I_1) соответствующие минимальные m-кольца из семейств $\{A_i\}_{i \in I_1}$ и $\{\tilde{A}_i\}_{i \in \tilde{I}_1}$ изоморфны, и (в случае непустого I_2) соответствующие простые числа из семейств π и $\tilde{\pi}$ равны.

Из следствия 2.1.11 получаем.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы два строго приводимых m-кольца были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им m-допустимые последовательности были эквивалентны. ◊

Это означает, что m-допустимая последовательность (2.3.5), соответствующая строго приводимому m-кольцу A, является его полной системой инвариантов, поэтому в дальнейшем будем также называть эту допустимую последовательность *системой инвариантов строго приводимого m-кольца A*.

2.4. Модульно строго приводимые и модульно вполне разложимые *m*-кольца

В этом пункте рассмотрим вопрос, как влияет свойство разложимости естественного К-модуля $_{К}К$ в прямую сумму семейства неприводимых К-модулей на свойства самого m-кольца К и его остальных К-модулей.

Нуль-симметричное m-кольцо К будем называть *модульно строго приводимым* (*модульно вполне разложимым*), если естественный К-модуль $_{\text{К}}\text{К}$ строго приводим (соответственно, вполне разложим). Для краткости в этом пункте первые будем называть *м. с. п.-m-кольцами*, а вторые – *м. в. р.-m-кольцами*.

Предложение 1. Пусть m-кольцо К модульно вполне разложимо. Тогда для каждого его К-модуля имеются три следующих возможности.

а) К-модуль A чист ;

б) К-модуль A идеально порождается неприводимыми обыкновенными подмодулями ;

в) К-модуль A является расширением своего идеала $\ll \text{К} \square A \gg$, идеально порожденного неприводимыми обыкновенными подмодулями при помощи чистого К-модуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что множество $\text{К} \square A$ является либо нулевым, либо объединением обыкновенных вполне разложимых подмодулей, каждый из которых разлагается в прямую сумму обыкновенных неприводимых подмодулей и тогда утверждение будет следовать из леммы 1.1.1. Для доказательства предположим, что $a \in A$ и $\text{К} \square a \neq 0$. Отметим, что отображение φ_a: $\text{К} \to \text{К} \square a$, где для $x \in \text{К}$ $\varphi_a(x) = x \square a$, является гомоморфизмом К-модуля $_{\text{К}}\text{К}$ на К-модуль $\text{К} \square a$. Согласно следствию 1.3.5 тогда этот последний вполне разложим как гомоморфный образ вполне разложимого К-модуля. Поэтому имеет место разложение $\text{К} \square a =$ $= \sum\limits_{i \in I}{}^{\oplus} A_i\,(\pi_i)$ К-модуля A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ неприводимых подмодулей. Покажем, что если $i \in I$ и $A_i \neq 0$, то A_i – обыкновенный К-модуль. В самом деле, тогда $0 \neq A_i = \pi_i(\text{К} \square a) = \text{К} \square \pi_i(a)$ и $\pi_i(a)$ – обыкновенный элемент. ◊

Приступим теперь к выяснению строения м. с. п.-m-колец. Пусть К – такое m-кольцо. В соответствии с рассмотрениями п. 1.3 для естественного К-модуля $_{\text{К}}\text{К}$ имеем разложение

$$_{\text{К}}\text{К} = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \tag{2.4.1}$$

в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ неприводимых подмодулей. Так как $\text{К} \circ A_i \subseteq A_i$, то каждое слагаемое A_i является под-m-кольцом m-кольца, инвариантным и стабильным справа и являющимся идеалом кольца $(\text{К}, +, \cdot)$. Кроме того, A_i как неприводимый К-модуль не содержит нетривиальных стабильных слева подколец кольца $(\text{К}, +, \cdot)$. В случае, если A_i – чистый К-модуль, то это – простое кольцо, поэтому его аддитивная группа имеет простой порядок и либо $(A_i, +, \cdot)$ – простое поле, либо $(A_i, \cdot)$ – нулевая полугруппа. Для исследования случая, когда A_i – обыкновенный К-модуль, воспользуемся теоремой 9.4.1 из книги [39].

Модульно неприводимым называем такое *m*-кольцо К, у которого естественный К-модуль $_{\text{К}}$К является неприводимым.

Лемма 1. Пусть К – модульно неприводимое *m*-кольцо. Тогда имеет место альтернатива :

а) o-полугруппа *m*-кольца К – нулевая, аддитивная группа (К, +) проста и полугруппа $(A_i, \cdot)$ – или нулевая, или группа с внешне присоединенным нулем;

б) o-полугруппа *m*-кольца К является идеальным расширением нулевой полугруппы S, состоящей из правых нулей полугруппы (К, $\circ$), при помощи левой группы $G^{(0)}$ с внешне присоединенным нулем, где

$$G = E\circ H \approx E \times H_e \ – \tag{2.4.2}$$

прямое произведение левой связки E, состоящей из правых единиц полугруппы (К, $\circ$), и максимальной подгруппы H_e этой полугруппы с идемпотентом $e\in E$. При этом еще для каждого ненулевого элемента $s\in S$ должен существовать многочлен $f(t)\in \mathbb{Z}[t]t$ такой, что $f(s)\in G$.

Обратно, если условие а) или условие б) выполняется, то К – модульно неприводимое *m*-кольцо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Выполнение условий а) или б) для К-модуля $_{\text{К}}$К следует из теоремы 9.4.1 книги [39].

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если для К выполняется а), то $|\text{К}| = p$, где p – простое число, поэтому К-модуль $_{\text{К}}$К не имеет нетривиальных подмодулей.

Теперь предположим, что выполняется условие б). Докажем, что $_{\text{К}}$К – неприводимый К-модуль. Для этого согласно лемме 9.2.1 [39] достаточно показать, что этот К-модуль строго циклический и, кроме того, чистая часть К-модуля $_{\text{К}}$К не содержит ненулевых подколец его редукта. Так как эта чистая часть совпадает с S, то это последнее условие совпадает с последним утверждением условия (б) относительно S. Теперь докажем строгую цикличность К-модуля $_{\text{К}}$К. Мы имеем равенство $\text{К} = G\cup S$. Если $a\in S$, то по определению S выполняется равенство $\text{К}\square a = 0$. Пусть теперь $a\in G$. Тогда согласно (2.4.2)

$$a = e_a\circ h_a \tag{2.4.3}$$

для некоторых $e_a\in E$ и $h_a\in H_e$. Пусть b – произвольный элемент из К. Положим $c = b\circ h_a^{-1}$, где h_a^{-1} – обратный элемент к h_a в группе H_e. Теперь, используя разложение (2.4.3) и то, что e_a и e – правые единицы полугруппы (К,$\circ$), выводим $b = b\circ e = b\circ h_a^{-1}\circ h_a = b\circ h_a^{-1}\circ e_a\circ h_a = b\circ h_a^{-1}\circ a\in \text{К}\square a.$

Следовательно, ${}_{\text{К}}\text{К}$ – строго циклический К-модуль, что и требовалось доказать. ◊

Далее будем предполагать, что К является м. с. п.-m-кольцом. Так как в этом случае К-модуль ${}_{\text{К}}\text{К}$ строго приводим, то мы можем обратиться к его инвариантам в соответствии с рассмотрениями п. 2.2. Мы имеем здесь разложения

$$ {}_{\text{К}}\text{К} = B_1 \oplus B_2 = B_1 \oplus B_3 \oplus B_4. \qquad (2.4.4)$$

где B_1 – обыкновенная часть, а $B_2 = B_3 \oplus B_4$ – чистая часть К-модуля ${}_{\text{К}}\text{К}$. Пусть $(\beta_1, A_1, \pi_3, \pi_4)$ – система инвариантов этого К-модуля. Выделим здесь три основных случая.

(i). $\beta_1 = 0, A_1 = 0, {}_{\text{К}}\text{К} = B_3 \oplus B_4$ – чистый К-модуль.

(ii) $\beta_1 = 1$, $B_1 = A_1$ – обыкновенный неприводимый строго циклический К-модуль.

(iii) $\beta_1 > 1$,

$$B_1 = \sum_{i\in I_1}{}^{\oplus} A_i \quad – \qquad (2.4.5)$$

прямая сумма экземпляров абелева неприводимого обыкновенного К-модуля A_1, где $\beta_1 = |\, I_1 \,|$.

Во всех случаях $B_2 = \sum\limits_{i\in I_3}{}^{\oplus} A_i \oplus \sum\limits_{j\in I_4}{}^{\oplus} A_j$ – прямая сумма простых

колец A_i с нулевым умножением и с числом элементов p_i, если $\pi_3 =$ $= \{\, p_i \mid i\in I_3 \,\}$ и $I_3 \neq \varnothing$, и простых полей A_j с числом элементов p_j, если $\pi_4 = \{\, p_j \mid j\in I_4 \,\}$ и $I_4 \neq \varnothing$. Если $\pi_3 \cup \pi_4 = \varnothing$, то $B_2 = 0$.

Лемма 2. Обыкновенная часть B_1 в разложении (2.4.4) является идеалом m-кольца К и в случае (ii) есть простое m-кольцо.

Доказательство. Так как m-кольцо К нуль-симметрично и B_1 есть компонента прямого разложения К-модуля ${}_{\text{К}}\text{К}$ в прямую сумму идеалов, то B_1 является стабильным слева идеалом кольца (К, +, ·). Для доказательства того, что B_1 является идеалом m-кольца К, надо доказать, что B_1 инвариантен справа, т. е. $B_1 \circ \text{К} \subseteq B_1$. Для этого предположим, что $a \in B_1$ и b – произвольный элемент из К. Тогда в соответствии с первым равенством (2.4.4) $b = b_1 + b_2$ для некоторых $b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2$. Используя свойства прямой суммы К-модулей и то, что B_2 – чистый К-модуль, получаем

$$a\circ b = a \,\square\, (b_1 + b_2) = a \,\square\, b_1 + a \,\square\, b_2 = a \,\square\, b_1 + 0 = a \,\square\, b_1 \in B_1.$$

Следовательно, $B_1 \in \mathfrak{I}(\text{К})$.

Если теперь $\beta_1 = 1$, то B_1 – неприводимый К-модуль, поэтому не имеет нетривиальных стабильных слева идеалов кольца $(B_1, +, \cdot)$ и тем более идеалов m-кольца $(B_1, +, \cdot, \circ)$. ◊

Случай (iii) требует особенного внимания и в связи с этим приведем некоторую конструкцию.

Пусть $(A, +, \cdot)$ – некоторое ассоциативное кольцо, $\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство экземпляров этого кольца. Для $i, j \in I$ зафиксируем изоморфизм $\varphi_{i,j}$ кольца A_i на кольцо A_j так, что если $i = j$, то $\varphi_{i,j} = IdA_i$. Далее, пусть

$$C = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i \; – \tag{2.4.6}$$

прямая сумма аддитивных групп $(A_i, +)$, $i\in I$. Введем на множестве C операцию умножения "$*$" по следующему правилу: пусть $c = \sum_{i\in I_1} a_i$ и $d = \sum_{j\in I_2} b_j$, где I_1, $I_2 \in FinI$ и для $i\in I_1$, $a_i\in A_i$, также для $j\in I_2$, $b_j\in A_j$. Тогда положим

$$c * d = \sum_{j\in I_2} \Big(\sum_{i\in I_1} \varphi_{i,j}\,(a_i) b_j\Big), \tag{2.4.7}$$

где для $j\in I_2$ действия в скобках в j-м слагаемом – это сложение и умножение в кольце A_j. Очевидно, эта операция определена корректно. Более того, имеет место

Лемма 3. Универсальная алгебра $(C, +, *)$ является ассоциативным кольцом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если отождествить все кольца семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ с кольцом A, то можно рассмотреть множество матриц над этим кольцом, строки и столбцы которых индексированы элементами множества I, и у которых все строки имеют лишь конечное число ненулевых элементов. Тогда сложение и умножение таких матриц можно определить так же, как обычное сложение и умножение матриц конечного порядка. В результате мы получим кольцо, которое будем обозначать через $\mathcal{M}_I(A)$. Рассмотрим его подмножество, состоящее из матриц с одинаковыми строками. Очевидно, что это подмножество является подкольцом кольца $\mathcal{M}_I(A)$. Это подкольцо будем обозначать через $A_{I\times I}$ и называть *матричной степенью кольца A с множеством индексов I*. Нетрудно видеть, что универсальная алгебра $(C, +, *)$, построенная выше, изоморфна кольцу $A_{I\times I}$. ◊

Обратимся теперь к рассмотрению случая (iii) разложения (2.4.1). Как показано в лемме 2, обыкновенная часть B_1 является идеалом m-кольца К и потому $(B_1, +, \cdot, \circ)$ есть m-кольцо. Так как все компоненты разложения (2.4.5) абелевы, то у них умножение – нулевое, а это свойство сохраняется в прямых произведениях. Следовательно, $B_1B_1 = 0$ и структура m-кольца $(B_1, +, \cdot, \circ)$ определяется структурой почтикольца $(B_1, +, \circ)$.

Лемма 4. В случае (iii) почтикольцо $(B_1, +, \circ)$ является кольцом. Каждая из компонент A_i в разложении (2.4.5) является минимальным правым идеалом кольца $(B_1, +, \circ)$, причем кольцо $(A_i, +, \circ)$ есть тело. Кольцо $(B_1, +, \circ)$ изоморфно матричной степени $(A_i)_{I_1\times I_1}$ этого тела.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разложение (2.4.5) и зафиксируем произвольный индекс $i\in I_1$. Так как $A_i\in StA = SuA$, то $A_i\circ A_i \subseteq \subseteq B_1\circ A_i \subseteq$ К$\circ A_i =$ К$\circ A_i$. Отсюда следует, что A_i является правым идеалом почтикольца $(B_1, +, \circ)$, а также почтикольца (К, +, $\circ$). Далее, так как A_i – абелев К-модуль, то он является стройным, поэтому для любых $a, b, c\in A_i$ $a\circ(b + c) = a\square(b + c) = a\square b + a\square c = a\circ b + a\circ c$. Следовательно, операция "$\circ$" дистрибутивна относительно сложения не только справа, но и слева, так что почтикольцо $(A_i, +, \circ)$ является кольцом. Покажем теперь, что m-кольцо $(A_i, +, \cdot, \circ)$ модульно неприводимо, т. е. естественный A_i-модуль ${}_{A_i}A_i$ неприводим. Действительно, если $a\in A_i$, то К$\square(A_i\circ a) =$ К$\circ(A_i\circ a) =$ (К$\circ A_i)\circ a \subseteq A_i\circ a$, поэтому подкольцо $A_i\circ a$ является подмодулем К-модуля A_i, поэтому в силу неприводимости последнего $A_i\circ a = A_i$ или $A_i\circ a = 0$. Значит, m-кольцо $(A_i, +, \cdot, \circ)$ модульно неприводимо и можно использовать лемму 1. Докажем сначала, что в обозначениях этой леммы $S = 0$. В самом деле, по определению S является правым аннулятором [27] кольца $(A_i, +, \circ)$ и потому подкольцом кольца $(A_i, +,\cdot)$. Из условия б) леммы 1 теперь следует, что $S = 0$. Таким образом, $A_i = G^{(0)}$ и полугруппа $(A_i, \circ)$ является левой группой. Если мы покажем, что связка E состоит из одного идемпотента, то эта полугруппа окажется группой с внешне присоединенным нулем и тем самым будет доказано, что кольцо $(A_i, +, \circ)$ является телом. Для доказательства предположим, что $e, f\in E$. Для любого $a\in A_i$ тогда имеем, используя то, что и f являются правыми единицами полугруппы $(A_i, \circ)$, $0 = a - a = a\circ e - a\circ f = = a\circ(e - f)$. Отсюда вытекает, что $e - f\in S = 0$ и $e = f$. Итак, кольцо $(A_i, +, \circ)$ является телом. Это приводит к тому, что A_i – минимальный правый идеал кольца $(B_1, +, \circ)$.

Остается показать, что это кольцо изоморфно матричной степени $(A_1)_{I_1\times I_1}$. Для этого обозначим через e_i единицу тела $(A_i, +, \circ)$. Пусть $i, j\in J_1$. Согласно лемме 1.3.5 элементы e_i и e_j является обыкновенными образующими соответственно для циклических К-модулей A_i и A_j, поэтому $A_i = К \square e_i$ и $A_j = К \square e_j$. Для каждого $a \in К$ положим

$$\varphi_{i,j}(a \circ e_i) = a \circ e_j. \qquad (2.4.8)$$

Докажем, что $\varphi_{i,j}$ есть изоморфизм кольца $(A_i, +, \circ)$ на кольцо $(A_j, +, \circ)$. В самом деле, согласно доказательству леммы 2.2.1 $\varphi_{i,j}$ есть изоморфизм К-модуля A_i на К-модуль A_j. Теперь надо доказать, что $\varphi_{i,j}$ является гомоморфизмом полугруппы $(A_i, \circ)$ в полугруппу $(A_j, \circ)$. Для этого предположим, что $a, b \in A_i$, тогда $a \circ e_i = a$, $b \circ e_i = b$, $b \circ e_j \in A_j$, поэтому $e_j \circ b \circ e_j = = b \circ e_j$. Благодаря этому и формуле (2.4.8) получаем

$$\varphi_{i,j}(a \circ b) = \varphi_{i,j}(a \circ b \circ e_i) = a \circ b \circ e_j = a \circ e_j \circ b \circ e_j =$$
$$= \varphi_{i,j}(a \circ e_i) \circ \varphi_{i,j}(b \circ e_i) = \varphi_{i,j}(a) \circ \varphi_{i,j}(b).$$

Итак, $\varphi_{i,j}$ есть изоморфизм колец. Отметим, что при $i = j$ будет $\varphi_{i,j} =$
$= IdA_i$.

Далее предположим, что $a, b \in B_1$. Тогда из разложения (2.4.5) следует, что $a = \sum_{i \in J_1} a_i$ и $b = \sum_{j \in J_2} b_j$ для некоторых $J_1, J_2 \in FinI_1$, где для $i \in J_1$ $a_i \in A_i$, также для $j \in J_2$ $b_j \in A_j$. Докажем равенство

$$a \circ b = \sum_{j \in J_2} \Big(\sum_{i \in J_1} \varphi_{i,j}(a_i) b_j\Big). \qquad (2.4.9)$$

В самом деле, используя формулу (2.4.8), свойства суперпозиции и идемпотентов получаем

$$a \circ b = \Big(\sum_{i \in J_1} a_i\Big) \circ \Big(\sum_{j \in J_2} b_j\Big) = \sum_{i \in J_1} \Big(\sum_{j \in J_2} a_i \circ b_j\Big) = \sum_{i \in J_1} \Big(\sum_{j \in J_2} a_i \circ e_j \circ b_j\Big) =$$
$$= \sum_{i \in J_1} \Big(\sum_{j \in J_2} \varphi_{i,j}(a_i \circ e_i) \circ b_j\Big) = \sum_{i \in J_1} \Big(\sum_{j \in J_2} \varphi_{i,j}(a_i) \circ e_i) \circ b_j\Big) =$$
$$= \sum_{i \in J_1} \Big(\sum_{j \in J_2} \varphi_{i,j}(a_i) \circ b_j\Big),$$

что и требовалось. Сравнивая это с формулой (2.4.7), приходим к тому, что кольцо $(B_1, +, \circ)$ изоморфно матричной степени $(A_i)_{I_1 \times I_1}$ тела $(A_i, +, \circ)$. ◊

Далее m-кольцо К называем *m-кольцом с нулевой суперпозицией*, если его естественный К-модуль $_К К$ чист, т. е. $К \circ К = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы m-кольцо К было модульно строго приводимым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

а) К есть m-кольцо с нулевой суперпозицией и с редуктом в виде прямой суммы колец – чистых К-модулей с системой инвариантов $(0, 0, \pi_3, \pi_4)$, где π_3 – мультимножество простых чисел, а π_4 – множество простых чисел;

б) К изоморфно прямому произведению модульно неприводимого m-кольца и m-кольца с нулевой суперпозицией, удовлетворяющего условию а);

в) К изоморфно прямому произведению матричной степени некоторого тела и m-кольца с нулевой суперпозицией, удовлетворяющего условию а).

Доказательство. Необходимость. Пусть К – модульно строго приводимое m-кольцо. Тогда для естественного К-модуля ${}_{\text{К}}\text{К}$ имеют место разложения (2.4.4) и выполняется один из случаев (i), (ii), (iii). В случае (i) имеем m-кольцо с нулевой суперпозицией, которое является прямым произведением семейства простых колец типа $(0, 0, \pi_3, \pi_4)$. В случае б) компонента B_1 – это неприводимое m-кольцо, причем согласно лемме 2 является идеалом m-кольца К. Предположим, что $B_2 \neq 0$ и пусть A_i, где $i \in I_2$, – одна из неприводимых компонент К-модуля B_2. Докажем, что A_i является идеалом m-кольца К, тогда разложения (2.4.4) К-модуля ${}_{\text{К}}\text{К}$ будут разложениями m-кольца К. Действительно, так как A_i есть компонента прямого разложения К-модуля ${}_{\text{К}}\text{К}$, то A_i является стабильным слева идеалом кольца (К, +, ·). Остается доказать инвариантность справа этого идеала. Для этого предположим, что $a \in A_i$, $b \in \text{К}$. Тогда из (2.4.4) следует существование таких элементов $c \in B_1$ и $d \in B_2$, что выполняется равенство

$$b = c + d. \tag{2.4.10}$$

Так как $B_1 \leq \text{К}$ и К-модуль B_2 чист, то

$$a \circ b = a \,\square\, (c + d) = a \,\square\, c + a \,\square\, d = a \,\square\, c + 0 = a \,\square\, c = a \circ c \in B_1.$$

Предположим, что $a \circ c \neq 0$. Тогда отображение $\psi_c : A_i \to B_1$, где для $x \in A_i$

$\psi_c(x) = x \circ c$, является ненулевым гомоморфизмом К-модулей и ввиду неприводимости К-модуля B_1 должно быть $A_i \circ c = \psi_c(A_i) = B_1$. С другой стороны, так как К-модуль A_i чист, имеем

$$\text{К} \,\square\, B_1 = \text{К} \,\square\, (A_i \circ c) = \text{К} \circ A_i \circ c = 0 \circ c = 0,$$

что противоречит обыкновенности К-модуля B_1. Противоречие показывает, что $a \circ b = 0 \in A_i$. Следовательно, $A_i \in StA$ и теперь по определению прямой суммы разложения (2.4.4) являются разложениями m-кольца К в прямую сумму идеалов.

Случай в) разбирается аналогично с использованием леммы 4.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для m-кольца A выполняется одно из условий а), б), в).

В случае а) К-модуль $_{K}K$ чист и имеет систему инвариантов $(0, 0, \pi_3, \pi_3)$, поэтому согласно теореме 1.3.4 К-модуль $_{K}K$ строго приводим и m-кольцо К модульно строго приводимо.

В случае б) m-кольцо К разлагается в прямую сумму идеалов B_1 и B_2, где B_1 является неприводимым m-кольцом и обыкновенным B_1-модулем, а B_2 есть чистый B_2-модуль с системой инвариантов $(0, 0, \pi_3, \pi_3)$. Отсюда следует, что $B_2 \Box B_1 = B_2 \circ B_1 = 0$, поэтому B_1 является неприводимым обыкновенным К-модулем, а так как $B_1 \Box B_2 = B_1 \circ B_2 = 0$, то B_2 есть чистый К-модуль. Далее, так как B_1 и B_2 являются стабильными слева идеалами кольца (К, +, ·), то К-модуль $_{K}K$ разлагается в прямую сумму идеалов B_1 и B_2 и имеет систему инвариантов $(1, B_1, \pi_3, \pi_4)$, т. е. имеет место случай (iii) м. с. п. m-кольца. Следовательно, m-кольцо К модульно строго приводимо.

Рассмотрим теперь случай в). Тогда как и выше, К-модуль $_{K}K$ разлагается в прямую сумму идеалов B_1 и B_2, где B_2 есть чистый модульно строго приводимый К-модуль с системой инвариантов вида $(0, 0, \pi_3, \pi_4)$. Отличие в том, что теперь m-кольцо B_1 является матричной степенью вида $((A_1)_{J_1\times J_1}, +, *)$, где кольцо $(A_1, +, \circ)$ есть тело и $\beta_1 = |J_1| > 1$ Покажем, что К-модуль B_1 разлагается в прямую сумму $\sum\limits_{i\in I_1}{}^{\oplus} A_i$ семейства $\{A_i\}_{i\in J_1}$ экземпляров одного и того же обыкновенного неприводимого абелева К-модуля A_1. То, что умножение в A_1 нулевое, следует из того, что в матричной степени умножение нулевое. Стройность этого К-модуля следует из дистрибутивности операции "$\circ$" относительно сложения. Пусть $i \in J_1$ и $a_i \in A_1$. Так как все строки матрицы из $(A_1)_{I_1\times I_1}$ одинаковы, то каждая такая матрица определяется последовательностью элементов какой-нибудь строки, скажем, $b = (b_j)_{j\in J_1}$, где $b_j \in A_1$. Тогда соответствующую матрицу обозначаем через M_b. Пусть $i \in J_1$ и $a_j \in A_1$. Элемент a_j задает последовательность $\bar{a}_i = (a_j)_{j\in J_1}$, где $a_j = 0$, если $j \neq i$. В качестве A_i рассматриваем тогда множество матриц вида $M_{\bar{a}_i}$. Тогда для всякой матрицы $M_b \in (A_1)_{I_1\times I_1}$ имеем $M_b \Box M_{\bar{a}_i} = M_b * M_{\bar{a}_i} = M_{\overline{b_i \circ a_i}}$. Отсюда следует, что A_i является B_1-модулем и, следовательно, К-модулем и подмодулем К-модуля ${}_{К}$К. Ввиду стабильности слева этот подмодуль есть идеал К-модуля ${}_{К}$К. Так как $(A_i, +, \circ)$ является телом, то для всякого ненулевого элемента $a \in A_i$ выполняется равенство $A_i = A_i \circ a$. Поэтому A_i является неприводимым К-модулем. То, что B_1 является прямой суммой подмодулей A_i, следует из того, что каждая матрица вида M_b единственным образом представляется в виде конечной суммы матриц вида $M_{\bar{a}_i}$. Значит, мы имеем строго приводимый К-модуль ${}_{К}$К с системой инвариантов $(\beta_1, A_1, \pi_3, \pi_4)$, так что этот К-модуль строго приводим.◊

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы два модульно строго приводимых m-кольца были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их системы инвариантов были эквивалентны.

Следующий пример показывает, что матричная степень тела не обязана быть простым m-кольцом.

Пример 1. Пусть $К = (\mathbb{Z}_2)_{2\times 2}$ − матричная степень двухэлементного поля $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ и пусть $B = \{M_{(0,0)}, M_{(1,1)}\}$. Покажем, что B является идеалом m-кольца К. В самом деле, согласно правилу (2.4.7) имеем $M_{(1,1)} + M_{(1,1)} = M_{(0,0)} \in B$, $M_{(1,1)} * M_{(1,1)} = M_{(0,0)} \in B$, $M_{(0,1)} * M_{(1,1)} = M_{(1,1)} \in B$, $M_{(1,0)} * M_{(1,1)} = M_{(1,1)} \in B$, поэтому B является под-m-кольцом m-кольца К и подмодулем К-модуля ${}_{К}$К. Далее, $M_{(1,1)} * M_{(0,1)} = M_{(1,1)} * M_{(1,0)} = M_{(0,0)} \in B$, поэтому B инвариантно справа. Далее,

$$M_{(1,0)} * (M_{(1,1)} + M_{(0,1)}) - M_{(1,0)} * M_{(0,1)} = M_{(1,0)} * M_{(1,0)} - M_{(1,0)} * M_{(0,1)} =$$
$$= M_{(1,0)} - M_{(0,1)} = M_{(1,1)} \in B,\ M_{(1,0)} * (M_{(1,1)} + M_{(1,0)}) - M_{(1,0)} * M_{(1,0)} =$$
$$= M_{(1,0)} * M_{(0,1)} - M_{(1,0)} * M_{(1,0)} = M_{(0,1)} - M_{(1,0)} = M_{(1,1)} \in B,$$
$$M_{(0,1)} * (M_{(1,1)} + M_{(0,1)}) - M_{(0,1)} * M_{(0,1)} = M_{(0,1)} * M_{(1,0)} - M_{(0,1)} * M_{(0,1)} =$$
$$= M_{(1,0)} - M_{(0,1)} = M_{(1,1)} \in B,\ M_{(0,1)} * (M_{(1,1)} + M_{(1,0)}) - M_{(0,1)} * M_{(1,0)} =$$
$$= M_{(0,1)} * M_{(0,1)} - M_{(0,1)} * M_{(1,0)} = M_{(0,1)} - M_{(1,0)} = M_{(1,1)} \in B.$$

Следовательно, B стабильно слева и является идеалом m-кольца К, которое, таким образом, не является простым m-кольцом.◊

§ 3. РЕШЕТКА ПОД-m-АЛГЕБР СТРОГО ПРИВОДИМОЙ m-АЛГЕБРЫ

В этом параграфе сосредоточим свое внимание на геометрических свойствах решетки $SubA$, где A – строго приводимая m-алгебра.

3.1. Максимальные под-m-алгебры

Наряду со свойством атомности решетки под-m-алгебр строго приводимой m-алгебры, установленной в лемме 1.3.2, существенным свойством этой решетки является коатомность, как показывает следующая

Теорема 1. Для того чтобы ненулевая m-алгебра A была строго приводимой, необходимо и достаточно, чтобы она был коатомной и чтобы любая его максимальная под-m-алгебра выделялась прямым слагаемым.

Для доказательства понадобится несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $B, C \in SubA$ и

$$A = B \oplus C. \tag{3.1.1}$$

тогда

$$B \in \mathcal{M}iA \Leftrightarrow C \in \mathcal{M}aA. \tag{3.1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \in \mathcal{M}i\,A$ и предположим, что $C \leq D < A$. Рассмотрим под- m-алгебру $B \cap D$. Если $B \cap D \neq 0$, то ввиду неприводимости B будет $B = B \cap D$ и $B \subseteq D$. Но тогда согласно (3.1.1) $A = B + C \subseteq D + D \subseteq D \subset A$, что невозможно. Остается случай $B \cap D = 0$. Так как согласно следствию 6.2.1 главы I под- m-алгебра C является дополнением по пересечению к B в A, то $C = D$. Следовательно, $C \in \mathcal{M}aA$. Обратно, пусть $C \in \mathcal{M}aA$, имеет место разложение (3.1.1) и пусть $0 < D \leq B$. Тогда $C \subseteq C + D$ и ввиду максимальности C либо $C = C + D$, либо $C + D = A$. В первом случае $D \subseteq B \cap C$, что противоречит (3.1.1). Во втором случае, так как согласно (3.1.1) и следствию 6.2.1 главы I под- m-алгебра B является аддитивным дополнением к C в A, то $B = D$. Итак, $B \in \mathcal{M}i\,A$. Соотношение (3.1.2) доказано.◊

Лемма 2. Пусть m-алгебра A коатомная и любая его ее максимальная m-алгебра выделяется прямым слагаемым. Тогда каждая ее минимальная под-m-алгебра выделяется прямым слагаемым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть предположения леммы относительно m-алгебры A выполняются и пусть $B \in \mathcal{M}iA$. Рассмотрим множество

$$\Gamma_B = \{ C \trianglelefteq A \mid B \cap C = 0 \}.$$

Ясно, что множество Γ_B индуктивно и имеет максимальный элемент, скажем, D. Положим $E = B + D$. Если $E \neq A$, то ввиду коатомности A существует под-m-алгебра $H \in \mathcal{M}aA$, содержащая E. При этом по предположению H должен выделяться прямым слагаемым, т. е. существует идеал $G \in \Im(A)$ такой, что

$$A = H \oplus G. \tag{3.1.3}$$

Так как $B \subseteq H$, то $B \cap G = 0$, поэтому $G \in \Gamma_B$. Далее, из $D \subseteq H$ и (3.1.3) следует, что

$$D \cap G = 0. \tag{3.1.4}$$

Из того, что $D \in \Gamma_B$ также следует равенство

$$D \cap B = 0. \tag{3.1.5}$$

Покажем, что

$$B \cap (D + G) = 0. \tag{3.1.6}$$

В самом деле, пусть $b \in B \cap (D + G)$. Отсюда следует, что для некоторых элементов $d \in D$ и $g \in G$ будет $b = d + g$. Это влечет $g = b - d \in B + D = E \subseteq H$. Но тогда согласно (3.1.3) $g \in H \cap G = 0$. Поэтому $g = 0$ и благодаря (3.1.5) $b = d \in D \cap B = 0$. Значит, равенство (3.1.6) выполняется. Из этого следует, что $D + G \in \Gamma_B$ и ввиду максимальности D должно быть $D = D + G$ и $G \subseteq D$. Но тогда согласно (3.1.4) $G = 0$ в противоречие с (3.1.3).

Остается возможность

$$B + D = A. \tag{3.1.7}$$

◀ Докажем, что $D \in \mathcal{M}aA$. В самом деле, так как $D \in \mathcal{M}a$, то $D \neq A$. Значит, ввиду коатомности A существует под-m-алгебра $H \in \mathcal{M}aA$, содержащая D. Отметим, что $H \trianglelefteq A$, так как ввиду максимальности под-m-алгебра H должна выделяться прямым слагаемым. Если $H \cap B \neq 0$, то ввиду минимальности B будем иметь включение $B \subseteq H$, что противоречит (3.1.7), поскольку тогда $A = B + D \subseteq H + H \subseteq H$, и придем к противоречию. Остается возможность $H \cap B = 0$ и тогда $H \in \Gamma_B$. Отсюда благодаря максимальности D в Γ_B вытекает, что $D = H \in \mathcal{M}aA$.

Теперь по предположению леммы существует под-m-алгебра $G \in SubA$ такая, что

$$A = D \oplus G. \tag{3.1.8}$$

Согласно лемме 1 тогда $G \in \mathcal{M}i\,A$. Из (3.1.7) и (3.1.8) получаем с использованием третьей теоремы о гомоморфизмах

$$B \approx B/0 = B/(D \cap B) \approx (B + D)/D = A/D = (G + D)/D \approx$$
$$\approx G/(D \cap G) = G/0 \approx G.$$

Итак, $B \approx G$. Обозначим $\pi_D : A \to D$ и $\pi_G : A \to G$ – естественные проекции прямой суммы (3.1.8). Тогда $\tilde{\pi}_G = \pi_G|_B : B \to G$ – гомоморфизм m-алгебры B в m-алгебру G. Если $\tilde{\pi}_G = c_0$, то ввиду равенства $\pi_D + \pi_G = IdA$ для каждого $b \in B$ имеем

$$b = \pi_G(b) + \pi_G(b) = \pi_D(b) + \tilde{\pi}_G(b) = \pi_D(b) \in D \cap B = 0,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $Im\tilde{\pi}_G \neq 0$, и ввиду минимальности G должно быть $\tilde{\pi}_G(B) = G$. Отсюда, так как B минимальна, следует, что $\tilde{\pi}_G$ – изоморфизм m-алгебры B на m-алгебру G. Далее рассмотрим гомоморфизм $\tilde{\pi}_D = \pi_D|_B : B \to D$. Ввиду минимальности B либо $Ker\tilde{\pi}_D = 0$, либо $Ker\tilde{\pi}_D = B$. В первом случае $\tilde{\pi}_D$ инъективен, и тогда $B = \tilde{\pi}_D(B) + \tilde{\pi}_G(B)$, причем $\tilde{\pi}_D(B) \cap \tilde{\pi}_G(B) = 0$. Но это противоречит минимальности B. Остается возможность $\tilde{\pi}_D = c_0$, и теперь для всякого $b \in B$ имеем $b = \tilde{\pi}_D(b) +$
$+ \pi_G(b) = \tilde{\pi}_D(b) + \tilde{\pi}_G(b) = \tilde{\pi}_G(b)$. Отсюда следует, что $B = G$. Значит, B выделяется прямым слагаемым.◊

Лемма 3. В предположениях леммы 2 m-алгебра A является атомной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуется доказать, что всякая ненулевая под-m-алгебра B содержит минимальную под- m-алгебру. Можно считать, что $B = \langle b \rangle$ для некоторого $b \in A$. Рассмотрим множество

$$\Gamma_b = \{\, C \trianglelefteq A \mid \langle b \rangle \cap C = \{0\}.$$

Ясно, что множество Γ_b индуктивно и имеет максимальный элемент, скажем, D. Повторяя рассуждения доказательства равенства (3.1.7) леммы 2 при $B = \langle b \rangle$, приходим к равенству

$$\langle b \rangle + D = A. \qquad (3.1.9)$$

Отсюда следует, что $D \neq A$ и по предположению существует идеал $H \in \mathcal{M}aA$, содержащий D, а для H существует идеал $G \in SubA$ такой, что

$$A = G \oplus H. \qquad (3.1.10)$$

При этом согласно лемме 1 $G \in \mathcal{M}i\,A$. Из (3.1.10) следует, что $b = g + h$, где $g \in G$, $h \in H$. Здесь $g \neq 0$, иначе $b = h \in H$, а тогда согласно (3.1.9) $A = < b > + D \subseteq H + H \subseteq H$, что приводит к противоречию. Если $h = 0$, то $b = g \in G$, и ввиду минимальности G должно быть $< b > = G$, т. е. $< b >$ содержит неприводимый подмодуль. Далее можем предполагать, что оба элемента g и h не равны нулю. Из $< b > \cap D = 0$, $D \in \Im(A)$ и (3.1.9) следует, что $A = < b > \rightthreetimes D$. Согласно лемме 2.3.1 главы I тогда должен существовать идемпотентный эндоморфизм m-алгебры A такой, что $Im\,\varepsilon = < b >$ и $Ker\,\varepsilon = D$. Этот эндоморфизм определяется как естественная проекция аддитивной группы $(A, +)$ на группу $(< b >, +)$, если первую рассматривать как прямую сумму групп $(< b >, +)$ и $(D, +)$. Далее, из (3.1.9) следует, что для некоторых однозначно определенных $b_1 \in < b >$ и $d \in D$ будет

$$g = b_1 + d. \tag{3.1.11}$$

При этом $b_1 = \varepsilon(g)$. Если предположить, что $b_1 = 0$, то из (3.1.11) сразу вытекает, что $g = d \in G \cap D = 0$, что противоречит тому, что $g \neq 0$. Следовательно, гомоморфизм $\varepsilon|_G : G \to < b >$ – ненулевой, и, так как m-алгебра G минимальна, то $Ker\varepsilon|_G = 0$, поэтому $\varepsilon|_G$ – инъективный гомоморфизм, и его образ оказывается требуемой минимальной m-алгеброй m-алгебры $< b >$.◊

Лемма 4. В предположениях леммы 2 для любой под-m-алгебры B К m-алгебры A

$$\vee \{ C \in SubB \mid C \propto B \} = B. \tag{3.1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $B \in SubA$ и $B \neq 0$.

Очевидно, в качестве B достаточно рассмотреть циклическую под-m-алгебру $< b >$ как и в доказательстве предыдущей леммы. Согласно этой лемме существует под-m-алгебра $C \propto < b >$. Если $C = < b >$, то (3.1.12) выполняется. Пусть теперь $C \neq < b >$. Так как C минимальна, то согласно

лемме 2 существует идеал $D \in \Im(A)$ такой, что

$$A = C \oplus D. \tag{3.1.13}$$

Отсюда получаем, что $b = c + d$ для некоторых $c \in C$ и $d \in D$, $d \neq 0$. Если $c = 0$, то $b \in D$, а тогда согласно (3.1.13) $< b > \cap C = 0$, что невозможно. Следовательно, $c \neq 0$ и ввиду минимальности C получаем равенство $C = < c >$. Отметим, что из (3.1.13) следует, что $C \in \Im(A)$, поэтому $< c > + < d > \in SubA$. Далее, мы имеем $d = b - c \in < b > + (-C) \subseteq < b > - < b > \subseteq < b >$, поэтому $< c > + < d > \subseteq < b >$. С другой стороны, из (3.1.13) следует, что операции m-алгебр, примененные к b, распространяются на компоненты c и d, поэтому $< b > \subseteq < c > + < d >$ и, значит, $< b > = < c > + < d >$. Если теперь

$< d > \,\propto\, < b >$, то процесс заканчивается. Иначе обозначаем c через c_1, d через d_1, и применяем к d_1 такие же рассуждения, как и выше к b. В результате получим существование элементов c_2 и d_2 таких, что $< d_1 > =$ $= < c_2> + + < d_2>$, $< c_2> \in \mathcal{M}iA$, $d_2 \neq 0$. Действуя далее таким же образом, приходим к трансфинитной последовательности ненулевых элементов b, d_1, d_2, …, d_{α}, $d_{\alpha+1}$, … и минимальных m-алгебр C, C_1, C_2, …C_{α}, $C_{\alpha+1}$, … таких, что $< b > = C + < d_1 >, < d_1 > = C_1 + < d_2 >, \ldots, < d_{\alpha} > = C_{\alpha} +$ $+ < d_{\alpha+1} >, \ldots$. Этот процесс должен закончиться, так как мощности ординалов, участвующих в этих последовательностях, не должна превосходить мощности подмодуля $< b >$. Следовательно, $< b >$ есть сумма под-m-алгебр C, C_1, C_2, … C_{α}, $C_{\alpha+1}$, … m-алгебры A, являющихся минимальными под-m-алгебрами . Таким образом, равенство (3.1.12) выполняется.◊

Теперь приступим непосредственно к доказательству теоремы 1.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть ненулевая m-алгебра A строго приводима. По определению тогда любая его максимальная под-m-алгебра выделяется прямым слагаемым. Докажем коатомность m-алгебры A. Пусть $B \in SubA$ и $B \neq A$. Согласно теореме 1.3.1 m-алгебра A вполне разложима, так что имеется разложение $A = \sum\limits_{i \in I} A_i$ m-алгебры A в сумму некоторого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ идеалов, являющихся минимальными m-алгебрами. Согласно лемме 1.3.3 существует такое $J \subset I$, что $A = B \oplus \sum\limits_{i \in J}^{\oplus} A_i$. Пусть $i_0 \in J$, и рассмотрим под-m-алгебру $C = B \oplus \sum\limits_{j \in J \setminus \{i_0\}}^{\oplus} A_j$. Тогда $A =$ $C \oplus A_{i_0}$, $B \subseteq C$, и по лемме 1 $C \in \mathcal{M}aA$. Таким образом, любая собственная под-m-алгебра m-алгебры A содержится в некоторой максимальной под-m-алгебре , т. е. решетка $SubA$ коатомна.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть m-алгебра A коатомна и любая ее максимальная под-m-алгебра выделяется прямым слагаемым. Согласно лемме 2 тогда любая ее минимальная под-m-алгебра выделяется прямым слагаемым и потому является идеалом m-алгебры A. Из леммы 4 следует, что всякая ненулевая под-m-алгебра есть сумма минимальных под-m-алгебр и, значит, является идеалом. Таким образом, A – гамильтонова m-алгебра, а так как согласно лемме 4 она представляется в виде суммы минимальных под-m-алгебр, то, применяя теорему 1.3.2, получаем, что A – строго приводимая m-алгебра.◊

3.2. Решетка под-m-алгебр строго приводимой m-алгебры как геометрическая решетка

Теорема 1. Пусть A – ненулевая строго приводимая m-алгебра. Тогда $SubA$ – модулярная геометрическая решетка. При этом выполняется одно из следующих утверждений.

А) $SubA$ – булева решетка и в случае $\mathcal{Z}$ = К-*Mod* имеет не более чем счетное множество атомов;

Б) $SubA$ – прямое произведение прямо неразложимых геометрических решеток;

В) $SubA$ – прямое произведение решеток типа А) и Б).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – ненулевая строго приводимая m-алгебра. Как уже отмечено в п. 1.1 $SubA$ – полная алгебраическая решетка. Согласно следствию 1.3.1 m-алгебра A гамильтонова, так что $SubA = \Im(A)$, и по следствию 1.1.1 главы I SubК – модулярная решетка. Далее, согласно теореме 1.3.1 m-алгебра A вполне разложима, т. е. имеется разложение

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \; – \qquad (3.2.1)$$

в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ минимальных под-m-алгебр, и согласно п.п.2.2, 2.3 это разложение определяется некоторой системой инвариантов. По следствию 1.3.8 решетка $SubA$ атомична. По определению строго приводимой m-алгебры каждый элемент решетки $SubA$ имеет дополнение, поэтому $SubA$ – решетка с дополнениями, а ввиду того, что $SubA = \Im(A)$, решетка $SubA$ модулярна, а значит, это – решетка с относительными до полнениями (теорема I.14 [5]). Следовательно, $SubA$ – модулярная геометрическая решетка. Далее доказательство теоремы будет продолжено в следующих пунктах, где рассматриваются случаи, связанные с особенностями систем инвариантов.

3.3. Случай не изоморфных минимальных компонент

Теорема 1. Если в разложении (3.2.1) нет изоморфных между собой различных компонент, то решетка $SubA$ булева и в случае $\mathcal{Z}$ = К-*Mod* .имеет не более чем счетное множество атомов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в разложении (3.2.1) компоненты A_i для различных индексов не изоморфны. Докажем, что решетка $SubA$ – с единственными дополнениями. В самом деле, пусть

B, C, $D \in SubA$, и C, D – это дополнения для B. Можно считать, что эти подмодули ненулевые. Тогда имеем

$$A = B \oplus C = B \oplus D. \tag{3.3.1}$$

Это означает (п. 3.6 гл. I), что идеалы C и D прямо подобны и согласно следствию 3.6.6 *ibid.*, что они центрально изоморфны. Покажем, что на самом деле $C = D$. Действительно, согласно теореме 1.3.1 под-m-алгебры B, C, D вполне разложимы, поэтому имеют место разложения

$$B = \sum_{j\in J}{}^{\oplus} B_j\ , C = \sum_{l\in L}{}^{\oplus} C_l\ , D = \sum_{k\in M}{}^{\oplus} D_k \tag{3.3.2}$$

этих под-m-алгебр в прямые суммы соответствующих семейств $\{ B_j \}_{j\in J}$, $\{ C_l \}_{l\in L}$, $\{ D_k \}_{k\in M}$ минимальных под-m-алгебр. Из (3.3.1) и (3.3.2) выводятся разложения m-алгебры A :

$$A = \sum_{j\in J}{}^{\oplus} B_j \oplus \sum_{l\in L}{}^{\oplus} C_l = \sum_{j\in J}{}^{\oplus} B_j \oplus \sum_{k\in M}{}^{\oplus} D_k\ . \tag{3.3.3}$$

Отсюда согласно теореме 2.1.1 следует, что подмодули из объединения семейств $\{ B_j \}_{j\in J}$ и $\{ C_l \}_{l\in L}$, а также из объединения семейств $\{ B_j \}_{j\in J}$ и $\{ D_k \}_{k\in M}$ попарно не изоморфны. Выберем некоторый индекс $k\in M$ и предположим, что $0 \neq d\in D_k$. Ввиду неприводимости D_k тогда $D_k = < d >$. Из (3.3.3) следует, что для некоторых $J_1 \in FinJ$, $L_1 \in FinL$ и элементов $b_j \in B_j$, $c_l \in C_l$, где $j\in J_1$, $l\in L_1$, имеет место равенство $d = \sum_{j\in J_1} b_j + \sum_{l\in L_1} c_l$. Если $\sum_{l\in L_1} c_l =$ $= 0$, то $d \in B$, что противоречит второму разложению (3.3.1) m-алгебры A. Так что $\sum_{l\in L_1} c_l \neq 0$ и для некоторого индекса $l\in L_1$ будет $c_l \neq 0$ и тогда соответствие $d \mapsto c_l$ индуцирует изоморфизм минимальной m-алгебры D_k на C_l. Если теперь $\sum_{j\in J_1} b_j \neq 0$, то, аналогично, для некоторого индекса $j\in J_1$ $b_j \neq 0$, и соответствие $d \mapsto b_j$ индуцирует изоморфизм m-алгебры D_k на B_j. Но это приводит к противоречию, так как m-алгебры C_l и B_j не должны быть изоморфны. Остается возможность $\sum_{j\in J_1} b_j = 0$, так что $D_k = < d > \subseteq C$.

Так как это верно для любого $k\in M$, то отсюда следует, что $D \subseteq C$. Меняя местами в этих рассуждениях D и C, приходим к тому, что $C \subseteq D$ и $C = D$, что и требовалось. Итак, модулярная решетка $SubA$ оказывается решеткой с единственными дополнениями и по теореме Биркгофа – фон-Неймана она дистрибутивна ([5], [30],…) и потому является булевой решеткой. То, что множество атомов в случае $\mathcal{Z}$ = К-*Mod* имеет не более, чем счетную мощность, следует из описания инвариантов п. 2.2., так как в данном случае в семействе $\{A_i\}_{i\in I}$ может быть только один обыкновенный неприводимый К-модуль, а мультимножество π_3 является множеством простых чисел, и множества π_3 и π_4 содержат каждое не более чем счетное множество простых чисел.◊

3.4. Случай обыкновенного К-модуля

Здесь рассмотрим ситуацию, когда строго приводимая m-алгебра A не является минимальной и разлагается в прямую сумму изоморфных между собой минимальных под-m-алгебр. Основной случай − когда $\mathfrak{Z}$ = К-*Mod* и A – обыкновенный К-модуль. Это означает, что в системе инвариантов (2.2.6) $\beta_1 > 1$, $\pi_3 = \varnothing$ и $\pi_4 = \varnothing$. В соответствии с п. 2.1 имеем разложение К-модуля A в прямую сумму (3.2.1) семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ экземпляров К-модуля A_1, который изоморфен фактормодулю естественного К-модуля $_{К}$К по некоторому допустимому идеалу T кольца (К, +, ·). Ввиду $\beta_1 > 1$ A_1 – абелев К-модуль, т. е. идеал T должен удовлетворять следующему условию :

$$\forall x, y, z \in К((xy \in T)\ \&\ (x\circ y \pm x\circ z - x\circ(y \pm z)\in T)). \qquad (3.4.1)$$

В соответствии с п. 9.4 [39] выпишем условия, чтобы идеал T кольца (К, +, ·) был допустимым.

Т1) $T \neq К$;

Т2) T – идеал кольца (К, +, ·), стабильный слева, т. е. выполняется условие :

$$\forall a \in T\forall x, b \in К\ (x\circ(a + b) - x\circ b\in T), \qquad (3.4.2)$$

и модулярным, т. е. для некоторого $e\in$К

$$\forall x \in К\ (x - x\circ e\in T); \qquad (3.4.3)$$

Т3) T – толстый идеал, т. е. множество F_T = (К ÷ T) = = { $x\in$К | К$\circ x \subseteq T$} не содержит подколец кольца (К, +, ·), не содержащихся в T;

Т4) так как m-кольцо К нуль-симметрично, то идеал T инвариантен слева, т. е.

$$К\circ T \subseteq T, \qquad (3.4.4)$$

и из трех условий (i), (ii), (iii) теоремы 9.4.1 [39] остаются два, т. е. либо

(i) T инвариантен справа и является максимальным среди инвариантных слева идеалов кольца (К, +, ·), либо

(ii) T не инвариантен справа и является максимальным среди инвариантных слева идеалов кольца (К, +, ·).

Для краткости смежный класс $x + T$, содержащий элемент $x\in$К, будем обозначать через $\overline{x}$, фактормодуль $К/T$ – через $\hat{\overline{Ê}}$, а также для любого подмножества $X \subseteq К$ его образ $\{ \overline{x} \mid x\in X \}$ при естественном гомоморфизме ν_T: К $\to$ К$/T$ обозначаем через $\overline{X}$. Если $x, y\in$К, то действие элемента x на $\overline{y} \in \hat{\overline{Ê}}$ выполняется следующим образом :

$$x \square \overline{y} = \overline{x \circ y} = x\circ y + К. \quad (3.4.5)$$

Далее, согласно лемме 1.3.5 всякий ненулевой элемент обыкновенного неприводимого абелева К-модуля является обыкновенным, поэтому, применяя это к К-модулю $\hat{\overline{Ê}}$, имеем

$$\forall x \in К \setminus T \,(\, К \square \overline{x} = \overline{К} \,), \quad (3.4.6)$$

Расписывая это более подробно, имеем

$$К \setminus T \;\forall y \in К \;\exists z \in К \,(\, z\circ x - y\in T \,). \quad (3.4.7)$$

Из условия (3.4.3) также имеем

$$\forall x \in К \,(\, x \square \overline{e} = \overline{x \circ e} = \overline{x} \,). \quad (3.4.8)$$

Из этого и из (3.4.4) получим

$$e \notin T. \quad (3.4.9)$$

Рассмотрим в этой ситуации отношение “~”, задаваемое по правилу : для $x, y\in$К

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall z \in К \,(\, z\circ x\in T \Leftrightarrow z\circ y\in T \,). \quad (3.4.10)$$

Ясно, что “~” есть отношение эквивалентности. Следующая лемма показывает, что соответствующее разбиение включает в себя разбиение кольца К на смежные классы по идеалу T.

Лемма 1. Пусть $x, y\in$К. Тогда выполняются следующие свойства.

а) $x \sim y \Rightarrow (\, x\in T \Leftrightarrow y\in T \,)$; (3.4.11)

б) $\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow x \sim y$; (3.4.12)

в) $x \sim y \Rightarrow \forall z \in К \,(\, z\circ x \sim z\circ y \,)$. (3.4.13)

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $x \sim y$. Предположим, что $x\in T$. Если

$y \notin T$, то благодаря (3.4.7) существует $z \in$ К, такой, что $\overline{z \circ y} = = \bar{e}$, и ввиду (3.4.9) $z \circ y \notin T$, а так как $x \sim y$, должно быть $z \circ x \notin T$. Однако это противоречит (3.4.4) и тому, что $x \in T$. Следовательно, $y \in T$. Меняя в этих рассуждениях x и y, приходим к тому, что $x \in T \Leftrightarrow y \in T$;

б) пусть $\bar{x} = \bar{y}$ и $z \in$ К. Тогда $x - y \in T$ и согласно (10.4.4) $z \circ (x - y) \in T$. Если $z \circ x \in T$, то благодаря (3.4.2) получим

$$z \circ y + T = z \circ (x - (x - y)) + T = z \circ x - z \circ (x - y)) + T \subseteq T + T + T \subseteq T,$$

поэтому $z \circ y \in T$. Так как x и y здесь равноправны, то приходим к тому, что $\forall z \in \text{К} \, (z \circ x \in T \Leftrightarrow z \circ y \in T)$ и, значит, согласно (3.4.10) $x \sim y$;

в) если $x, y, z \in$ К и $x \sim y$, то согласно (3.4.10) для любого $u \in$ К имеем $u \circ (z \circ x) = (u \circ z) \circ x \in T \Leftrightarrow (u \circ z) \circ y = u \circ (z \circ y) \in T$, поэтому $z \circ x \sim z \circ y$.◊

Из этой леммы следует, что эквивалентность "~" индуцирует на множестве $\hat{\overline{\text{Е}}}$ эквивалентность, которую тоже будем обозначать через "~", т. е. положим

$$\forall x, y \in \text{К}(\bar{x} \sim \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y) . \tag{3.4.14}$$

Из (3.4.13) тогда следует соотношение

$$\forall x, y \in \text{К}(\bar{x} \sim \bar{y} \Rightarrow z \square \bar{x} \sim z \square \bar{y}). \tag{3.4.15}$$

Рассмотрим теперь множество

$$\text{К}_1 = \{x \in \text{К} \mid T \circ x \subseteq T\}. \tag{3.4.16}$$

Лемма 2. Множество К_1 является под-m-кольцом m-кольца К, строго содержащим T и состоящим из двух классов эквивалентности "~" с представителями e и 0, т. е.

$$\text{К}_1 = \{x \in \text{К} \mid x \sim e \vee x \sim 0\}. \tag{3.4.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем (3.4.17). Пусть $x \in \text{К}_1$ и предположим, *ex adverso.*, что $x \not\sim 0$. Тогда согласно (10.4.12) $\bar{x} \neq \bar{0}$, т. е. $x \in T$. Предположим, что $z \in$ К и $z \circ x \in T$. Сначала рассмотрим возможность $z \notin T$. Введем в рассмотрение множество

$$H = \{ \bar{u} \mid u \in \text{К} , u \square \bar{x} = \bar{0} \}. \tag{3.4.18}$$

Так как $z \square \bar{x} = \overline{z \circ x} =$, то $H \neq \{ \bar{0} \}$. Очевидно, что $H \pm H \subseteq H$. Далее, если $u \in$ К и $\bar{u} \in H$, то согласно (3.4.18) $u \circ x \in T$ и благодаря (3.4.4) $\text{К} \circ u \circ x \subseteq T$. Поэтому $\text{К} \square H \subseteq H$. Воспользовавшись тем, что умножение на $\overline{\text{К}}$

нулевое, отсюда заключаем, что H – ненулевой подмодуль К-модуля $\overline{К}$, а тогда ввиду неприводимости последнего $H = \overline{К}$. Отсюда согласно (3.4.18) выводим, что $К\circ x \subseteq T$. Однако это противоречит лемме 1.3.5, согласно которой $\overline{x}$ должен быть обыкновенным элементом. Противоречие показывает, что $z\in T$. Из (1.4.3) тогда следует, что $z\circ e\in T$. Таким образом, приходим к соотношению $\forall z \in К\ (z\circ x\in T \Rightarrow z\circ e\in T)$. Обратно, пусть $z\in К$ и $z\circ e\in T$. Отсюда благодаря (3.4.3) вытекает, что $z\in T$, а тогда из того, что $x\in К_1$ по определению $К_1$ должно быть $z\circ x\in T$. Итак,
$\forall z \in К(z\circ x\in T \Leftrightarrow z\circ e\in T)$, т. е. $x \sim e$, и мы пришли к противоречию. Тем самым доказано, что $К_1$ содержится в правой части равенства (3.4.17).

Для доказательства обратного включения предположим, что $x\in К$, $x \sim 0$ или $x \sim e$. В первом случае из-за (3.4.11) $x\in T$ и благодаря (3.4.4) $T\circ x \subseteq T$ и, значит, $x\in К_1$. Во втором случае если $z\in T$, то согласно (3.4.3) $z\circ e\in T$, а тогда из $x \sim e$ по определению (3.4.10) вытекает, что $z\circ x\in T$. Мы заключаем, что $T\circ x \subseteq T$ и $x\in К_1$. Равенство (3.4.17) доказано. Отсюда и из (3.4.9), в частности, следует, что

$$(e\in К_1\setminus T) \ \&\ (К_1 \neq T). \qquad (3.4.19)$$

Теперь докажем, что $К_1$ есть под-m-кольцо m-кольца К. В самом деле, если $x, y \in К_1$ и $z\in T$, то согласно (3.4.16) и (3.4.1)
$z\circ x,\ z\circ y,\ z\circ x \pm z\circ y - z\circ(x \pm y)\in T$, откуда следует, что $z\circ(x \pm y)\in T$. Из этого вытекает, что $x \pm y\in К_1$. Далее, согласно (3.4.1) $x\,y\in T \subseteq К_1$. Используя (3.4.16) также имеем $T\circ(x\circ y) = (T\circ x)\circ y \subseteq T\circ y \subseteq T$, поэтому $x\circ y\in T$. Таким образом, $К_1$ является под-m-кольцом m-кольца К.◊

Напомним (п. 1.1 [39]), что для каждого $x\in К$ преобразование ψ_x : $y \mapsto y\circ x$ является эндоморфизмом кольца (К, +, ·). Более того, очевидно, что ψ_x – эндоморфизм естественного К-модуля $_КК$. Если $x\in К_1$, то этот эндоморфизм индуцирует эндоморфизм $\overline{\psi}_x$ К-модуля $\overline{К}$ по правилу : для $y\in К$

$$\overline{\psi}_x(\overline{y}) = \overline{\psi_x(y)} = \overline{y\circ x}\,. \qquad (3.4.20)$$

То, что $\overline{\psi}_x$ является отображением, следует из (3.4.16), так как если y_1, $y_2\in К$ и $\overline{y_1} = \overline{y_2}$, то $y_1 - y_2\in T$ и тогда ввиду того, что $x\in К_1$, имеем $y_1\circ x - y_2\circ x = (y_1 - y_2)\circ x\in T$, поэтому $\overline{y_1\circ x} = \overline{y_2\circ x}$. Далее, $\overline{\psi}_x$ является эндоморфизмом К-модуля $\overline{К}$, поскольку ψ_x – эндоморфизм К-модуля $_КК$.

Таким образом, мы имеем отображение $\overline{\psi} : К_1 \to End_К \overline{К}$, где для $x \in К_1$ $\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}_x$. Некоторые свойства этого отображения устанавливаются в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть $x, y \in К_1$. Тогда

а) $\overline{\psi}_x = \overline{\psi}_y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$; (3.4.21)

б) $\overline{\psi}_x \pm \overline{\psi}_y = \overline{\psi}_{x \pm y}$; (3.4.22)

в) $\overline{\psi}_x \circ \overline{\psi}_y = \overline{\psi}_{y \circ x}$. (3.4.23)

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $x, y \in К_1$. Предположим сначала, что $\overline{\psi}_x = \overline{\psi}_y$. По определению (3.4.20)

$$\overline{\psi}_x = \overline{\psi}_y \Leftrightarrow \forall\, z \in К(\, \overline{z \circ x} = \overline{\psi}_x(z) = \overline{\psi}_y(z) = \overline{z \circ y}\,) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, z \in К(z \circ x - z \circ y \in T).$$

Последнее благодаря (3.4.1) равносильно тому, что $\forall\, z \in К(\, z \circ (x - y) \in T.)$, т. е. $К \circ (x - y) \subseteq T$. Это согласно свойствам (3.4.6) и (3.4.4) возможно тогда и только тогда, когда $x - y \in T$ и, значит, тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \overline{y}$. а) доказано.

Для доказательства б) и в) снова предположим, что $x, y \in К_1$. Согласно лемме 2 имеем $x \pm y$, $y \circ x \in К_1$. Для произвольного $z \in К$ по формуле (3.4.20) с использованием (3.4.1) имеем

$$(\overline{\psi}_x \pm \overline{\psi}_y)(\overline{z}) = \overline{z \circ x} \pm \overline{z \circ y} = \overline{(z \circ x) \pm (z \circ y)} = \overline{z \circ (x \pm y)} =$$

$$= \overline{\psi}_{x \pm y}(\overline{z}),\ \overline{\psi}_{y \circ x}(\overline{z}) = \overline{z \circ (y \circ x)} = \overline{(z \circ y) \circ x} = \overline{\psi}_x(\overline{z \circ y}) =$$

$$= \overline{\psi}_x(\overline{\psi}_y(\overline{z})) = (\overline{\psi}_x \circ \overline{\psi}_y)(\overline{z}).$$

Значит, равенства (3.4.22) и (3.4.23) выполняются.◊

Из утверждений б) и в) этой леммы вытекает, что множество

$$U = \{\, \overline{\psi}_x \mid x \in К_1 \,\} \tag{3.4.24}$$

является подкольцом кольца эндоморфизмов группы $(\overline{К}, +)$. Из утверждения а) леммы 2 следует, что соответствие $\widetilde{\psi} : \overline{К}_1 \to U$, где для $x \in К_1$

$$\widetilde{\psi}(\overline{x}) = \overline{\psi}_x, \tag{3.4.25}$$

является биективным отображением. Из утверждения б) также следует, что это отображение есть изоморфизм группы $(\overline{К}_1, +)$ (как факторгруппы

группы $(К_1, +)$ по подгруппе $(T, +)$) на группу $(U, +)$. Отметим, что согласно лемме 1 универсальная алгебра $(К_1, +, \circ)$ является почтикольцом, а благодаря свойству (3.4.2) подгруппа $(T, +)$ является его идеалом. Благодаря свойству (3.4.1) факторпочтикольцо $(\overline{К}_1, +, \circ)$ почтикольца $(К_1, +, \circ)$ по этому идеалу является кольцом.

Лемма 4. Отображение $\widetilde{\psi}$ есть антиизоморфизм кольца $(\overline{К}_1, +, \circ)$ на кольцо $(U, +, \circ)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, y \in К_1$. Если иметь в виду уже установленные свойства соответствия $\widetilde{\psi}$, достаточно показать, что

$$\widetilde{\psi}(\overline{x}) \circ \widetilde{\psi}(\overline{y}) = \widetilde{\psi}(\overline{y} \circ \overline{x}). \tag{3.4.26}$$

Для этого, используя (3.4.25) и (3.4.24), имеем $\widetilde{\psi}(\overline{x}) \circ \widetilde{\psi}(\overline{y}) =$
$= \overline{\psi}_x \circ \overline{\psi}_y = \overline{\psi}_{y \circ x} = \widetilde{\psi}(\overline{y} \circ \overline{x})$, что и требовалось.◊

Лемма 5. Множество U состоит из всех эндоморфизмов К-модуля $\hat{\overline{Е}}$. При этом всякий ненулевой эндоморфизм является автоморфизмом. Имеет место соотношение :

$$\forall x \in К_1((\overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow \widetilde{\psi}(\overline{x}) \in Aut_{К}\overline{К}) \& (\overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \widetilde{\psi}(\overline{x}) = c_{\overline{0}}). \tag{3.4.27}$$

Кольцо $(U, +, \circ)$ так же, как и кольцо $(\overline{К}_1, +, \circ)$, является телом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in К_1$. Если $\overline{x} = \overline{0}$ и $z \in К$, то согласно (3.4.25), (3.4.21) и (3.4.25) получаем

$$\widetilde{\psi}(\overline{x})(\overline{z}) = \overline{\psi}_x(\overline{z}) = \overline{\psi}_0(\overline{z}) = \overline{z \circ 0} = \overline{0} = c_{\overline{0}}(z),$$

поэтому $\widetilde{\psi}(\overline{x}) = c_{\overline{0}}$. Пусть теперь $x \in К_1 \setminus T$. Тогда согласно лемме 2 $x \sim e$. Для $z \in К$ теперь с использованием (3.4.25), (3.4.20), (3.4.10) и (3.4.8), получим

$$\widetilde{\psi}(\overline{x})(\overline{z}) = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{\psi}_x(\overline{z}) = \overline{z \circ x} = \overline{0} \Leftrightarrow z \circ x \in T \Leftrightarrow z \circ e \in T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \in T \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{0}.$$

Следовательно, $Ker\,\widetilde{\psi}(\overline{x}) = \{\overline{0}\}$ и эндоморфизм $\widetilde{\psi}(\overline{x})$ инъективен. Более того, так как $\overline{x} \neq \overline{0}$, то согласно (3.4.6), (3.4.25) и (3.4.20) получим $\widetilde{\psi}(\overline{x})(\overline{К}) = \overline{\psi}_x(\overline{К}) = \overline{К \circ x} = К \square \overline{x} = \overline{К}$. Значит, $\widetilde{\psi}(\overline{x})$ сюръективен, биективен и является автоморфизмом К-модуля $\overline{К}$.

Следующий шаг состоит в доказательстве того, что любой эндоморфизм этого К-модуля имеет вид $\overline{\psi}_x$ для некоторого $x \in$ К$_1$. Для этого предположим, что $\psi \in End_{К}\,\overline{К}$. Это означает выполнение следующих условий : для любых $u, v \in$ К

E1) $\psi(\overline{u} \pm \overline{v}) = \psi(\overline{u}) \pm \psi(\overline{v})$;

E2) $\psi(\overline{u}\;\overline{v}) = \psi(\overline{u})\psi(\overline{v})$;

E3) $\psi(u \square \overline{v}) = u \square \psi(\overline{v})$.

Выберем $x \in$ К таким, что $\overline{x} = \psi(\overline{e})$, и докажем, что $x \in$ К$_1$. В самом деле, используя E3) и (3.4.8), для любого $t \in T$ получим

$$\psi(t \square \overline{e}) = \psi(\overline{t}) = \psi(\overline{0}) = \overline{0} = t \square \psi(\overline{e}) = t \square \overline{x} = \overline{t \circ x}.$$

Из этого следует, что $T \circ x \subseteq T$ и согласно (3.4.16) $x \in$К$_1$. Теперь для любого $z \in$ К с использованием (10.4.16), (3.4.20) и (10.4.24) получаем

$$\psi(\overline{z}) = \psi(\overline{z \circ e}) = \psi(z \square \overline{e}) = z \square \psi(\overline{e}) = z \square \overline{x} = \overline{z \circ x} = \overline{\psi}_x(\overline{z}) =$$

$$= \widetilde{\psi}(\overline{x})(\overline{z}).$$

Таким образом, $\psi = \widetilde{\psi}(\overline{x})$. Мы заключаем, что $End_{К}\overline{К} = Aut_{К}\overline{К} \cup \{c_{\overline{0}}\} = U$. Следовательно, кольцо $(U, +, \circ)$ и антиизоморфное ему кольцо $(\overline{К}_1, +, \circ)$, являются телами.◊

Тело $(\overline{К_1}, +, \circ)$ будем называть *телом, ассоциированным с* К-*модулем* $\overline{К}$.

З а м е ч а н и е 1. В случае когда допустимый идеал T инвариантен справа, т. е. когда он является идеалом m-кольца К, будет К$_1$ =
= $\{x \in$ К $\mid T \circ x \subseteq T\}$ = К и $\overline{К_1} = \overline{К}$. Здесь почтикольцо $(\overline{К}, +, \circ)$ является телом, антиизоморфным кольцу $End_{К}\overline{К}$.◊

З а м е ч а н и е 2. В случае когда A − чистый К-модуль, не являющийся неприводимым и все компоненты разложения (3.2.1) изоморфны между собой, тогда в соответствии с п. 2.2 компонента $(A_i, +, \cdot)$ – кольцо с нулевым умножением, группа $(A_i, +)$ изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{Z}_{p_i}, +)$ вычетов по простому модулю p_i. В случае $\mathcal{З} = \mathcal{K}_0$ ситуация аналогична, именно в соответствии с п. 2.3, если A − строго приводимое не минимальное m-кольцо с разложением (3.2.1) в прямую сумму изоморфных между собой минимальных под-m-колец, то каждая компонента $(A_i, +, \cdot, \circ)$ – абелево m-кольцо, т. е. умножение и суперпозиция − нулевые, а группа $(A_i, +)$ изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{Z}_{p_i}, +)$ вычетов по простому модулю p_i. В обоих этих случаях структура минимальной компоненты разложения (3.2.1) определяется структурой ее аддитивной группы $(\mathbb{Z}_{p_i}, +)$ для некоторого простого числа $p \in \pi_3$ Назовем это ситуацией (p) для m-алгебры A, а соответствующую минимальную m-алгебру обозначаем через $\mathbb{Z}_{p_i}$. Ввиду сказанного выше в дальнейшем понадобится также кольцо эндоморфизмов упомянутой выше группы $(\mathbb{Z}_{p_i}, +)$. Как известно, каждый эндоморфизм этой группы имеет вид $\varphi_k : z \mapsto zk$, где $z, k \in \mathbb{Z}_p$ и умножение происходит в поле $(\mathbb{Z}_p, +, \ )$ по модулю p. Таким образом, кольцо $End_{\mathrm{K}} \mathbb{Z}_p$ изоморфно полю вычетов $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ по модулю p, его также будем называть *телом*, *ассоциированным с* m*-алгеброй* $\mathbb{Z}_p$. В этом случае полугруппа $(\mathbb{Z}_p, \ )$ действует на $\mathbb{Z}_p$ 0-транзитивно [24], т. е. действие группы $(\mathbb{Z}_p^{\#}, \cdot)$ на $\mathbb{Z}_p$ имеет две орбиты : $\{0\}$ и $\mathbb{Z}_p^{\#}$.◊

В этом плане представляет интерес проследить за действием группы $Aut_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}$ в рассматриваемом выше случае обыкновенного неприводимого К-модуля $\overline{\mathrm{K}}$. Для $u, v \in \mathrm{K}$ будем писать $\overline{u} \approx \overline{v}$, если элементы $\overline{u}$ и $\overline{v}$ находятся на одной орбите действия группы $(Aut_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}, \circ)$, т. е.

$$\overline{u} \approx \overline{v} \Leftrightarrow \exists x \in \mathrm{K}_1 \setminus T\,(\overline{u} = \widetilde{\psi}(\overline{x})(\overline{v}) = \overline{v \circ x}). \qquad (3.4.28)$$

Напомним [23, 34]…, что действие группы G на множестве X называется регулярным, если для любых двух точек из X существует единственный элемент из G, переводящий первую точку во вторую. т. е. это действие транзитивно и стационарная подгруппа единична.

Предложение 1.

$$\forall u, v \in \mathrm{K}(\overline{u} \approx \overline{v} \Rightarrow \overline{u} \sim \overline{v}). \qquad (3.4.29)$$

Далее, действие группы $(Aut_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}, \circ)$ на множестве $\overline{\mathrm{K}} \setminus \{\overline{0}\}$ регулярно тогда и только тогда, когда идеал T инвариантен справа, тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}$, и тогда и только тогда, когда почтикольцо $(\overline{\mathrm{K}}, +, \circ)$ является телом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u, v \in \mathrm{K}$, $x \in \mathrm{K}_1 \setminus T$ и $\overline{u} = \overline{v \circ x}$. Если теперь z − произвольный элемент из К, то благодаря тому, что $\widetilde{\psi}(\overline{x}) \in Aut_{\mathrm{K}} \overline{\mathrm{K}}$, выводим

$$z\circ u\in T \Leftrightarrow \overline{z\circ u} = \bar{0} \Leftrightarrow z\Box\, \bar{u} = \bar{0} \Leftrightarrow z\Box\, \tilde{\psi}(\bar{x})(\bar{v}) = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\psi}(\bar{x})(z\Box\, \bar{v}) = \bar{0} \Leftrightarrow z\Box\, \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{z\circ v} = \bar{0} \Leftrightarrow z\circ v\in T.$$

По определению (3.4.14) это означает, что $\bar{u} \sim \bar{v}$. *Ergo*, (3.4.29) верно.

Пусть теперь действие группы $(Aut_{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{K}}, \circ)$ на множестве $\overline{\mathrm{K}}\setminus\{\bar{0}\}$ регулярно. Тогда из (3.4.29) следует, что для любого $u\in \mathrm{K}_1\setminus T$ $\bar{u} \sim \bar{e}$. Поэтому согласно (3.4.17) $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}$, что согласно замечанию 1 равносильно инвариантности справа кольца T. Предположим теперь что идеал T инвариантен справа. Тогда согласно замечанию 1 почтикольцо $(\overline{\mathrm{K}}, +, \circ)$ является телом. В этом случае группа $Aut_{\mathrm{K}}\overline{\mathrm{K}}$ действует на $\overline{\mathrm{K}}$ правыми сдвигами группы $(\overline{\mathrm{K}}\setminus\{\bar{0}\}, \circ)$, поэтому в этом случае полугруппа $(\overline{\mathrm{K}}, \circ)$ действует на $\overline{\mathrm{K}}$ 0-транзитивно , т. е. действие группы $(\overline{\mathrm{K}}\setminus\{\bar{0}\}, \circ)$ на $\overline{\mathrm{K}}$ имеет две орбиты : $\{0\}$ и $\overline{\mathrm{K}}\setminus\{\bar{0}\}$, а действие группы $(\overline{\mathrm{K}}\setminus\{\bar{0}\}, \circ)$ на множестве $\overline{\mathrm{K}}\setminus\{\bar{0}\}$ является правым регулярным представлением [16], [34],…, поэтому регулярно. Очевидно, то же самое можно сказать и о действии группы автоморфизмов m-алгебры $\mathbb{Z}_p$, о которой говорится в замечании 2.◊

Следующий пример показывает, что не всегда $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1$.

Пример 1. В качестве m-кольца $(\mathrm{K}, +, \ , \circ)$ рассмотрим множество $M_2(\mathbb{Z}_2)$ квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{Z}_2$ вычетов по модулю 2, где “+” – обычное сложение матриц, умножение “$\cdot$” – нулевое, а суперпозиция “$\circ$” совпадает с обычным умножением матриц. В качестве T рассмотрим левый идеал кольца матриц $M_2(\mathbb{Z}_2)$, состоящий из матриц с нулевым первым столбцом. Докажем, что T – допустимый идеал кольца $(\mathrm{K}, +, \cdot)$, удовлетворяющий условию (3.4.1). Действительно, так как T – левый идеал кольца матриц $M_2(\mathbb{Z}_2)$, то он является идеалом кольца $(\mathrm{K}, +, \cdot)$, инвариантным слева. Первый столбец матрицы $A\in \mathrm{K}$ обозначаем через $A^{(1)}$. То, что T стабилен слева, следует из того, что суперпозиция “$\circ$” дистрибутивна слева относительно сложения и инвариантности слева идеала T. Из этого же свойства дистрибутивности и того, что умножение “$\cdot$” – нулевое, следует выполнение условия (3.4.1). Далее, модулярность идеала T следует из того, что в качестве правой единицы e по модулю T можно взять единичную матрицу. Теперь докажем, что T – толстый идеал. Для этого рассмотрим множество $F_T = \{A\in \mathrm{K} \mid \mathrm{K}\circ A \subseteq T\}$ и докажем, что $F_T \subseteq T$. В самом деле, по определению $\mathrm{K}\circ F_T \subseteq T$, поэтому $F_T = E\circ F_T \subseteq T$, где E – единичная матрица. Наконец, T – максимальный среди инвариантных слева идеалов кольца $(\mathrm{K}, +, \cdot)$, так как T – максимальный среди левых идеалов кольца $M_2(\mathbb{Z}_2)$ согласно описанию левых идеалов полной матричной алгебры над полем (см., например, предложение 2, § 5, гл. VI [14]). Итак, T – допустимый идеал кольца (К, +,), удовлетворяющий условию (3.4.1). Осталось показать, что $К_1 \neq К$. Это следует из предложения 1, поскольку идеал T не инвариантен справа (не является правым идеалом кольца $M_2(\mathbb{Z}_2)$).◊

3.5. Под-*m*-алгебры прямого произведения семейства изоморфных минимальных *m*-алгебр

Пусть

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \ (\pi_i), \tag{3.5.1}$$

где $| I | > 1$, – разложение строго приводимой m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ экземпляров одной и той же минимальной m-алгебры, будем обозначать ее через A_1, т. е. либо $A_1 = \mathbb{Z}_p$ в ситуации (p) для A, где p − простое число, либо A_1 − это либо обыкновенный неприводимый абелев К-модуль вида $\overline{К} = К / T$, где T – допустимый идеал кольца (К, +,), удовлетворяющий условию (3.4.1). В последнем случае будем говорить, что A находится в ситуации (*). Как и раньше $\pi_i : \to A_i$ – естественная проекция прямой суммы. Задача в этом пункте состоит в описании минимальных под-m-алгебр m-алгебры A. Для этого предположим, что $B \propto A$. Тогда существует элемент $a \in A$ такой, что $B = \langle a \rangle$. Из (3.5.1) следует, что

$$a = \sum_{i \in I_a} \pi_i(a), \tag{3.5.2}$$

где $I_a = supp(a)$. Обратно, если a – ненулевой элемент из A, то вопрос о том, в каком случае порожденная им циклическая под-m-алгебра является минимальной, решается следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $a \in A$, $a \neq 0$, $B = \langle a \rangle$, и имеет место разложение (3.5.2). Для того, чтобы m-алгебра B была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\forall i, j \in I_a (\pi_i(a) \approx \pi_j(a)). \tag{3.5.3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $B \propto A$. Для каждого $i \in I_a$ рассмотрим гомоморфизм $\sigma_i = \pi_i|_B : B \to A_i$. Так как $\pi_i(a) \neq 0$, то ввиду минимальности B должно быть $Ker\sigma_i = 0$. С другой стороны, так как m-алгебра A_i минимальна, $Im\sigma_i = A_i$. Следовательно, σ_i – изоморфизм m-алгебр. Теперь для $i, j \in I_a$ положим $\sigma_{i,, j} = \sigma_i \circ \sigma_j^{-1}$ – изоморфизм m-алгебры A_j на m-алгебру A_i. Так как эти m-алгебры являются экземплярами одной и той же m-алгебры A_1, то можно считать, что $\sigma_{i,, j}$ есть автоморфизм этой m-алгебры. Обозначая ради краткости элемент $\pi_i(a)$ m-алгебры A_1 через a_i, имеем следующие свойства определенных выше автоморфизмов. Именно для $i, j, k \in I_a$

B1. $\sigma_{i,, i} = IdA_i$.

B2. $\sigma_{j,i} = \sigma_{i,j}^{-1}$.

B3. $\sigma_{i,j} \circ \sigma_{j,k} = \sigma_{i,k}$.

B4. $\sigma_{i,, j}(a_j) = a_i$.

Отсюда следует, что элементы a_i и a_j находятся на одной орбите действия группы $AutA_1$ на A_1, а, значит, выполняется соотношение (3.5.3).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть (3.5.3) выполняется. Это означает, что элементы a_i и a_j находятся на одной орбите действия группы $AutA_1$ на A_1^*.

Обратно предположим, что элемент a представлен в виде (3.5.2), где для $i, j \in I_a$ и существует автоморфизм $\sigma_{i,, j} \in AutA_1$ такой, что $\sigma_{i,, j}(a_j) = a_i$. Покажем, что $B = < a >$ является минимальной m-алгеброй. Для этого зафиксируем некоторый индекс $i_0 \in I_a$ и рассмотрим гомоморфизм $\sigma_{i_0}(a) = \pi_{i_0}|_B$ m-алгебры B в m-алгебру A_{i_0}. Докажем, что σ_{i_0} является изоморфизмом. В самом деле, так как $\sigma_{i_0}(a) = \pi_{i_0}(a) = a_{i_0} \neq 0$, то σ_{i_0} − ненулевой гомоморфизм, поэтому ввиду минимальности A_{i_0} имеем $\sigma_{i_0}(B) = A_{i_0}$. Это означает, что гомоморфизм σ_{i_0} сюръективен. Для доказательства инъективности сначала предположим, что A находится в ситуации (p), т. е. $A_{i_0} \approx \mathbb{Z}_p$ для некоторого простого числа p. Допустим, что x_{i_0} – такой элемент из К, что $\overline{x}_{i_0} = a_{i_0}$, а также пусть $b \in B$ и

$$b \in Ker\,\sigma_{i_0}. \tag{3.5.4}$$

Так как $B = < a >$, должен существовать терм $u(t)$ свободной m-алгебры $F(t)$ такой, что $b = u(a)$. Теперь, используя (3.5.2) и (3.5.4), имеем

$$0 = \pi_{i_0}(b) = \pi_{i_0}(u(a)) = u(\pi_{i_0}(a)) = u(a_{i_0}). \tag{3.5.5}$$

Предположим, что i − произвольный индекс из I_a. По предположению, существует изоморфизм σ m-алгебры A_{i_0} на A_i такой, что $\sigma(a_{i_0}) = a_i$.). Отметим, что ввиду нуль-симметричности m-кольца К и всех m-колец из $\mathcal{K}_0$ $u(0) = 0$. Используя это и (3.5.5), получаем $u(a_i) = u(\sigma(a_{i_0})) =$
$= \sigma(u(a_{i_0})) = \sigma(0) = 0$. Так как это верно для всех $i \in I_a$, то с помощью (3.5.2) выводим

$$b = u(a) = u(\sum_{i\in I_a}\pi_i(a)) = \sum_{i\in I_a}u(\pi_i(a)) = \sum_{i\in I_a}u(a_i) = \sum_{i\in I_a}0 = 0.$$

Следовательно, $Ker\,\sigma_{i_0} = 0$ и σ_{i_0} − изоморфизм. Так что B − минимальная под-m-алгебра. ◊

З а м е ч а н и е 1. В случае чистого К-модуля A, когда группа $(A, +)$ разлагается в прямую сумму простых p-групп для некоторого простого числа p, всякая циклическая ненулевая ее подгруппа является неприводимым К-модулем. Это следует из того, что экспонента этой группы равна p.◊

С л е д с т в и е 1. Все минимальные под-m-алгебры m-алгебры A изоморфны между собой.◊

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение выводится исходя из начала доказательства леммы 1, если иметь в виду, что все компоненты разложения (3.5.1) изоморфны между собой.◊

Лемма 2. Пусть A находится в ситуации (*) и как в лемме 1 B – циклический подмодуль К-модуля A. Тогда К-модуль B неприводим в том и только в том случае, когда для некоторого его образующего a компоненты его разложения (3.5.2) удовлетворяют условию:

$$\forall i \in I_a\,(\pi_i(a) \in \overline{K_1}^*). \qquad (3.5.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть К-модуль $B = К\,\square\, a$ –циклический. Как и в доказательстве леммы 1, для каждого $i \in I_a$ обозначаем $a_i = \pi_i(a)$ и пусть x_i – такой элемент из К, что $a_i = \overline{x_i}$. Предположим, что К-модуль B неприводим. Зафиксируем некоторый индекс $i_0 \in I_a$. Так как $\overline{x_{i_0}} \neq \overline{0}$, то благодаря условию (3.4.7) существует элемент $z \in К$ такой, что $e = z \circ x_{i_0}$. Следовательно, элемент $b = z\,\square\, a \in B$ не равен нулю и

$$\pi_{i_0}(b) = \pi_{i_0}(z\,\square\, a) = z\,\square\,\pi_{i_0}(a) = z\,\square\,\overline{x_i} = \overline{z \circ x_{i_0}} = \overline{e} \in \overline{K_1}^*. \qquad (3.5.7)$$

Ввиду неприводимости К-модуля B должно быть $B = К\,\square\, b$. Теперь согласно лемме 1 $\forall i, j \in I_b(\pi_i(b) \approx \pi_j(b))$. Согласно (3.4.28) тогда $\forall i \in I_b(\pi_i(b) \sim \pi_{i_0}(b) = \overline{e})$. По лемме 3.4.2 имеем $\forall i \in I_b(\pi_i(b) \in \overline{К_1}^*)$.

Обратно, пусть для образующего a К-модуля B выполняется условие (3.5.6). Так как согласно лемме 3.4.5 $(\overline{К}_1, +, \circ)$ есть тело, то из этого условия следует, что для произвольных $i, j \in I_a$ существует элемент $y \in К_1 \setminus T$ (зависящий, вообще говоря, от i и j), такой, что $\overline{x_i} \circ \overline{y} = \overline{x_j}$. В обозначениях п. 3.4 это означает,что $\overline{\psi}_y(\overline{x_i}) = \overline{x_j}$, а так как $\overline{\psi}_y \in Aut_К \overline{К}$, то $\overline{x_i} \approx \overline{x_j}$. Применяя теперь лемму 1, получаем, что К-модуль B неприводим.◊

Образующий a неприводимого К-модуля B, удовлетворяющий условию (3.5.6), будем называть *приведенным*. Таким образом, из леммы 2 следует, что всякий неприводимый подмодуль рассматриваемого обыкновенного К-модуля A обладает приведенным образующим. Опираясь на это, мы можем получить некоторое соответствие между неприводимыми подмодулями К-модуля A и орбитами действия группы $(\overline{К}_1^*, \circ)$ на некотором множестве. Именно, для каждого $i \in I$ обозначим через C_i – подгруппу группы $(A_i, +)$, соответствующую группе $(\overline{К}_1, +)$. Можно считать, что C_i – экземпляр этой группы. Далее, пусть C есть сумма всех этих групп в группе $(A_i, +)$. Тогда $C = \sum_{i \in I} {}^{\oplus} C_i$ – прямая сумма семейства групп $\{C_i\}_{i \in I}$. Для каждого $i \in I$ рассмотрим операцию $\odot_i : \overline{К}_1^* \times C_i \to C_i$, где для каждого $x \in К_1 \setminus T$ и $y_i \in К_1$ положим $\overline{x} \odot_i \overline{y_i} = \overline{x} \circ \overline{y_i}$. В этом случае по определению указанных операций

$$\overline{x} \odot_i \overline{y_i} = \overline{x} \circ \overline{y_i} = \overline{x \circ y_i} = x \Box \overline{y_i}. \tag{3.5.8}$$

Очевидно, мы имеем действия группы $(\overline{К}_1^*, \circ)$ на множествах C_i. Эти действия естественным образом распространяются на C по правилу : если $x \in К_1 \setminus T$ и для $i \in I$ $y_i \in К_1$, то положим

$$\overline{x} \odot \sum_{i \in I} \overline{y_i} = \sum_{i \in I} \overline{x} \odot_i \overline{y_i}. \tag{3.5.9}$$

При этом выполняются условия : для любых $x, y \in К_1 \setminus T$ и $c \in C$

$$\overline{x} \odot (\overline{y} \odot c) = (\overline{x} \circ \overline{y}) \odot c, \tag{3.5.10}$$

$$\overline{e} \odot c = c. \tag{3.5.11}$$

Это легко проверяется с использованием (3.5.8). Кроме того, из условия (3.4.1) вытекает, что для любого $x \in К_1 \setminus T$ и любых $a, b \in К_1$

$$\bar{x} \odot (a+b) = \bar{x} \odot a + \bar{x} \odot b\,. \qquad (3.5.12)$$

Отсюда следует, что группа $(\overline{К}_1, \circ)$ действует на группе $(C, +)$ автоморфизмами, т. е. соответствие $\bar{x} \mapsto \bar{x} \odot$ – является гомоморфизмом группы $(\overline{K}_1^{\,*}, \circ)$ в группу $Aut(C, +)$. Разбиение множества C на орбиты этого действия обозначаем через "ε", а фактормножество C/ε – через W.

Предложение 1. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством W и множеством $\mathcal{M}iA$ атомов решетки SuA (неприводимых подмодулей К-модуля A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \in \mathcal{M}iA$. Ясно, что B – циклический К-модуль, а согласно лемме 2 его образующую a можно подобрать так, что $a \in C^*$. Докажем, что для любых $a, b \in C^{\#}$ имеет место

$$К \square a = К \square b \Leftrightarrow a \varepsilon b. \qquad (3.5.13)$$

В самом деле, пусть $a = \sum\limits_{i \in I_a} \overline{x_i}$ и $b = \sum\limits_{j \in I_b} \overline{y_j}$, где $I_a, I_b \in FinI$ и для $i \in I_a$, $j \in I_b$

элементы x_i, x_j принадлежат $К_1 \setminus T$.

Предположим, что $a \varepsilon b$. Отсюда следует, что существует $z \in К_1 \setminus T$ такой, что $b = \bar{z} \odot a$. Это благодаря (3.5.8) и (3.5.9) приводит к тому, что $I_a = I_b$ и

$$\forall i \in I_a (\overline{y_i} = z \square \overline{x_i}), \qquad (3.5.14)$$

поэтому $b = z \square a \in К \square a$. Значит, $К \square b \subseteq К \square a$, и так как оба эти К-модули неприводимы, то

$$К \square a = К \square b, \qquad (3.5.15)$$

что и требовалось.

Пусть теперь равенство (3.5.14) выполняется для $a, b \in C^*$. Тогда существует $z \in К$ такой, что $b = z \square a$. Отсюда следует, что $I_b \subseteq I_a$. Меняя местами a и b, приходим к тому, что $I_a \subseteq I_b$ и $I_a = I_b$. Значит, верно соотношение (3.5.14). Если мы покажем, что $z \sim e$, то согласно лемме 3.4.2 $z \in К_1 \setminus T$, $\bar{z} \in \overline{K}_1^{\,*}$ и согласно (3.5.8) и (3.5.9) $b = \bar{z} \odot a$ и $a \varepsilon b$. Для этого воспользуемся тем, что согласно лемме 3.4.2 для любого $i \in I_a$ $x_i \sim e \sim y_i$. Используя (3.4.7) и (3.4.3) имеем для любого $u \in К$

$$u \in T \Leftrightarrow u \circ e \in T \Leftrightarrow u \circ y_i \in T. \qquad (3.5.16)$$

Ввиду (3.5.14) имеем $y_i - z\circ x_i \in T$ и так как $T \in St_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$, то $u\circ(y_i - z\circ x_i) \in T$ для любого $u\in\mathrm{K}$. Теперь благодаря свойству (3.4.1) $u\circ y_i - u\circ z\circ x_i - u\circ(y_i - z\circ x_i) \in T$, поэтому $u\circ y_i - u\circ z\circ x_i \in T$. Теперь, используя то, что $x_i \sim e$ и (3.5.16), имеем $u\circ y_i \in T \Leftrightarrow u\circ z\circ x_i \in T \Leftrightarrow u\circ z\ e \in T \Leftrightarrow u\circ z \in T$. Из этого вытекает согласно (3.4.10), что $e \sim y_i \sim z$ и по лемме (3.4.2) $z\in T$.◊

З а м е ч а н и е 2. В случае ситуации (p) для A для каждого $i \in I$ кольцо A_i есть экземпляр m-алгебры $\mathbb{Z}_p$. Тогда роль тела $(\hat{\bar{\mathrm{E}}}_1, +, \circ)$ играет поле $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, а роль группы C − аддитивная группа $A = \sum\limits_{i\in I}{}^{\oplus} A_i = C$. Группа $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$ действует на C умножением на компоненты, т. е. если $x \in \mathbb{Z}_\partial^*$, $a \in C$, то $x \odot a = \sum\limits_{i\in I_a} x\pi_i(a)$, где $I_a = supp(a)$ и $\pi_i : A \to A_i$ – естественные проекции прямой суммы. Снова множество орбит этого действия находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством атомов решетки $SubA$.◊

Продолжаем исследование случая прямой суммы (3.5.1) изоморфных неприводимых подмодулей К-модуля A (где $|I| > 1$) в направлении дальнейшего изучения свойств решетки $L = SubA$. Из материалов п. п.3.2 и 3.3 следует, что L – модулярная геометрическая решетка с относительными дополнениями. При данных предположениях можно сказать больше. Именно, имеет место

Предложение 2. Решетка L прямо неразложима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 1.2.2 гл. I достаточно доказать, что любые два атома решетки L имеют общее дополнение (т. е. перспективны). В качестве атомов здесь выступают минимальные подмодули К-модуля A. Отметим, что ввиду $|I| > 1$ должно быть $|\mathcal{M}i A| > 1$. Пусть $B, C \in \mathcal{M}i A$ и $B \neq C$. Положим $D = B + C$. Согласно следствию 1 существует изоморфизм, скажем, φ m-алгебры B на m-алгебру C. Положим $H = \{ b + \varphi(b) \mid b \in B \}$. Из доказательства леммы 1 видно, что H есть подмодуль К-модуля A, изоморфный B, $B \cap H = C \cap H = 0$ и $B + H = C + H = D$. Если теперь $D = A$, то из этого уже следует, что H − общее дополнение для B и C. При этом пусть теперь $D \neq A$. По определению строго приводимой m-алгебры существует под-m-алгебра $E \in SubA$ такая, что $D \cap E = 0$ и $D + E = A$. Нетрудно видеть, что

$$B \cap (H + E) = 0 = C \cap (H + E) \text{ и } B + (H + E) = A = C + (H + E).$$

Это значит, что $H + E$ − общее дополнение для B и C в A.◊

Из этого предложения и следствий 1.2.6 и 1.2.7 гл. I выводим

С л е д с т в и е 2. Решетка $ConL$ подпрямо неразложима. Ее сердцевиной является конгруэнция $\theta = \theta(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ − идеал решетки L, состоящий из конечно-порожденных подмодулей К-модуля A.◊

Вопрос состоит в том, является ли $\mathcal{F}$ стандартным идеалом? В этом случае $\mathcal{F}$ составляет в точности один θ-класс и (теорема 5, § 3, гл. III [11]) конгруэнция θ может быть записана в виде

$$\forall B, C \in L(B\theta C \Leftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} \ (D \vee (B \cap C) = B \vee C).$$

Ответ положителен, как показывает следующее

С л е д с т в и е 3. Идеал $\mathcal{F}$ решетки L является стандартным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как решетка L является решеткой с относительными, а потому и с интервальными дополнениями, то из теоремы 10, § 3, гл. III [11] тогда следует, что все конгруэнции решетки L стандартны, в частности, конгруэнция $\theta = \theta(\mathcal{F})$ стандартна. Это означает, что идеал $\mathcal{F}$ стандартен.◊

С л е д с т в и е 4. Идеал $\mathcal{F}$ является наименьшим ненулевым стандартным идеалом решетки L. Решетка L проста тогда и только тогда, когда A − конечно-порожденная m-алгебра, т. е. $|I| < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства следствия 2 видно, что решетка $ConL$ изоморфна упорядоченному по включению множеству стандартных идеалов решетки L. При этом наименьшая нетривиальная конгруэнция $\theta = \theta(\mathcal{F})$ соответствует наименьшему ненулевому стандартному идеалу $\mathcal{F}$. Второе утверждение следствия вытекает из того, что $\mathcal{F}$ состоит из всех конечно-порожденных под-m-алгебр m-алгебры A.◊

3.6. Доказательство теоремы 3.2.1

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 3.2.1. Пусть

$$A = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i \ \ (\pi_i) \ - \tag{3.6.1}$$

разложение строго приводимой m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ минимальных под-m-алгебры, соответствующее системе инвариантов $(\beta_1, A_1, \pi_3, \pi_4)$ в случае $\mathcal{Z} =$ К-Mod и $(I_1, \{A_i\}_{i \in I_1}, I_2, \pi)$ в случае $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$. Положим, как и раньше, $L = SubA$. Можно считать, что $|I| > 1$. Для каждого $l \in I$ положим $J_l = \{ j \in I \mid A_i \approx A_j \}$. Далее введем обозначения $\mathcal{J}^{(1)} = \{ l \in I \mid |J_l| = 1 \}$, $\mathcal{J}^{(2)} = \{ l \in I \mid |J_l| > 1 \}$. Если $l \in \mathcal{J}^{(2)}$, то в соответствии с предложением 3.5.2 идеал $\mathcal{F}_l$ решетки L, порожденный атомами A_i, где

$i \in J_l$, является прямо неразложимой решеткой. Выберем теперь из каждого множества J_l, где $l \in J^{(2)}$, по одному индексу и образуем множество $J^{(3)}$. Это множество не более чем счетно, так как туда может попасть только подмножество мультимножества π_3 или π_4 и, быть может, индекс обыкновенного неприводимого подмодуля из семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ в случае $\beta_1 > 1$. Далее, пусть $\mathcal{F}^{(1)}$ − идеал решетки L, порожденный ее атомами A_i, где $i \in J^{(1)}$. Согласно теореме 3.3.1 решетка $\mathcal{F}^{(1)}$ − булева и может быть порождена не более чем счетным множеством атомов. В случае $J^{(1)} = \varnothing$ полагаем $\mathcal{F}^{(1)} = \{0\}$.

Теперь докажем, что решетка L разлагается в прямое произведение семейства $\{\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{F}_l\}_{l \in J^{(2)}}$ упомянутых выше решеток. Это видно из доказательства теоремы Маеды (теорема 1.2.3 гл. I). В нашем случае L − модулярная геометрическая решетка и разложение ее в прямое произведение соответствует разбиению множества атомов $\mathcal{M}iA$, где в качестве отношения эквивалентности выступает отношение перспективности атомов, которое согласно теореме 6′, §3,гл.IV [11] является отношением эквивалентности. Для $l \in J^{(2)}$ любые два атома из семейства $\{A_i\}_{i \in J_l}$ перспективны согласно доказательству предложения 3.5.2. С другой стороны, если две под-m-алгебры B и C перспективны как атомы решетки L, то для некоторого $D \in L$ имеем $A = B \oplus D = C \oplus D$, поэтому $B \approx B \oplus D / D = C \oplus D / D \approx C$. Значит, атом A_i для $i \in J_l$ не перспективен ни одному из атомов A_j для $j \in I \setminus J_l$, а также атом A_i, где $i \in J^{(1)}$, не перспективен ни одному из других атомов. Согласно доказательству теоремы Маеды мы имеем разложение решетки L в прямое произведение семейства $\{\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{F}_l\}_{l \in J^{(2)}}$, что завершает доказательство теоремы 3.2.1.◊

3.7. Геометрические свойства решетки под-*m*-алгебр строго приводимой *m*-алгебры

Пусть m-алгебра A находится в ситуации (*) или (p) для некоторого простого числа p. Используем соответствующие обозначения п. п. 3.4 и 3.5. Так как решетка $L = SubA$ − геометрическая, то согласно лемме 1.2.2 гл. I с ней ассоциирована некоторая геометрия. В этом пункте исследуем связи между свойствами m-алгебры A и ассоциированной с ней геометрией. Так как решетка L модулярна, то эта геометрия является проективной и согласно лемме 1.2.6 гл. I ей соответствует проективное пространство (M, P), где множество точек $M = \mathcal{M}iA$ − множество атомов решетки L (множество минимальных под-m-алгебр m-алгебры A), множество P прямых состоит из под-m-алгебр вида $B + C$, где B и C − различные минимальные под-m-алгебры m-алгебры A. Так как согласно предложению 3.4.2 решетка L прямо неразложима, то в соответствии со следствием 1.2.8 гл. I она изоморфна решетке подпространств невырожденной проективной геометрии, т. е. в проективном пространстве (M, P) каждая прямая имеет не менее трех точек. Далее, так как m-алгебра A гамильтонова, то $SubA = \mathfrak{I}(A)$, поэтому согласно следствию 1.2.5 гл. I решетка L аргова. Следовательно, по теореме 1.2.7 *ibid.*, ассоциированная с ней геометрия удовлетворяет теореме Дезарга. Теперь из теоремы 1.2.8 *ibid.* получаем, что если $|I| > 2$, то существует единственное (с точностью до изоморфизма) тело D и единственное кардинальное число $\mathbf{m}$ такое, что L изоморфна решетке $L(D, \mathbf{m})$ подпространств векторного пространства $V(D, \mathbf{m})$ над телом D размерности $\mathbf{m}$. С другой стороны, как мы видели в п. 3.4, с К-модулем A ассоциировано тело $(\overline{K_1}, +, \circ)$ в ситуации (*) для m-алгебры A и являющимся простым полем $(\mathbb{Z}_p, +, \ )$ в ситуации (p). Вопрос состоит в том, как связаны между собой тело D и ассоциированное с A тело $(\overline{K_1}, +, \circ)$ или $(\mathbb{Z}_p, +, \ )$, а также кардинальные числа $\mathbf{m}$ и $|I|$. Ответ дается в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть $A = \sum\limits_{i\in I}^{\oplus} A_i\,(\pi_i)$, где $|I| > 2$, – разложение строго приводимой m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ экземпляров одной и той же минимальной m-алгебры, скажем, A_1. Пусть D' – ассоциированное с m-алгеброй A тело (т. е. в случае, когда $\mathcal{Z}$ = К-Mod и A – обыкновенный К-модуль, это – тело $(\overline{K_1}, +, \circ)$, построенное в п. 3.4, а в случае когда A − чистый К-модуль, или $\mathcal{Z} = \mathcal{K}_0$, это – поле $(\mathbb{Z}_p, +, \ )$, где $p = |A_1|$. Далее, пусть решетка $L = SubA$ изоморфна решетке $L(D, \mathbf{m})$ подпространств векторного пространства $V(D, \mathbf{m})$ над телом D размерности $\mathbf{m}$. Тогда $|I| = \mathbf{m}$ и тело D' изоморфно телу D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В изложенном в п. 1.2 гл. I способе построения тела D исходя из решетки L для определения операций сложения и умножения достаточно рассматривать точки на фиксированной прямой ℓ и произвольные две различные точки вне ее, поэтому можно ограничиться случаем, когда $|I| = 3$, т. е. можно считать, что $A = A_1 \times A_2 \times A_3$, где A_1, A_2, A_3 − экземпляры одной и той же минимальной под-m-алгебры m-алгебры A. Будем рассматривать ситуацию (*), когда $A_1 = \overline{K}$ − обыкновенный неприводимый К-модуль. В случае $A_1 = \mathbb{Z}_p$ рассуждения проводятся аналогично с заменой $\bar{e}$ на единицу поля $\mathbb{Z}_p$. Из леммы 3.5.2 следует, что в качестве образующих неприводимых подмодулей К-модуля A можно брать тройки вида $(\bar{x}, \bar{0}, \bar{0})$, $(\bar{0}, \bar{x}, \bar{0})$, $(\bar{0}, \bar{0}, \bar{x})$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{0})$, $(\bar{x}, \bar{0}, \bar{y})$, $(\bar{0}, \bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, где $x, y, z \in K_1 \setminus T$. Рассмотрим точки

$$B_0 = K\square(\bar{e}, \bar{0}, \bar{0}) = \{ (u\square \bar{e}, \bar{0}, \bar{0}) \mid u \in K \} = \{ \overline{u \circ e}, \bar{0}, \bar{0}) \mid u \in K \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, \bar{0}, \bar{0}) \mid u \in K \}, B_1 = K\square(\bar{e}, \bar{e}, \bar{0}) = \{ (\bar{u}, \bar{u}, \bar{0}) \mid u \in K \}, B_\infty =$$

$$= K\square(\bar{0}, \bar{e}, \bar{e}) = \{ (\bar{0}, \bar{u}, \bar{0}) \mid u \in K \}.$$

В качестве прямой ℓ будем рассматривать подмодуль $B_0 + B_1 = B_0 + B_\infty = B_1 + B_\infty$. Тело D будет состоять из всех точек прямой ℓ, кроме точки B_∞. В соответствии с п. 1.2 для вычисления суммы элементов множества D зафиксируем две такие точки G и H, что прямая $G + H$ содержит точку B_0, скажем,

$$G = K\square(\bar{0}, \bar{0}, \bar{e}) = \{ (\bar{0}, \bar{0}, \bar{u}) \mid u \in K \},$$

$$H = K\square(\bar{e}, \bar{0}, \bar{e}) =.\{ (\bar{u}, \bar{0}, \bar{u}) \mid u \in K \}.$$

Теперь выберем два произвольных элемента из множества D. Согласно предложению 3.5.1 их можно записать в виде

$$C_{\bar{x}} = K\square(\bar{e}, \bar{x}, \bar{0}) = \{ (u\square \bar{e}, u\square \bar{x}, \bar{0}) \mid u \in K \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, , \bar{0}) \mid u \in K \},$$

$$C_{\bar{y}} = K\square(\bar{e}, \bar{y}, \bar{0}) = \{ \bar{u}, \overline{u \circ y}, \bar{0}) \mid u \in K \}, \qquad (3.7.1)$$

где $x, y \in K_1 \setminus T$. Отметим, что согласно предложению 3.5.1

$$C_{\bar{x}} = C_{\bar{y}} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}. \qquad (3.7.2)$$

Теперь рассмотрим прямые

$$C_{\bar{x}} + G = \{ (\bar{u}, \overline{u \circ x}, \bar{0}) \mid u \in K \} + \{ (\bar{0}, \bar{0}, \bar{v}) \mid v \in K \} =$$

$$= \{ (\bar{u}, \overline{u \circ x}, \bar{v}) \mid u \in K \}, H + B_\infty = \{ (\bar{t}, \bar{0}, \bar{t}) \mid t \in K \} +$$

$$+ \{ (\bar{0}, \bar{s}, \bar{0}) \mid s \in K \} = \{ (\bar{t}, \bar{s}, \bar{t}) \mid t, s \in K \}.$$

Для этих двух прямых ищем общую точку $R = ((C_{\bar{x}} + G) \cap (H + B_\infty)$.

Тогда $(\bar{u}, \overline{u \circ x}, \bar{v}) = (\bar{t}, \bar{s}, \bar{t})$, откуда выводим, что $\bar{s} = \overline{u \circ x}$, $\bar{u} = \bar{t} = \bar{v}$. Следовательно, $R = \{ (\bar{u}, \overline{u \circ x}, \bar{u}) \mid u \in K \}$. Далее рассматриваем прямые

$$G+B_\infty=\{(\bar 0,\bar s,\bar v)\mid s,v\in K\},\ H+C_{\bar y}=\{(\bar t,\bar 0,\bar t)\mid t\in K\}+$$

$$+\{\bar u,\overline{u\circ y},\bar 0)\mid u\in K\}=\{\bar t+\bar u,\overline{u\circ y},\bar t)\mid t,u\in K\}.$$

Если $S=(G+B_\infty)\cap(H+C_{\bar y})$ − общая точка этих прямых, то из $\bar t+\bar u=\bar 0$, $\bar s=\overline{u\circ y}$, $\bar v=\bar t$ следует, что $S=\{\bar 0,\overline{v\circ y},-\bar v)\mid v\in K\}$. Далее рассматриваем прямую

$$R+S=\{(\bar u,\overline{u\circ x},\bar u)\mid u\in K\}+\{\bar 0,\overline{v\circ y},-\bar v)\mid v\in K=$$

$$=\{(\bar u,\overline{u\circ x}+\overline{v\circ y},\bar u-\bar v)\mid u,v\in K\}.$$

Точка U пересечения прямой $R+S$ и прямой ℓ как раз является суммой элементов $C_{\bar x}$ и $C_{\bar y}$ в D, которую обозначаем через $C_{\bar x}\dagger C_{\bar y}$. Так как $U=(R+S)\cap\ell$, имеем $\bar u-\bar v=\bar 0$, $\bar u=\bar v$, и согласно (3.4.1)

$$\overline{u\circ x}+\overline{v\circ y}=\overline{u\circ x}+\overline{u\circ y}=\overline{u\circ x+u\circ y}=\overline{u\circ(x+y)}=u\square(\overline{x+y})=$$

$$=u\square(\bar x+\bar y),$$

поэтому

$$C_{\bar x}\dagger C_{\bar y}=\{(\bar u,u\square(\bar x+\bar y),\bar 0)\mid u\in K\}=K\square(\bar e,\bar x+\bar y,\bar 0)=C_{\bar x+\bar y}.\quad(3.7.3)$$

Для вычисления произведения элементов из D точки B_0, B_1, B_∞, $C_{\bar x}$, $C_{\bar y}$ оставим те же, а в качестве G и H возьмем точки вне прямой ℓ, через которые проходит прямая, содержащая точку B_∞, скажем,

$$G=K\square(\bar 0,\bar 0,\bar e)=\{(\bar 0,\bar 0,\bar u)\mid u\in K\},$$

$$H=K\square(\bar 0,\bar e,\bar e)=.\{(\bar u,\bar 0,\bar u)\mid u\in K\}$$

Теперь рассмотрим прямые

$$G+B_1=\{(\bar t,\bar t,\bar s)\mid t,s\in K\},\ H+C_{\bar y}=\{(\bar u,\overline{u\circ y}+\bar v,\bar v)\mid u,v\in K\}.$$

Их точка пересечения $R=(G+B_1)\cap(H+C_{\bar y})$. Здесь согласно равенствам $\bar t=\bar u=\overline{u\circ y}+\bar v$, $\bar s=\bar v$ имеем $\bar v=\bar u-\overline{u\circ y}$, поэтому $R=$ $=\{(\bar u,\bar u,\bar u-\overline{u\circ y},)\mid u\in K\}$. Далее вводим в рассмотрение прямые

$$B_0 + R = \{\, (\overline{v} + \overline{u}, \overline{u}, \overline{u} - \overline{u \circ y}) \mid u, v \in \mathrm{K} \,\},$$

$$G + C_{\overline{x}} = \{\, (\overline{t}, \overline{t \circ x}, \overline{s}) \mid t, s \in \mathrm{K} \,\}.$$

Для вычисления их точки пересечения S предположим, что $\overline{v} + \overline{u} = \overline{t}$, $\overline{u} = \overline{t \circ x}$, $\overline{u} - \overline{u \circ y} = \overline{s}$. Тогда $\overline{v} = \overline{t} - \overline{t \circ x}$, $\overline{s} = \overline{t \circ x} - \overline{t \circ x \circ y}$, поэтому $S = \{\, (\overline{t}, \overline{t \circ x}, \overline{t \circ x} - \overline{t \circ x \circ y}) \mid t \in \mathrm{K} \,\}$. Через эту точку проводим прямую

$$H + S = \{\, (\overline{t}, \overline{t \circ x} + \overline{s}, \overline{t \circ x} - \overline{t \circ x \circ y} + \overline{s}) \mid t, s \in \mathrm{K} \,\} \qquad (3.7.4)$$

и находим точку V ее пересечения с прямой $\wr$. Для этого приравняем нулю последнюю компоненту в тройке из (3.7.4): $\overline{t \circ x} - \overline{t \circ x \circ y} + \overline{s} = \overline{0}$. Тогда

$$\overline{t \circ x} + \overline{s} = \overline{t \circ x \circ y} \quad \text{и} \quad V = (\overline{t}, \overline{t \circ x \circ y}, \overline{0}) = C_{\overline{x \circ y}} = C_{\overline{x} \circ \overline{y}}.$$

Согласно п. 1.2 точка V как раз является произведением элементов $C_{\overline{x}}$ и $C_{\overline{y}}$ из D, поэтому можно записать $C_{\overline{x}} \cdot C_{\overline{y}} = C_{\overline{x} \circ \overline{y}}$. Отсюда и согласно (3.7.2) и (3.7.3) получаем, что соответствие ζ: $\overline{x} \mapsto C_{\overline{x}}$ есть инъективный гомоморфизм тела $(\overline{\mathrm{K}_1}, +, \circ)$ в тело $(D, \dagger, \cdot)$. Из соотношений (3.7.1) видно, что этот гомоморфизм сюръективен, поэтому является изоморфизмом, что и требовалось.

Далее, согласно теореме 1.2.8 гл. I решетка L изоморфна решетке $L(D, \mathbf{m})$, где $\mathbf{m}$ − мощность максимального независимого множества атомов, поэтому $\mathbf{m} = |I|$.◊

З а м е ч а н и е 1. В случае $|I| > 1$ должно быть $|I| > 2$, так как если есть две минимальных изоморфных под-*m*-алгебры B и C *m*-алгебры A и φ − изоморфизм *m*-алгебры B на C, то $H = \{\, b + \varphi(b) \mid b \in B \,\}$ является третьей минимальной под-*m*-алгеброй.◊

§ 4. РАДИКАЛЫ *m*-АЛГЕБР, СВЯЗАННЫЕ С ПРЯМЫМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ, И ДРУГИЕ КОНСТРУКЦИИ

4.1. Строго приводимый радикал

. В этом параграфе возвращаемся к общей ситуации изучения свойств *m*-алгебр из категории $\mathcal{Z}$, введем в рассмотрение некоторые радикалы, аналогичные тем, которые используются в теории колец [17],… , и обсудим их свойства. Пусть A есть m-алгебра. Напомним (§ 4, § 1 гл. I), что через $\mathcal{M}aA$ обозначаем множество всех максимальных под-m-алгебр m-алгебры A, через $\Phi(A)$ – его под-m-алгебру Фраттини, и через $Hom(A, B)$ – множество всех гомоморфизмов из m-алгебры A в m-алгебру B. Положим

$$U_1 = \bigvee \{ B \mid B \subsetneq^{\circ} A \}, \tag{4.1.1}$$

$$U_2 = \bigcap \{ Ker\varphi \mid \varphi \in Hom(A, B), B - \text{строго приводимая } m\text{-алгебра} \} \tag{4.1.2}$$

$$U_3 = \bigcap \{ C \in \mathfrak{I}(A) \mid A/C \ - \text{ минимальная } m\text{-алгебра} \}, \tag{4.1.3}$$

$$U_4 = \bigcap \{ C \mid C \in \mathfrak{I}(A) \cap \mathcal{M}aA \}. \tag{4.1.4}$$

Лемма 1. $U_1 = \Phi(A) \subseteq U_2 = U_3 = U_4$.

Доказательство. $\Phi(A) = U_1$. Предположим, что $a \in \Phi(A)$. Тогда согласно лемме 6.1.3 гл. I $\langle a \rangle \subsetneq^{\circ} A$ и поэтому $a \in \bigvee \{ B \mid B \subsetneq^{\circ} A \} = U_1$. Обратно предположим, что $a \in \bigvee \{ B \mid B \subsetneq^{\circ} A \}$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и множества $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subseteq Sub^o A$ косущественных под-m-алгебр должно быть

$$a \in B_1 \vee B_2 \vee \ \ldots \vee B_n \ \text{ и } \ \langle a \rangle \subseteq B_1 \vee B_2 \vee \ \ldots \vee B_n.$$

Так как согласно следствию 6.1.2 гл. I множество $Sub^o A$ является идеалом решетки SuA, то отсюда вытекает, что $\langle a \rangle \subsetneq^{\circ} A$ и, применяя снова лемму 6.1.3 гл. I, приходим к тому, что $a \in \Phi(A)$. Итак, $\Phi(A) = U_1$.

$U_1 \subseteq U_2$. Пусть $\varphi \in Hom_K(A, B)$, где B – строго приводимая m-алгебра. Предположим, что $C \subsetneq^{\circ} A$. Тогда $\varphi(C) \leq B$ и ввиду гамильтоновости m-алгебры B будет $\varphi(C) \in \mathfrak{I}(A)$. Отсюда согласно утверждению в) леммы 6.1.1 гл. I вытекает, что $\varphi(C) \subsetneq^{\circ} B$. Однако по следствию 1.3.4 только $\{0\}$ может быть косущественной под-m-алгеброй строго приводимой m-алгебры B. Поэтому $\varphi(C) = 0$ и $C \subseteq Ker\varphi$. Значит, $U_1 \subseteq U_2$.

$U_2 \subseteq U_3$. Пусть $a \in U_2$. Тогда согласно (4.1.2) для всякого гомоморфизма φ из К-модуля A в строго приводимую m-алгебру B имеет место равенство

$$\varphi(a) = 0. \tag{4.1.5}$$

Если теперь $C \in \mathfrak{I}(A)$ и m-алгебра A/C минимальна, то в качестве φ можно взять естественный гомоморфизм $\nu_C = natC : A \to A/C$, и из (4.1.5) тогда следует, что $a \in C$. Следовательно, $U_2 \subseteq U_3$.

$U_3 \subseteq U_4$. Пусть $a \in U_3$. Тогда согласно (4.1.3) элемент a содержится во всяком идеале $C \in \Im(A)$, для которого фактор-m-алгебра A / C минимальна. Предположим, что $.C \in \Im(A) \cap \mathcal{M}aA$. Тогда согласно второй теореме о гомоморфизмах фактор-m-алгебра A / C минимальна и поэтому $a \in C$. Значит, $a \in \bigcap \{ C \mid C \in \Im(A) \cap \mathcal{M}aA \}$ и $U_3 \subseteq U_4$.

$U_4 \subseteq U_2$. Предположим, что элемент a содержится во всяком идеале $C \in \Im(A)$, который является максимальной под-m-алгеброй в A. Пусть теперь $C = Ker\varphi$, где φ есть гомоморфизм из m-алгебры A в строго приводимую m-алгебру B. Согласно теореме 1.3.1 m-алгебра $\varphi(A)$ вполне разложима. Следовательно, существует разложение $\varphi(A) = \sum_{i \in I}^{\oplus} A_i\,(\pi_i)$ m-алгебры $\varphi(C)$ в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ минимальных под-m-алгебр, где π_i − естественная проекция для каждого индекса $i \in I$. Тогда согласно первой теореме о гомоморфизмах $A_i \approx A / (Ker(\pi_i \circ \varphi))$ − минимальная m-алгебра. По второй теореме о гомоморфизмах тогда $Ker\,(\pi_i \circ \varphi)$ является идеалом, максимальным среди под-m-алгебр m-алгебры A и по предположению $a \in Ker(\pi_i \circ \varphi)$. Так как это верно для любого $i \in I$, то $a \in Ker\varphi$. Следовательно, $a \in U_2$ и $U_4 \subseteq U_2$.

Мы заключаем, что $U_2 = U_3 = U_4$.◊

Идеал $U_2 = U_3 = U_4$ m-алгебры A будем называть *строго приводимым радикалом* этой *m-алгебры* и обозначать через $radA$. Из этой леммы имеем соотношения :

$$\Phi(A) = \bigvee \{ B \mid B \subsetneq A \} \subseteq radA =$$

$$= \bigcap \{ Ker\varphi \mid \varphi \in Hom(A, B), B \text{ –строго приводимая } m\text{-алгебра} \} =$$

$$= \bigcap \{ C \in \Im(A) \mid A / C \text{ – минимальная } m\text{-алгебра} \} =$$

$$= \bigcap \{ C \mid C \in \Im(A) \cap \mathcal{M}aA \}. \tag{4.1.6}$$

Следующий пример показывает, что под-m-алгебра Фраттини не обязательно совпадает со строго приводимым радикалом m-алгебры.

Пример 1. Будем исходить из m-кольца (К, +, ·, ∘), рассмотренного в примере 1.3.8 [39]. Здесь К = $\mathbb{Z}_{15}$, $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$ − кольцо вычетов по модулю 15, а операция суперпозиции ”∘“ вводится по правилу

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}_{15}\,(\, x \circ y = x f(y)\,), \tag{4.1.7}$$

где для $k \in \mathbb{Z}_{15}$

$$
f(k) = \begin{cases} 10, & \text{если} \quad y \in \{2, \quad 5, \quad 7, \quad 10, \quad 14\}, \\ 1, & \text{если} \quad y \in \{1, \quad 4, \quad 8, \quad 11, \quad 13\}, \\ 0, & \text{если} \quad y \in \{0, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12\}. \end{cases} \tag{4.1.8}
$$

Из этой формулы мы видим, что m-кольцо К = $\mathbb{Z}_{15}$ нуль-симметрично. Далее, из (4.1.7) и (4.1.8) можно заметить, что идеал $5\mathbb{Z}_{15}$ кольца $\mathbb{Z}_{15}$ инвариантен слева, но не стабилен слева, а идеал $3\mathbb{Z}_{15}$ стабилен слева и инвариантен справа, поэтому $3\mathbb{Z}_{15} \in StA$, где $A = {}_{К}К$. Так как оба этих идеала являются максимальными подмодулями К-модуля A, то $\mathcal{M}a\, A = \{3\mathbb{Z}_{15}, 5\mathbb{Z}_{15}\}$, $StA \cap \mathcal{M}a\, A = \{3\mathbb{Z}_{15}\}$. Теперь по формуле (4.1.6) получаем $\Phi(A) = 0 \neq 3\mathbb{Z}_{15} = radA$.◊

В связи с равенством $U_1 = \Phi(A)$ отметим случай, когда идеал $Sub°A$ решетки $SubA$ является главным.

Предложение 1. Пусть A − коатомная m-алгебра. Тогда $\Phi(A) \subsetneq A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $B < A$. Ввиду коатомности решетки $SubA$ существует содержащий B максимальная под-m-алгебра $C \in \mathcal{M}aA$. Если теперь выполняется равенство $\Phi(A) + B = A$, то согласно лемме 4.1.3 гл. I $A = \Phi(A) + B \subseteq C + C \subseteq C \neq A$, что приводит к противоречию. Так что под-m-алгебра Фраттини косущественна в A и является наибольшим элементом идеала $Sub°A$.◊

Теорема 1. Пусть A и B − m-алгебры и $\varphi \in Hom(A, B)$. Тогда

$$
\varphi(radA) \subseteq radB. \tag{4.1.9}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b \in \varphi(radA)$. Тогда существует элемент $a \in radA$ такой, что $\varphi(a) = b$. Пусть теперь ψ − гомоморфизм m-алгебры B в строго приводимую m-алгебру C. Согласно (4.1.6) тогда $0 = (\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a)) = \psi(b)$ и поэтому $b \in Ker\psi$. Так как гомоморфизм ψ был произвольным, то по формуле (4.1.6) $b \in radB$. Итак, включение (4.1.9) выполняется.◊

С л е д с т в и е 1. Пусть A есть m-алгебра и $B \leq A$. Тогда $radB \leq radA$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 1 в случае, если φ − вложение под-m-алгебры B в A.◊

Теорема 2. Пусть $A = \sum\limits_{i \in I}{}^{\oplus} A_i$ − разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ под-m-алгебр,. Тогда

$$
radA = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} radA_i\,, \tag{4.1.10}
$$

$$A/radA \approx \sum_{i\in I}{}^{\oplus} (A_i/radA_i). \qquad (4.1.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$A = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i \ (\pi_i) - \qquad (4.1.12)$$

где $\pi_i : A \to A_i$ − естественные проекции прямой суммы. Для $a\in A$ обозначим $I_a = supp(a)$. Так как $A_i \le A$, то согласно следствию 1 $rad\, A_i \subseteq$ $\subseteq radA$, поэтому $\sum_{i\in I} radA_i = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} radA_i \subseteq radA$. С другой стороны, согласно теореме 1 $\pi_i(radA) \subseteq rad\ A_i$, поэтому для всякого элемента $a\in radA$ будет $a = \sum_{i\in I_a}\pi_i(a) \in \sum_{i\in I}{}^{\oplus} radA_i$. Значит, равенство (4.1.10) верно.

Для доказательства (4.1.11) построим изоморфизм φ:
$A/radA \to \sum_{i\in I}{}^{\oplus} (A_i/radA_i)$ в явном виде. Для краткости введем обозначения $R = radA$ и $R_i = rad\, A_i$ для $i\in I$. Пусть $a\in A$. Тогда из (4.1.12) следует, что $a = \sum_{i\in I_a}\pi_i(a)$ Положим

$$\varphi(a + R) = \sum_{i\in I_a} (\pi_i(a) + R_i) \in \sum_{i\in I}{}^{\oplus} (A_i/radA_i). \qquad (4.1.13)$$

Прежде всего установим, что φ − отображение. Действительно, если $a, b\in A$ и $a + R = b + R$, то $a - b\in R$ и, учитывая (4.1.12), имеем $\pi_i(a - b) = \pi_i(a) - \pi_i(b)\in R_i$ для всякого $i\in I$. Поэтому

$$\varphi(a + R) = \sum_{i\in I_a\cup I_b} (\pi_i(a) + R_i) = \sum_{i\in I_a\cup I_b} (\pi_i(b) + R_i) = \varphi(b + R).$$

Итак, отображение φ определено корректно и ясно, что φ − гомоморфизм m-алгебр. Для доквзательства его инъективности предположим, что $a\in A$ и $\varphi(a + R) = 0$. Тогда ввиду (4.1.12) $\pi_i(a)\in R_i$ для каждого $i\in I_a$, поэтому благодаря (4.1.10) $a + R = \sum_{i\in I_a} (\pi_i(a) + R = R$ и φ инъективен. То, что φ сюръективно, очевидно.◊

При некоторых дополнительных условиях включение а) теоремы 1 превращается в равенство, как показывает следующая

Теорема 3. Пусть φ − сюръективный гомоморфизм m-алгебры A на

m-алгебру B и $Ker\varphi \subsetneqq A$. Тогда

$$\varphi(radA) = radB, \tag{4.1.14}$$

$$\varphi^{-1}(radB) = radA. \tag{4.1.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В предположениях теоремы согласно теореме 1 имеем включение

$$\varphi(radA) \subseteq radB. \tag{4.1.16}$$

Для доказательства обратного включения предположим, что $\sigma \in Hom(A, C)$ для некоторой минимальной m-алгебры C. Определим соответствие τ: $B \to C$ по следующему правилу : если $b \in B$ и $\varphi(a) = b$ для некоторого $a \in A$, то положим

$$\tau(b) = \tau(\varphi(a)) = \sigma(a). \tag{4.1.17}$$

Докажем сначала, что τ есть отображение. В самом деле, так как m-алгебра C минимальна, то либо $\sigma(Ker\varphi) = C$, либо $\sigma(Ker\varphi) = 0$. В первом случае, используя предположение $Ker\varphi \subsetneqq A$ и утверждение (c) леммы 6.1.1 гл. I, приходим к тому, что $\sigma(Ker\varphi) = C \subsetneqq C$. Это приводит к противоречию поскольку $C \neq 0$. Остается возможность $\sigma(Ker\varphi) = 0$. Если теперь $b = \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ для каких-то $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 - a_2 \in Ker\varphi$, поэтому $0 = \sigma(a_1 - a_2) = \sigma(a_1) - \sigma(a_2)$ и $\sigma(a_1) = \sigma(a_2)$. Итак, τ есть отображение и легко проверить, что τ является гомоморфизмом K-модулей. Если теперь $b \in radB$, то согласно (1.1.6) $b \in Ker\tau$, и для $a \in \varphi^{-1}(b)$ в соответствии с формулой (4.1.17) $\sigma(a) = \tau(b) = 0$. Следовательно, $a \in Ker\varphi$. Так как это верно для любого $\sigma \in Hom_K(A, C)$, то согласно (4.1.6) $a \in radA$. Таким образом, мы вывели включение

$$\varphi^{-1}(radB) \subseteq radA. \tag{4.1.18}$$

Используя далее сюръективность φ, включения (4.1.16) и (4.1.18), имеем $radB = \varphi(\varphi^{-1}(radB)) \subseteq \varphi(radA) \subseteq radB$. Значит, выполняется равенство (3.1.14). Из этого и из (4.1.18) выводим $\varphi^{-1}(radB) \subseteq radA \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(radA)) = \varphi^{-1}(radB)$. Следовательно, равенство (4.1.15) также выполняется.◊

Теорема 4. Для любой m-алгебры A имеют место соотношения :

а) $rad(A/radA) = 0$;

б) $\forall C \in \Im(A)\ (rad(A/C) = 0 \Rightarrow radA \subseteq C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) обозначим для краткости идеал $radA$ через R. Предположим, что $\psi \in Hom_K(A, B)$, где B − строго приводимый K-модуль. Тогда согласно (4.1.6) $R = radA \subseteq Ker\psi$, поэтому гомоморфизм ψ пропускается через ν_R, где $\nu_R: A \to A/R$ − естественный гомоморфизм, иначе говоря, существует гомоморфизм $\varphi \in Hom(A, B)$ такой, что $\psi = \varphi \circ \nu_R$. Теперь пусть $a \in A$ и предположим, что смежный класс $a + R$ содержится в $rad(A / R)$. Тогда согласно (1.1.6) $a + R$ содержится в ядре гомоморфизма φ. Значит, $\psi(a) = (\varphi \circ \nu_R)(a) = \varphi(a + R) = 0$ и $a \in Ker\psi$. Ввиду произвольности выбора ψ согласно (4.1.6) это означает, что $a \in radA = R$ и $a + R. = R$. Следовательно, а) выполняется;

б) пусть $C \trianglelefteq A$ и $rad(A / C) = 0$. Тогда для естественного гомоморфизма $: A \to A / C$ с использованием теоремы 1 имеем $\nu_C(radA) \subseteq$
$\subseteq rad\,\nu_C(A) = rad(A / C) = 0$, поэтому $radA \subseteq C$.◊

4.2. Вполне приводимый радикал

По аналогии со строго приводимым радикалом введем понятие вполне приводимого радикала. С этой целью введем в рассмотрение следующие идеалы m-алгебры A.

$$V_1 = \sum \{ B \mid B \subsetneq A \}, \tag{4.2.1}$$

$$V_2 =$$

$$= \bigcap \{ Ker\varphi \mid \varphi \in Hom(A, B), Im\varphi = B, B - \text{простая } m\text{--алгебра} \}, \tag{4.2.2}$$

$$V_3 = \bigcap \{ C \in \Im(A) \mid A / C - \text{прост ая } m\text{-алгебра} \}, \tag{4.2.3}$$

$$V_4 = \bigcap \{ C \mid C \in \mathcal{M}a\Im(A) \}. \tag{4.2.4}$$

Лемма 1. $V_1 = V_2 = V_3 =. V_4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $V_4 \subseteq V_1$. Предположим, что $a \in V_4$ и пусть идеал $<<a>>$ не является i-малым идеалом в A. Тогда согласно лемме 6.1.4 гл. I a не принадлежит некоторому идеалу $C \in \mathcal{M}a\Im(A)$, максимальному среди собственных идеалов m-алгебра A, что согласно (1.2.4) противоречит предположению $a \in V_4 = \bigcap \{ C \mid C \in \mathcal{M}aStA \}$. Следовательно,
$<<a>> \subsetneq A$ и согласно (4.2.1) $a \in V_1$. Ввиду произвольности элемента a отсюда вытекает, что $V_4 \subseteq V_1$.

$V_3 = V_4$. Пусть $C \in V_3$. Тогда ввиду (4.2.3) A / C – простая m-алгебра и по второй теореме о гомоморфизмах отсюда следует, что $C \in \mathcal{M}a\Im(A)$. Верно и обратное, поэтому

$$V_3 = \bigcap \{ C \in \Im(A) \mid A / C - \text{простая } m\text{-алгебра} \} =$$

$$= \bigcap \{ C \mid C \in \mathcal{M}a\Im(A) \} = V_4.$$

$V_2 = V_2$. Это следует из определений (4.2.2) и (4.2.3), если применить вторую теорему о гомоморфизмах.

$V_1 \subseteq V_2$. Пусть $C \subsetneq\!\!\!\lhd A$ и φ − сюръективный гомоморфизм m-алгебры A на простую m-алгебру B. Согласно второй теореме о гомоморфизмах тогда

$$\varphi(C) \trianglelefteq B \tag{4.2.5}$$

и согласно утверждению в) леммы 6.1.2 имеем

$$\varphi(C) \subsetneq\!\!\!\lhd B. \tag{4.2.6}$$

Также из (4.2.6) ввиду простоты m-алгебры B следует, что либо $\varphi(C) = 0$, либо $\varphi(C) = B$**.** Второй случай невозможен, так как из-за (1.2.6) идеал B является i-малым лишь в случае $B = 0$, а это противоречит простоте m-алгебры B. Итак, для любого $C \in \Im^{\lhd}(A)$ имеет место включение $C \subseteq Ker\varphi$**,** поэтому согласно (1.2.1) и (1.2.2) $V_1 \subseteq V_2$.

Мы заключаем, что $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$.◊

Этот идеал $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$ будем называть *вполне приводимым радикалом m-алгебры A* и обозначать через $i\text{-}radA$. Из леммы 1 получаем

$$i\text{-}radA = \sum \{\, B \mid B \subsetneq\!\!\!\lhd A \,\} =$$

$$= \bigcap \{\, Ker\varphi \mid \varphi \in Hom_K(A, B),\ \varphi \text{ сюръективен и } B - \text{простая } m\text{-алгебра} \,\} =$$

$$= \bigcap \{\, C \in \Im(A) \mid A/C - \text{простая } m\text{-алгебра} \,\} =$$

$$= \bigcap \{\, C \mid C \in \mathcal{M}a\Im(A) \,\}. \tag{4.2.7}$$

Гносеология этого названия вполне приводимого радикала содержится в следующем утверждении.

Предложение 1.

$$i\text{-}radA = \bigcap \{\, C \trianglelefteq A \mid m\text{-алгебра } A/C - \text{вполне приводима} \}. \tag{4.2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через U правую часть равенства (4.2.8). Так как всякая простая m-алгебра вполне приводима, то согласно (4.2.7) и (4.2.8) $U \subseteq V_3 = i\text{-}radA$. Докажем обратное включение. Для этого предположим, что $C \trianglelefteq A$ и m-алгебра A/C вполне приводима. Тогда согласно теореме 1.4.2 имеет место разложение

$$A/C = \sum_{i \in I}{}^{\oplus} A_i(\pi_i) \tag{4.2.9}$$

m-алгебры A/C в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ простых идеалов.

Для каждого $i \in I$ положим $C_i = Ker(\pi_i \circ \nu_C)$, где $\nu_C = natC : A \to A/C$. Согласно первой теореме о гомоморфизмах $A/C_i \approx Im(\pi_i \circ \nu_C) = A_i$. К тому же из (1.2.9) следует, что $C = \bigcap_{i\in I} C_i$. Теперь, используя (4.2.7) и (4.2.3), получаем

$$U = \bigcap \; \{C \trianglelefteq A \mid m\text{-алгебра } A/C - \text{ вполне приводима}\} = \bigcap_{C\in M}\bigcap_{i\in I_C} C_i \supseteq$$

$$\supseteq \bigcap \{ C\in\Im(A) \mid A/C - \text{ простая } m\text{-алгебра}\} = V_3 = i\text{-}radA. \quad (4.2.10)$$

Итак, $i\text{-}radA = U$.◊

С л е д с т в и е 1. Пусть A есть К-модуль. Тогда

$$\forall a \in A\,(\ll a \gg \ntrianglelefteq A \Leftrightarrow a \in i\text{-}radA).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из (4.2.10) и леммы 6.1.4 гл. I. ◊

С л е д с т в и е 2. Для произвольной m-алгебры A

$$i\text{-}radA \subseteq radA. \quad (4.2.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Im(A) \cap \mathcal{M}a\,A \subseteq \mathcal{M}a\,\Im(A)$**,** то согласно (3.1.6) и (3.2.7)

$$i\text{-}radA = \bigcap \{ C \mid C\in \mathcal{M}a\,\Im(A)\} \subseteq \bigcap \{ C \mid C\in\Im(A) \cap \mathcal{M}aA\} =$$

$$= radA.◊$$

Следующий пример показывает, что для некоторых m-алгебр A включение (4.2.11) может быть строгим.

Пример 1. Пусть (К, +, ·) = ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, +, ·) − булево кольцо из четырех элементов и пусть (К, +, ·, ∘) − надредукт этого кольца, где суперпозиция − тривиальная, заданная при помощи множества S = {(0, 0), (0, 1), (1, 1)}. Будем рассматривать естественный К-модуль $A = {}_{\text{К}}\text{К}$. Согласно примеру 9.5.3 из книги [39] подмодулями этого К-модуля являются только подкольца, содержащиеся в S, среди них максимальными, как легко видеть, будут B = {(0, 0), (0, 1)} и C = {(0, 0), (1, 1)}. Далее, в этом же примере установлено, что идеалами К-модуля A являются те из содержащихся в S идеалов T кольца A, для которых выполняется равенство $T + S = S$. Таким может быть только T = {(0, 0)}. Таким образом, $\mathcal{M}a\,\Im(A) = \{T\}$, $\Im(A) \cap \mathcal{M}aA = \varnothing$. Теперь согласно формулам (1.1.6) и (1.1.7) имеем $i\text{-}radA = \{(0, 0)\} \neq A = radA$.◊

Теорема 1. Пусть φ − сюръективный гомоморфизм К-модуля A на К-модуль B. Тогда

$$\varphi(i\text{-}radA) \subseteq i\text{-}radB. \quad (4.2.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По второй теореме о гомоморфизмах сюръективный гомоморфизм φ индуцирует инъективное отображение множества максимальных идеалов m-алгебры A в множество максимальных идеалов m-алгебры B. Поэтому согласно (4.2.7)

$$\varphi(i\text{-}radA) = \varphi\,(\bigcap \{\, C \mid C\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(A)\,\})\subseteq$$

$$\bigcap \{\, \varphi(C) \mid C\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(A)\,\} \subseteq \bigcap \{\, D \mid D\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(B)\,\}= i\text{-}radB.\Diamond$$

Теорема 2. Пусть A есть m-алгебра и $B\in\mathfrak{I}(A)$. Тогда

$$i\text{-}radB \subseteq i\text{-}radA. \tag{4.2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathcal{M}a\mathfrak{I}(A) = \varnothing$, то согласно (4.2.7) $i\text{-}radA \subseteq$ $\subseteq A = i\text{-}radA$. Теперь предположим, что $\mathcal{M}a\mathfrak{I}(A) \neq \varnothing$. Пусть $C\in\mathcal{M}a\mathfrak{I}(A)$ и B не содержится в C. Тогда $B\cap C \neq B$ и ввиду модулярности решетки $\mathfrak{I}(A)$ и так как $C \prec A$, то $B\cap C \prec B$. Это означает, что $B\cap C\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(B)$. Теперь согласно (4.2.7)

$$B\cap(i\text{-}radA) = B\cap \bigcap \{\, C \mid C\in\mathcal{M}a\mathfrak{I}(A)\,\}= \bigcap \{\, B\cap C \mid C\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(A)\,\}=$$

$$=\bigcap \{\, B\cap C \mid C\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(A), B \subseteq C\,\}\cap$$

$$\cap \bigcap \{\, B\cap C \mid C\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(A), B\cap C \neq B\,\} =$$

$$= B\cap \bigcap \{\, B\cap C \mid C\in\mathcal{M}a\mathfrak{I}(A), B\cap C \prec B\,\} \supseteq$$

$$\supseteq \bigcap \{\, D \mid D\in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(B)\,\} = i\text{-}radB.$$

Следовательно, верно (4.2.13).◊

Теорема 3. Пусть $A = \sum\limits_{i\in I}^{\oplus} A_i$ − разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ под-m-алгебр. Тогда

$$i\text{-}radA = \sum_{i\in I}^{\oplus} i\text{-}radA_i, \tag{4.2.14}$$

$$A/i\text{-}radA \approx \sum_{i\in I}^{\oplus} (A_i/i\text{-}radA_i). \tag{4.2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $i\in I$ $A_i \trianglelefteq A$, поэтому согласно теореме 2 $i\text{-}radA_i \subseteq i\text{-}radA$. Следовательно, $\sum\limits_{i\in I} i\text{-}radA_i = \sum\limits_{i\in I}^{\oplus} i\text{-}radA_i \subseteq$ $\subseteq i\text{-}radA$. С другой стороны, согласно теореме 1 $\pi_i(i\text{-}radA) \subseteq i\text{-}radA_i$, поэтому для $a\in i\text{-}radA$ имеем $a = \sum\limits_{i\in I_a}\pi_i(a)\in\sum\limits_{i\in I}^{\oplus} i\text{-}radA_i$, где $I_a = supp(a)$. Значит, равенство (4.2.14) выполняется. Доказательство соотношения (4.2.15) совершенно аналогично доказательству соотношения (4.1.11) теоремы 4.1.2.◊

Теорема 4. Пусть φ − i-малый сюръективный гомоморфизм К-модуля A на К-модуль B. Тогда

$$\varphi(i\text{-}radA) = i\text{-}radB, \tag{4.2.16}$$

$$\varphi^{-1}(i\text{-}radB) = i\text{-}radA. \tag{4.2.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 имеем включение (4.2.12). Докажем обратное включение. Для этого предположим, что $C\in\Im(A)$, $D\in\Im(B)$ и $D\underset{\neq}{\lhd}B$. Ввиду сюръективности φ тогда
$\varphi^{-1}(D) \trianglelefteq A$. Предположим, что

$$\varphi^{-1}(D) + C = A. \tag{4.2.18}$$

Из этого благодаря сюръективности φ выводим

$$B = \varphi(A) = \varphi(\varphi^{-1}(D) + C) = \varphi(\varphi^{-1}(D)) + \varphi(C) = D + \varphi(C).$$

Ввиду $D\underset{\neq}{\lhd}B$ это приводит к равенству $\varphi(C) = B$. Снова привлекая сюръективность φ, отсюда получаем равенство $C + Ker\varphi = A$, а тогда благодаря i-малости идеала $Ker\varphi$ выводим равенство $C = A$. Таким образом, из равенства (4.2.18) следует, что $C = A$. Это означает, что $\varphi^{-1}(D)\underset{\neq}{\lhd}A$. Теперь согласно формуле (4.2.7) и благодаря сюръективности φ и предположению $Ker\varphi\underset{\neq}{\lhd}A$, получаем

$$\varphi^{-1}(i\text{-}radB) = \varphi^{-1}(\sum\{D \mid D\underset{\neq}{\lhd}B\}) \subseteq \sum\{\varphi^{-1}(D) \mid D\underset{\neq}{\lhd}B\} + Ker\varphi \subseteq$$

$$\subseteq \sum\{E \mid E\underset{\neq}{\lhd}A\} = i\text{-}radA.$$

Получаем неравенство $\varphi^{-1}(i\text{-}radB) \subseteq i\text{-}radA$, откуда выводим, опираясь на (4.2.12) и сюръективность φ:

$$i\text{-}radB = \varphi(\varphi^{-1}(i\text{-}radB)) \subseteq \varphi(i\text{-}radA) \subseteq i\text{-}radB.$$

Следовательно, равенство (4.2.16) выполняется. Равенство (4.2.17) устанавливается так же, как и равенство (15) в теореме 4.1.3.◊

Теорема 5. Пусть A есть m-алгебра. Тогда

(а) $i\text{-}rad(A/i\text{-}radA) = 0$;

(б) $\forall C\trianglelefteq A\ (i\text{-}rad(A/C) = 0 \Rightarrow i\text{-}radA \subseteq C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству теоремы 4.1.4 с заменой участвующих там гомоморфизмов в строго приводимые m-алгебры на сюръективные гомоморфизмы на простые m-алгебры, и вместо теоремы 4.1.1 используется теорема 1.◊

Предложение 2. Имеют место следующие утверждения о вполне приводимых радикалах m-алгебр:

а) если m-алгебра A вполне приводима, то $i\text{-}radA = 0$;

б) если решетка идеалов m-алгебры A коатомна (в частности, если ненулевая m-алгебра A идеально конечно порождена), то $i\text{-}radA \subsetneq A$;

в) если A есть К-модуль, то $\forall a \in A$ ($(i\text{-}rad_{К}К)\square a \subseteq$

$\subseteq i\text{-}rad(К\square a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть m-алгебра A вполне приводима. Тогда каждый ее идеал выделяется прямым слагаемым, поэтому только нулевой идеал является i-малым в A. Так что согласно (1.2.7) $i\text{-}radA =$

$= \sum \{ B \mid B \subsetneq A \} = 0$;

б) пусть решетка $\Im(A)$ коатомна и для некоторого $C \lhd A$ выполняется равенство $i\text{-}radA + C = A$. Ввиду коатомности решетки $\Im(A)$ должен существовать максимальный идеал $B \in \mathcal{M}a\Im(A)$, содержащий C. Но тогда согласно (4.2.7) имеем

$$A = i\text{-}radA + C = \bigcap \{ B \mid B \in \mathcal{M}a\Im(A) \} + C \subseteq C + C \subseteq C,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $radA \subsetneq A$. Это означает, что $\Im^{\lhd}(A) = \downarrow(i\text{-}radA)$ и наблюдается некоторая аналогия с предложением 1;

в) пусть $a \in A$. Тогда отображение $\varphi_a : x \mapsto x\square a$, где $x \in К$ является гомоморфизмом естественного К-модуля ${}_{К}К$ на циклический К-модуль $К\square a$. Поэтому согласно теореме 1 $\varphi_a(i\text{-}rad_{К}К) = (i\text{-}rad_{К}К)\square a \subseteq$

$\subseteq i\text{-}rad(К\square a)$.◊

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что если $B \trianglelefteq A$, то

$$(B + radA)/B \subseteq rad(A/B))\&((B + i\text{-}radA)/B \subseteq i\text{-}rad(A/B)).◊$$

4.3. Примитивный радикал *m*-кольца

Напомним [39, § 9], что идеал I m-кольца К называется *примитивным*, если фактор-m-кольцо К / I обладает точным неприводимым представлением, иначе говоря, примитивные идеалы − это ядра неприводимых представлений. Пересечение примитивных идеалов m-кольца К −

это *радикал Джекобсона* $Rad\,К$ m-кольца К. Обозначим множество всех примитивных идеалов m-кольца К, являющихся его максимальными идеалами, через $\mathcal{P}r(К)$ и положим

$$P(К) = \bigcap \{\, I \mid I \in \mathcal{P}r(К) \,\} \qquad (4.3.1)$$

и, следуя [43], назовем идеал $P(К)$ *примитивным радикалом m-кольца* К. По определению имеем

$$Rad\,К \subseteq P(К), \qquad (4.3.2)$$

а также согласно формуле (4.2.7)

$$i\text{-}rad К \subseteq P(К). \qquad (4.3.3)$$

Из этих включений следует включение

$$Rad\,К + i\text{-}rad К \subseteq P(К). \qquad (4.3.4)$$

В следующем примере покажем, что включение в (4.3.4) может быть строгим.

Пример 1. Пусть $(К, +, \cdot, \circ) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot, \circ)$ − четырехэлементное m-кольцо, где $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ − прямое произведение двухэлементных полей, а суперпозиция определена по правилу: для $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$

$$(a, b)\circ(c, d) = \begin{cases} (0,b), & \text{если} \quad d = 1, \\ (0,0), & \text{если} \quad d = 0. \end{cases} \qquad (4.3.5)$$

Для доказательства корректности этого определения потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть φ − идемпотентный эндоморфизм m-кольца $(К, +, \cdot, \circ)$. Определим бинарную операцию “$*$” по правилу: для $a, b \in К$

$$a * b = \varphi(a \circ b). \qquad (4.3.6)$$

Тогда универсальная алгебра $(К, +, \cdot, *)$ является m-кольцом с тем же редуктом, что и у исходного m-кольца.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a, b, c \in К$. Согласно формуле (4.3.6) имеем

$$(a * b) * c = \varphi(\varphi(a\circ b)\circ c) = \varphi(\varphi(a)\circ\varphi(b))\circ\varphi(c) = \varphi(\varphi(a))\circ\varphi(\varphi(b))\circ\varphi(c) =$$
$$= \varphi(a)\circ\varphi(\varphi(b))\circ\varphi(\varphi(c)) = \varphi(a)\circ\varphi(\varphi(b)\circ\varphi(c)) = \varphi(a\circ\varphi(\varphi(b\circ c)) =$$
$$= \varphi(a\circ\varphi(b\circ c)) = a * (b * c).$$

Значит, операция “$*$” ассоциативна. То, что она дистрибутивна справа относительно кольцевых операций, легко выводится из того, что φ −

эндоморфизм кольца (К, +, ·) и благодаря дистрибутивности справа операции "∘" относительно кольцевых операций. Таким образом, (К, +, ·, $*$) есть m-кольцо.◊

Возвратимся к формуле (4.3.5). Надо показать, что операция "∘", определенная по этой формуле, ассоциативна и дистрибутивна справа относительно кольцевых операций. Для этого зададим на К тривиальную суперпозицию "¤" при помощи множества $S = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$. Тогда для любых $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ имеем

$$(a,\, b)¤(c,\, d) = \begin{cases} (a,b), & \text{если} \quad d = 1, \\ (0,0), & \text{если} \quad d = 0. \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Согласно вышеуказанному примеру универсальная алгебра (К, +, ·, ¤) является m-кольцом. Теперь рассмотрим преобразование $\varphi\colon (a,\, b) \mapsto (0,\, b)$ множества К. Нетрудно видеть, что φ − идемпотентный эндоморфизм его естественного К-модуля $_{К}$К. Сравнивая формулы (4.3.5) и (4.3.7), а также заменяя в равенстве (4.3.5) знак "$*$" на "∘" и "∘" на "¤", благодаря лемме 1 убеждаемся в том, что универсальная алгебра (К, +, ·, ∘), определенная в начале примера, является m-кольцом.

Далее рассмотрим идеал $I = \{0\} \times \mathbb{Z}_2$ кольца (К, +, ·) и покажем, что он является единственным максимальным идеалом m-кольца К. Действительно, из формулы (4.3.5) вытекает включение К∘К $\subseteq I$, откуда следует инвариантность справа и стабильность слева идеала I. Так что I является идеалом m-кольца (К, +, ·, ∘), причем максимальным, так как $|\, I\,| = 2$. Другой нетривиальный идеал $S = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ не инвариантен справа, как непосредственно видно из формулы (4.3.5), так что $\mathcal{M}a\mathfrak{I}$(К) = $\{I\}$ и i-radК = $= I$. Далее покажем, что S является допустимым идеалом естественного К-модуля $_{К}$К. В самом деле, если $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, то

$$(a,\, b)\circ((c,\, d) + (1,\, 0)) - (a,\, b)\circ(c,\, d) = (a,\, b)\circ((c + 1,\, d)) - (a,\, b)\circ(c,\, d) = (0,\, 0),$$

последнее равенство верно по причине того, что благодаря (4.3.5) результаты обеих суперпозиций справа не зависят от первых сомножителей слагаемых левой части. Значит, идеал S кольца (К, +, ·) стабилен слева. Далее, для $a, b \in \mathbb{Z}_2$ имеем

$$(a,\, b) - (a,\, b)\circ(0,\, 1) = (a,\, b) - (0,\, b) = (a,\, 0) \in S,$$

поэтому S − модулярный идеал. К тому же для $c, d \in \mathbb{Z}_2$ если для любых $a, b \in \mathbb{Z}_2$ будет $(a,\, b)\circ(c,\, d) \in S$, то $d = 0$, поэтому в обозначениях п. 9.4 [39] $F_S = (S \div К) = S$, так что S − толстый идеал К-модуля $_{К}$К. Учитывая то, что

S является максимальым из инвариантных слева подколец кольца $(К, +, \cdot)$, получаем согласно теореме 9.4.1, что S − допустимый идеал К-модуля ${}_КК$. Так как I − единственный нетривиальный идеал m-кольца К, то $\overset{\circ}{S} =$ $= \{0\}$ (наибольший из идеалов m-кольца К, содержащихся в S), откуда вытекает, что $Rad\, К = \{0\}$. Заметим еще, что из включения $К \circ К \subseteq I$ следует, что $F_I = К$, поэтому I не является толстым идеалом К-модуля ${}_КК$, так что $\mathcal{P}r(К) = \varnothing$ и $P(К) = К$. Итак, $Rad\, К + i\text{-}rad К = I \neq К = P(К)$.

Далее рассмотрим некоторые свойства радикала $P(К)$.

Лемма 2. Пусть φ − сюръективный гомоморфизм m-кольца К на m-кольцо L. Тогда для любого идеала $I \in \mathfrak{I}(L)$

$$I \in \mathcal{P}r(L) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(I) \in \mathcal{P}r(К). \tag{4.3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По второй теореме о гомоморфизмах $I \in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(L) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(I) \in \mathcal{M}a\mathfrak{I}(A)$. Далее, если (L, A, α) − неприводимое представление с ядром $I = Ker\alpha$, то $(К, A, \alpha\circ\varphi)$ − неприводимое представление с ядром $\varphi^{-1}(I) = Ker\, \alpha\circ\varphi$. Поэтому если $I \in \mathcal{P}r(L)$, то $\varphi^{-1}(I) \in \mathcal{P}r(К)$. Обратно, если $I \in \mathfrak{I}(L)$ и $\varphi^{-1}(I) \in \mathcal{P}r(L)$, то существует представление $(К, A, \alpha)$ с ядром $\varphi^{-1}(I) = Ker\alpha$. По первой и четвертой теоремам о гомоморфизмах имеем

$$Im\alpha \approx К/\varphi^{-1}(I) \approx {(К/Ker\varphi)}\big/{(\varphi^{-1}(I)/Ker\varphi)} \approx L/I,$$

поэтому имеется неприводимое представление (L, A, β) с ядром I. Значит, $I \in \mathcal{P}r(L)$ и (4.3.8) выполняется.

Теорема 1. Пусть φ − гомоморфизм m-кольца К в m-кольцо L. Тогда

$$\varphi(P(К)) \subseteq P(\varphi(К)). \tag{4.3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формулам (4.3.1) и (4.3.8) имеем $P(К) \subseteq \varphi^{-1}(I)$ для любого $I \in \mathcal{P}r(\varphi(К))$. Поэтому для любого $I \in \mathcal{P}r(\varphi(К))$ будет $\varphi(P(К)) \subseteq I$ и $\varphi(P(К)) \subseteq P(\varphi(К))$. ◊

Теорема 2. Для любого m-кольца К:

а) $P(К/P(К)) = 0$;

б) $\forall I \trianglelefteq K\, (P(К/I) = 0 \Rightarrow P(К) \subseteq I)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) пусть $\nu = nat\, P(К)\colon К \to К/P(К)$ − естественный гомоморфизм. Положим $L = К/P(К)$. Используя (4.3.1), (4.3.8) и вторую теорему о гомоморфизмах, имеем

$$\nu^{-1}(P(L)) = \nu^{-1}(\bigcap \{ I \mid I \in \mathcal{P}r(L) \}) =$$

$$= \bigcap \{ \nu^{-1}(I) \mid I \in \mathcal{P}r(L\} = \bigcap \{ J \mid J \in \mathcal{P}r(\text{К}) \} = P(\text{К}).$$

Следовательно, $P(L) = 0$;

б) пусть $I \in \mathcal{P}r(\text{К})$ и $P(\text{К}/I) = 0$. Положим $\nu = nat\, I$: К $\to$ К$/I$. Ввиду теоремы 1 получаем $\nu(P(\text{К})) \subseteq P(\nu(\text{К})) = P(\text{К}/I) = 0$, откуда следует, что $\nu(P(\text{К})) = 0$ и, значит, $P(\text{К}) \subseteq I$.◊

m-кольцо К называется *глобально идемпотентным*, если его o-полугруппа глобально идемпотентна [4], т. е. К∘К = К, и *глобально квазиидемпотентным*, если $\ll$ К∘К $\gg$ = К.

Теорема 3. Пусть К − глобально квазиидемпотентное m-кольцо. Тогда

$$P(\text{К}) \subseteq rad\text{К}. \tag{4.3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что m-кольцо К глобально квазиидемпотентно и $I \in \mathcal{P}r(\text{К}) \cap \mathcal{M}a\text{К}$. Рассмотрим фактор-$m$-кольцо К$/I$ как К-модуль и обозначим его через A. Иначе говоря, мы имеем m-тройку (К, A, α), где для $x, y \in$ К $\alpha(x)(y + I) = x \circ y + I$. Так как идеал I максимален среди под-m-колец m-кольца К, этот идеал I максимален также среди инвариантных слева под-m-колец m-кольца К, поэтому и согласно второй теореме о гомоморфизмах К-модулей К-модуль A неприводим. Покажем, что $Ker\alpha = I$. Действительно, ввиду инвариантности справа идеала I будет иметь место включение $I \subseteq Ker\alpha$. Теперь из-за максимальности идеала I либо $I = Ker\alpha$, либо К $= Ker\alpha$. Во втором случае К∘К $\subseteq I$, что противоречит глобальной квазиидемпотентности m-кольца К. Итак, $I = Ker\alpha$ − ядро неприводимого представления, являющееся максимальным идеалом. Следовательно, $I \in \mathcal{P}r(\text{К})$. Далее по формулам (4.1.6) и (4.3.1) имеем

$$P(\text{К}) = \bigcap \{ I \mid I \in \mathcal{P}r(\text{К}) \} \subseteq \bigcap \{ C \mid C \in \Im(A) \cap \mathcal{M}aA \} = rad\text{К}.◊$$

4.4. Цоколь *m*-алгебры

Напомним (§ 4 гл. I), что через $\mathcal{M}iA$ обозначается множество минимальных под-m-алгебр m-алгебры A, т. е. $\mathcal{M}iA = \{ B \mid B \propto A \}$. Для введения понятия цоколя сделаем некоторые обозначения. Предполагаем, что A − некоторая произвольная m-алгебра.

$$W_1 = \bigcap \{B \mid B \lneq\!\!\!\!\!\cdot\; A \}, \tag{4.4.1}$$

$$W_2 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad MiA = \varnothing, \\ \bigvee\limits_{B \propto A} B, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.4.2}$$

$$W_3 = \bigvee \{\, Im\,\varphi \mid \varphi \in Hom(B, A),\ B - \text{вполне разложимая } m\text{-алгебра} \,\}. \tag{4.4.3}$$

Лемма 1. $W_1 \supseteq W_2 = W_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $W_1 \supseteq W_2$. Пусть $B \propto A$ и $C \varsubsetneq A$. Если $B \cap C \neq 0$, то ввиду минимальности m-алгебры B должно быть $B \cap C = B$ и $B \subseteq C$. Если же $B \cap C = 0$, то из существенности под-m-алгебры C это приводит к равенству $B = 0$, что невозможно. Так что $B \subseteq \bigcap \{\, C \mid C \varsubsetneq A \,\} = V_1$ и, значит, согласно (4.4.1) и (4.4.2) $W_2 \subseteq W_1$.

$W_3 \subseteq W_2$. Пусть m-алгебра B вполне разложима и $\varphi \in Hom(B, A)$. Тогда согласно следствию 1.3.4 m-алгебра $Im\,\varphi$ также вполне разложима и является потому суммой минимальных под-m-алгебр m-алгебры A. Следовательно, согласно (4.4.1) и (4.4.3), $W_3 \subseteq W_2$.

$W_2 \subseteq W_3$. Если $\mathcal{M}iA = \varnothing$, то согласно (4.3.2) и (1.4.3) $W_2 = \{0\} \subseteq W_3$. Пусть теперь $\mathcal{M}iA \neq \varnothing$ и $B \in \mathcal{M}iA$. Если $\iota\colon B \to A$ − вложение m-алгебры B в m-алгебру A, то

$$Im\,\iota = B \subseteq$$

$$\subseteq \bigvee \{\, Im\,\varphi \mid \varphi \in Hom(B, A),\ B - \text{вполне разложимый К-модуль} \,\} = W_3.$$

Так что $W_2 = \bigvee\limits_{B \propto A} B \subseteq W_3$. Итак, $W_2 = W_3 \subseteq W_1$.◊

Цоколем m-алгебры A называем его под-m-алгебру $W_2 = W_3$. Обозначаем его через $SocA$. Из леммы 2 следует,что

$$SocA = \bigvee \{\, Im\,\varphi \mid \varphi \in Hom(B, A),\ B - \text{вполне разложимая } m\text{-алгебра} \,\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap \{ B \mid B \varsubsetneq A \,\} \}. \tag{4.4.4}$$

Следующий пример показывает, что равенство $SocA = W_1$ в общем случае не выполняется.

Пример 1. Положим К = $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ − прямое произведение кольца $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел на кольцо $\mathbb{Z}_2$ вычетов по модулю 2. Определим на множестве К тривиальную суперпозицию ” ∘ ” по правилу (3.6.10) примера 3.6.3, именно положим

$$S = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}_2) \tag{4.4.5}$$

и для $x, y \in$ К

$$x \circ y = \begin{cases} x, & \text{если} \quad y \notin S, \\ 0, & \text{если} \quad y \in S. \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Теперь в качестве К-модуля A рассмотрим естественный К-модуль $_{\text{К}}$К. Тогда из (1.3.6) получаем, что для любых элементов x из К и a из A

$$x \,\square\, a = \begin{cases} x, & \text{если} \quad a \notin S, \\ 0, & \text{если} \quad a \in S. \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Как сказано в примере 9.5.3 из книги [39], собственными подмодулями этого К-модуля A являются подкольца кольца $(A,+\,,\cdot)$, содержащиеся в S, а собственными идеалами − те идеалы M этого кольца, для которых выполняются равенства $M + S = S$.

Положим $C = \{0\} \times \mathbb{Z}_2$ и для $m \in \mathbb{N}$ $B_m = m\mathbb{Z} \times \{0\}$. Для этих подколец кольца A нетрудно проверить приведенные выше условия, поэтому все эти подмножества являются подмодулями К-модуля A. На самом деле других собственных подмодулей нет. Действительно, если $M < A$ и $M \neq C$, то согласно (4.3.5) и лемме 9.5.3 [39] $M \subseteq \mathbb{Z} \times \{0\}$, а так как кольцо $\mathbb{Z} \times \{0\}$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}$ и M является его подкольцом, то для некоторого $m \in \mathbb{Z}$ должны выполняться равенства $M = m\mathbb{Z} \times \{0\} = B_m$. Теперь мы видим, что решетка SuA изоморфна прямому произведению решетки SuB_1, антиизоморфной решетке $(\mathbb{N}_0, \mid)$ неотрицательных целых чисел, упорядоченных по делимости, и двухэлементой решетке $\{0, 1\}$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}iSu\,A = \{\,C\,\}$ и $Su^{\times}A = \{A\}$. Из этого согласно (4.4.1) и (4.4.4) выходит, что $SocA = C \neq W_1 = A$.◊

В связи с этим примером уместно привести некоторые достаточные условия для совпадения цоколя и подмодуля W_1. Они будут приведены позже в п. 2.1 гл. V.

Теорема 1. Пусть A и B − m-алгебры и $\varphi \in Hom_{\text{К}}(A, B)$. Тогда

$$\varphi(SocA) \subseteq SocB. \tag{4.4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как всякий гомоморфный образ минимальной m-алгебры либо является минимальной m-алгеброй, либо нулевой, то по формуле (4.4.4) если $\mathcal{M}iA \neq \varnothing$, то

$$\varphi(SocA) = \varphi(\bigvee \{\, C \mid C \propto A \,\}) \subseteq \bigvee \{\, \varphi(C) \mid C \propto A \,\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigvee \{\, D \mid D \propto B \,\} = SocB.$$

Если $\mathcal{M}iA = \varnothing$, то $\varphi(SocA) = \varphi(0) = 0 \subseteq SocB$. Во всяком случае $\varphi(SocA) \subseteq SocB$.◊

Теорема 2. Для любой m-алгебры A

а) $Soc(SocA) = SocA$;

б) $\forall C \le A$ ($SocC = C \Rightarrow C \subseteq SocA$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) положим $V = SocA$. Если $B \propto V$, то $B \propto A$. Обратно, если $B \propto A$, то $B \le SocA = V$ и $B \propto V$, поэтому согласно (4.4.4) получим

$$Soc(SocA) = SocV = \bigvee \{ B \mid B \propto V \} = \bigvee \{ B \mid B \propto A \} = SocA.$$

Если минимальных подмодулей нет в A, то $SocA = 0 = Soc(SocA)$. Обратно, если $SocA = 0$, то $\mathcal{M}iA = \varnothing$ и снова $SocA = 0 = Soc(SocA)$. а) доказано;

б) пусть $C \le A$ и $SocC = C$. Если $\mathcal{M}i\,C = \varnothing$, то $C = SocC =$ $= 0 \le SocA$. В случае $\mathcal{M}i\,C \ne \varnothing$ по формуле (4.4.4) получаем

$$C = SocC = \bigvee \{ B \mid B \propto C \} \subseteq \bigvee \{ B \mid B \propto A\} = SocA.◊$$

Теорема 3. Пусть φ − существенный инъективный гомоморфизм К-модуля A в К-модуль B. Тогда

$$\varphi(SocA) = SocB, \tag{4.4.9}$$

$$\varphi^{-1}(SocB) = SocA. \tag{4.4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждения б) теоремы 1 имеем включение

$$\varphi(SocA) \subseteq SocB, \tag{4.4.11}$$

Будем доказывать обратное включение. Если $\mathcal{M}iA = \varnothing$, то согласно (4.4.4) $SocB = \{0\} \subseteq \varphi(SocA)$. Предположим теперь, что $C \propto B$. Тогда ввиду неприводимости C для подмодуля $\varphi(A)$ имеется альтернатива : либо $C \cap \varphi(A) = C$ и в этом случае $C \subseteq \varphi(A)$, либо $C \cap \varphi(A) = 0$. Последнее равенство невозможно, поскольку $\varphi(A) \subsetneqq B$ и $C \ne 0$. Следовательно, согласно (4.4.4)

$$SocB = \bigvee \{ C \mid C \propto B \} \subseteq \varphi(A). \tag{4.4.12}$$

С другой стороны, ввиду инъективности φ должно быть

$$\forall D \le A (D \propto A \Leftrightarrow \varphi(D) \propto \varphi (A),$$

поэтому

$$\varphi(SocA) = \varphi(\bigvee \{ D \mid D \propto A \}) = \bigvee \{ \varphi(D) \mid D \propto A \} =$$

$$= \bigvee \{ \varphi(D) \mid \varphi(D) \propto \varphi(A) \} = \bigvee \{ E \mid E \propto \varphi(A) \} = Soc\varphi(A).$$

Теперь согласно теореме 2 и благодаря (4.4.11) получаем

$$SocB = Soc(SocB) \subseteq Soc(\varphi(A)) = \varphi(SocA).$$

Следовательно, равенство (4.4.9) выполняется. Отсюда ввиду инъективности φ имеем $SocA = \varphi^{-1}(\varphi(SocA)) = \varphi^{-1}(SocB)$.◊

Теорема 4. Пусть $A = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i$ − разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ под-m-алгебр,. Тогда

$$SocA = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} SocA_i\ , \tag{4.4.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждения б) теоремы 1 следует, что $SocA_i \subseteq SocA$ для каждого $i\in I$, поэтому

$$\sum_{i\in I}{}^{\oplus} SocA_i \subseteq SocA. \tag{4.4.14}$$

Докажем обратное включение. Если $\mathcal{M}iA = \varnothing$, то $SocA = \{0\} \subseteq \sum_{i\in I}{}^{\oplus} SocA_i$.

В другом случае зафиксируем произвольную минимальную под m-алгебру $B \propto A$. Для каждого $i\in I$, как обычно, обозначаем через π_i естественную проекцию прямой суммы $\sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i$ на компоненту A_i. Сначала предположим, что $B \cap A_i = 0$ для любого $i\in I$. Пусть $b\in B$ и $b \neq 0$. Положим $I_b =$ $= \{ i\in I \mid \pi_i(b) \neq 0 \}$. Тогда имеем разложение $b = \sum_{i\in I_b} \pi_i\,(b)$. Для $i\in I_b$ обозначим гомоморфизм $\pi_i|_B : B \to A_i$ через ρ_i. Так как это − ненулевой гомоморфизм минимальной m-алгебры B в A_i, то его ядро − нулевое, поэтому он инъективен. Положим $B_i = \rho_i(b)$. Ввиду минимальности B имеем $B = \langle b \rangle$ и $B_i = \langle \pi_i(b) \rangle \in \mathcal{M}iA_i$. Отсюда следует, что

$$B = \langle b \rangle = \langle \sum_{i\in I_b} \pi_i\,(b) \rangle \subseteq \sum_{i\in I_b} \langle \pi_i \rangle =$$

$$= \sum_{i\in I_b} B_i \subseteq \sum_{i\in I_b} SocA_i \subseteq \sum_{i\in I}{}^{\oplus} SocA_i\ . \tag{4.4.15}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $B \subseteq A_i$ для некоторого индекса $i \in I$. Тогда $B \in \mathcal{M}iA_i$ и $B \subseteq SocA_i$. Итак, учитывая (4.4.15), приходим к тому, что для любого $B \in \mathcal{M}iA$ будет $B \subseteq \sum_{i \in I}{}^{\oplus} SocA_i$. Отсюда следует, что

$$SocA = \vee \{ B \mid B \propto A \} \subseteq \sum_{i \in I}{}^{\oplus} SocA_i \ ,$$

что и требовалось.◊

Предложение 1. Пусть К − произвольное, но фиксированное *m*-кольцо. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) для любого К-модуля A

$$SocA \subsetneqq A; \tag{4.4.16}$$

2) для любого циклического К-модуля A

$$SocA \subsetneqq A; \tag{4.4.17}$$

3) для любого ненулевого К-модуля A

$$SocA \neq 0. \tag{4.4.18}$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть A есть К-модуль и $A \neq 0$. Предположим, *е. а.,* что $SocA = 0$. Так как $A \neq 0$, то для некоторого $a \in A$ будет $< a > \neq 0$ и согласно (4.4.16) $Soc< a > \subsetneqq < a >$, откуда следует, что $Soc< a > \neq 0$. В этом случае существует неприводимый подмодуль B К-модуля $< a >$, который является неприводимым подмодулем К-модуля A. Это согласно (4.4.4) противоречит предположению $SocA = 0$. Остается возможность (4.4.18)

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \neq 0$. Согласно (3) тогда $SocA \neq 0$. Если $SocA$ не является существенным в A, то для некоторого $SocA$ ненулевого подмодуля B

$$B \cap SocA = 0. \tag{4.4.19}$$

Ввиду (3) тогда $SocB \neq 0$, поэтому в B существует неприводимый подмодуль C. Но тогда $C \propto A$ и ввиду (1.4.19) $C \cap SocA = 0$, что противоречит (3.3.4). Следовательно, (1.4.16) выполняется.◊

Упражнение 1. Доказать, что если B − вполне разложимая под-*m*-алгебра *m*-алгебры A, то $B = SocB$.

4.5. Полупростые *m*-алгебры

m-алгебру A называем *полупростой*, если $radA = 0$, и *i-полупростой*, если $i\text{-}radA = 0$. Из следствия 4.2.2 сразу выводим, что всякая полупростая

m-алгебра является i-полупростой. Далее, согласно формулам (4.1.6), (4.2.7) и теореме 2.4.3 гл. I, получаем

Следствие 1. Ненулевая m-алгебра A полупроста тогда и только тогда, когда она изоморфна подпрямому произведению минимальных m-алгебр, и является i-полупростой в том и только в том случае, когда она изоморфна подпрямому произведению простых m-алгебр.◊

Следствие 2. Всякая вполне разложимая m-алгебра полупроста и всякая вполне приводимая m-алгебра i-полупроста.◊

Связь между полупростыми и строго приводимыми m-алгебрами освещает следующая

Теорема 1. Для того чтобы m-алгебра A была строго приводима, необходимо и достаточно, чтобы она была полупростой и чтобы каждая ее под-m-алгебра обладала аддитивным дополнением, являющимся ее идеалом.

Доказательство. Необходимость. Пусть A − строго приводимый К-модуль. Тогда она вполне разложима (теорема 1.3.1) и согласно следствию 2 она полупроста. Далее, по определению каждая под-m-алгебра m-алгебры A выделяется прямым слагаемым и согласно следствию 6.2.1 гл. I обладает аддитивным дополнением, являющимся идеалом m-алгебры A.

Достаточность. Обратно, предположим, что m-алгебра A полупроста и каждая ее под-m-алгебра обладает аддитивным дополнением, являющимся ее идеалом. Пусть $B \in SubA$ и C есть а.д. для B в A, причем $C \in \mathfrak{I}$(К). Таким образом,

$$A = B \overset{\text{а.д.}}{+} C. \tag{4.5.1}$$

Применяя свойство а) из леммы 6.2.1 гл. I, получаем, что $B \cap C \subsetneq^{\circ} C$, а тогда, используя формулу (3.1.6), следствие 3.1.3 и полупростоту m-алгебры A, выводим соотношения

$$B \cap C \subseteq \bigvee \{ D \mid D \subsetneq^{\circ} A \} \subseteq radC \subseteq \subseteq radA = 0.$$

Следовательно, $B \cap C = 0$ и согласно (4.5.1) $A = B \leftthreetimes C$. Далее, по предположению для C в A существует аддитивное дополнение $D \trianglelefteq A$, $A =$ $= C \overset{\text{а.д.}}{+} D$,.причем снова, как и выше, $C \cap D = 0$. Тогда согласно следствию 2.3.1 гл. I имеем разложение в прямую сумму идеалов :

$$A = C \oplus D. \tag{4.5.2}$$

Теперь из минимальности аддитивного дополнения ввиду (1.5.1) имеем включение

$$D \subseteq B. \tag{4.5.3}$$

Для доказательства обратного включения предположим, что $b \in B$. Тогда ввиду (1.5.2) существуют элементы $c \in C$ и $d \in D$ такие, что $b = c + d$. Отсюда, используя (4.5.3), получаем $c = b - d \in B - D \subseteq B - B \subseteq B$ и тогда $c \in B \cap C = 0$, $c = 0$, так что $b = d \in D$. Ввиду произвольности элемента b из B отсюда следует включение $B \subseteq D$ и, окончательно, $B = D$ и согласно (4.5.2) $A = C \oplus B$. Значит, произвольный подмодуль $B \leq A$ выделяется прямым слагаемым, что и требуется для строгой приводимости A.

Теорема 2. m-алгебра A вполне приводима тогда и только тогда, когда она i-полупроста и каждый ее идеал обладает i.а.д. в A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) д о с т а т о ч н о с т ь. Предполагаем, что m-алгебра A i-полупроста и каждый ее идеал обладает i. а. д. в A. Пусть $B \in \Im(A)$, тогда существует идеал $C \in \Im(A)$, который является i. а. д. для B в A, в частности,

$$B + C = A. \tag{4.5.4}$$

Из утверждения а) леммы 6.2.4 гл. I следует соотношение

$$\forall D \in \Im(A) \ (D \subseteq C \Rightarrow ((B \cap C) + D = C \Rightarrow D = C)). \tag{4.5.5}$$

Покажем, что

$$B \cap C \subsetneq^{!} A. \tag{4.5.6}$$

Для этого предположим, что $E \in \Im(A)$ и

$$B \cap C + E = A. \tag{4.5.7}$$

Тогда в силу модулярности решетки $\Im(A)$ имеем $B \cap C + E \cap C = C$, откуда, применяя (1.4.5), взяв в качестве D идеал $E \cap C$, получим равенство $E \cap C = C$. Это означает, что $C \subseteq E$. Из этого, используя равенство (1.5.7), выводим $A = B \cap C + E \subseteq E + E \subseteq E$ и, значит, $E = A$. Следовательно, (3.4.6) выполняется.Используя это, i-полупростоту A и формулу (1.2.7), получаем

$$B \cap C \subseteq \sum \{ D \mid D \subsetneq^{!} A \} = i\text{-}radA = 0.$$

Итак, $B \cap C = 0$, что вместе с (1.4.4) согласно следствию 2.3.1 гл. I приводит к разложению $A = B \oplus C$. Итак, произвольный идеал B выделяется прямым слагаемым, так что A − вполне приводимая m-алгебра.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть m-алгебра A вполне приводима. Тогда она i-полупроста по следствию 2. Пусть теперь $B \in \Im(A)$.По определению вполне приводимой m-алгебры существует идеал $C \in \mathfrak{I}(A)$ такой, что $A = B \oplus C$. Согласно следствию 6.2.1 гл. I тогда C есть i. а. д. для B в A.◊

4.6. Радикалы естественного К-модуля

Здесь рассматриваем некоторые свойства К-модулей, связанные с радикалами естественного К-модуля.

Лемма 1. Пусть A есть К-модуль. Тогда

$$_{\mathrm{K}}\langle\langle (rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K}) \square A \rangle\rangle \subseteq radA. \tag{4.6.1}$$

Доказательство. Как уже неоднократно отмечалось, для каждого $a \in A$ отображение φ_a: $_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \to A$, где для $x \in \mathrm{K}$ $\varphi_a(x) = x \square a$, является гомоморфизмом К-модулей. Поэтому с использованием теоремы 4.1.1 получаем $\varphi_a(rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K}) = (rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K}) \square a \subseteq radA$. Следовательно, и так как $radA \in StA$, имеем включение (4.6.1).◊

Вопрос о связи строго приводимого радикала $rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$ естественного К-модуля с радикалом Джекобсона $Rad\mathrm{K}$ m-кольца К [39] решается следующим утверждением.

Теорема 1.

$$rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K} = Rad\mathrm{K}. \tag{4.6.2}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$ через R. Сначала покажем, что

$$R \in \mathfrak{I}(\mathrm{K}), \tag{4.6.3}$$

т. е., что R является идеалом m-кольца К. В самом деле, так как $R \in St_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$, то R − идеал кольца (К, +, ·), стабильный слева. Для доказательства его инвариантности справа, т. е. включения $R \circ \mathrm{K} \subseteq R$ достаточно воспользоваться включением (4.6.1) при $A = {}_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$. В этом случае $R \circ \mathrm{K} = (rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K}) \square \mathrm{K} \subseteq rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K} = R$. Итак, (4.6.3) выполняется.

Далее, пользуясь терминологией книги [39], по определению радикала Джекобсона $Rad\mathrm{K}$ является пересечением ядер неприводимых представлений m-кольца К, и согласно следствию 9.4.3 из [39]

$$Rad\mathrm{K} = \bigcap \{(T{:}\mathrm{K}) \mid T - \text{допустимый идеал кольца } (\mathrm{K}, +, \cdot) \text{ или } T = \mathrm{K}\}. \tag{4.6.4}$$

Условия допустимости идеала T кольца (К, +, ·) были перечислены в п. 3.4. В частности, из них следует, что допустимый идеал T оказывается максимальным среди подмодулей К-модуля $_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$. Отметим, что согласно следствию 9.4.2 из книги [39] если T − допустимый идеал кольца

(К, +, ·), то $\overset{\circ}{T}$ = (T: К), где $\overset{\circ}{T}$ означает наибольший идеал m-кольца К, содержащийся в T. По аналогии с теорией почтиколец [67]…, через $\mathcal{J}_2$(К) будем обозначать пересечение ядер всех обыкновенных неприводимых представлений m-кольца К.

Докажем теперь соотношение

$$rad_{\text{К}}\text{К} \subseteq Rad\text{К} = \mathcal{J}_2(\text{К}). \qquad (4.6.5)$$

В самом деле, по теореме 9.4.1[39] фактормодуль $_{\text{К}}\text{К}\,/\,T$ неприводим для всякого допустимого идеала кольца (К, +, ·), поэтому согласно (4.1.6) и (4.5.3) $R \subseteq \overset{\circ}{T}$. Теперь по формуле (4.6.4)

$$R \subseteq \bigcap\ \{(T{:}\text{К})\ |\ T - \text{ допустимый идеал кольца (К, +, ·) или } T = \text{К}\ \} =$$

$$= Rad\text{К} = \mathcal{J}_2(\text{К}).$$

Последнее равенство верно ввиду того, что RadК является пересечением ядер всех неприводимых представлений, как чистых, так и обыкновенных, в то время как $\mathcal{J}_2$(К) является пересечением ядер только обыкновенных неприводимых представлений. Однако ядро чистого представления – это К, поэтому $Rad\text{К} = \mathcal{J}_2(\text{К})$. Итак, включение (4.6.5) доказано. Для доказательства обратного включения сначала допустим, что $St_{\text{К}}\text{К} \cap \mathcal{M}a_{\text{К}}\text{К} = \varnothing$. Тогда согласно (4.1.6) $Rad\text{К} \subseteq \text{К} = rad_{\text{К}}\text{К}$. Пусть теперь $St_{\text{К}}\text{К} \cap \mathcal{M}a_{\text{К}}\text{К} \neq \varnothing$ и $B \in St_{\text{К}}\text{К} \cap \mathcal{M}a_{\text{К}}\text{К}$. Тогда фактормодуль $_{\text{К}}\text{К}/B$ неприводим и по определению радикала Джекобсона $Rad\text{К} \subseteq B$. Теперь согласно (4.1.6)

$$Rad\text{К} \subseteq \bigcap\ \{\ B \in St_{\text{К}}\text{К}\ |\ {}_{\text{К}}\text{К}/B \ – \text{ неприводимый К- модуль}\ \} = rad_{\text{К}}\text{К}.$$

Итак, равенства (4.6.2) выполняются.◊

Вопрос о том, будет ли вполне приводимый радикал естественного К-модуля идеалом m-кольца К, пока остается открытым. Некоторые достаточные условия для этого приводятся в следующем утверждении.

Предложение 1. Пусть (К, +, ·, ∘) есть К-модуль. Тогда
$i\text{-}rad_{\text{К}}\text{К} \in \mathfrak{I}(\text{К})$, если выполняется одно из следующих условий.

1°. $\mathcal{M}aSt_{\text{К}}\text{К} \subseteq \mathcal{M}a_{\text{К}}\text{К}$.

2°. Полугруппа (К, ∘) является *левой дуополугруппой* [4, 75]…, что означает совпадение решеток левых и двусторонних идеалов этой полугруппы или выполнение условия

$$\forall a \in \text{К}\ (\ a{\circ}\text{К} \subseteq \text{К}{\circ}a \cup \{a\}). \qquad (4.6.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Если $\mathcal{M}a\mathcal{S}t_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \subseteq \mathcal{M}a_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$, то $\mathcal{M}a\mathcal{S}t_{\mathrm{K}}\mathrm{K} =$
$= St_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \cap \mathcal{M}a_{\mathrm{K}}\mathrm{K} =$, поэтому согласно (4.1.6), (4.2.7) и (4.5.3)

$$i\text{-}rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K} = \bigcap \{ C \mid C \in \mathcal{M}a\mathcal{S}t_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \} = \bigcap \{ C \mid C \in St_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \cap \mathcal{M}a_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \} =$$
$$= rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \in \Im(\mathrm{K}).$$

2°. Если $\mathcal{M}a\mathcal{S}t_{\mathrm{K}}\mathrm{K} = \varnothing$, то приходим к случаю 1°, так что можно считать, что $\mathcal{M}a\mathcal{S}t_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \neq \varnothing$ и выполняется (4.6.6). Предположим, что $B \in \mathcal{M}a_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$ и $a \in B$. Из (4.6.6) и ввиду инвариантности слева К-модуля B вытекает, что $B\circ\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}\circ B \cup B \subseteq B$, поэтому B инвариантно справа и является идеалом m-кольца К. Значит, согласно (4.2.7)

$$i\text{-}rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K} = \bigcap \{ B \mid B \in \mathcal{M}a\mathcal{S}t_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \} \in \Im(\mathrm{K}).\lozenge$$

З а м е ч а н и е 1. Понятие левой дуополугруппы происходит от понятия левого дуо-кольца [15, 44, 57, 61]…. Близкие условия *слабой коммутативности полугруппы* (К, $\circ$)

$$\forall a,b \in \mathrm{K}\ \exists x,y \in \mathrm{K} \exists k \in \mathbb{N}\ ((a \circ b)^k = x\circ a = b\circ y).$$

и *коммутаторное условие*

$$\forall a,b \in \mathrm{K}\ \exists x,y \in \mathrm{K}\ (a\circ b = x\circ a = b\circ y.$$

рассматривалось рядом авторов [25, 57] ,….

Следующий пример показывает, что в отличие от ситуации модулей над кольцами [17, теорема 9.6.3], не всегда $radP \neq P$ для ненулевого проективного К-модуля P. Так что аналог поднятия прямых разложений не проходит для К-модулей.

Пример 1. Рассмотрим m-кольцо (К, +, $\cdot$, $\circ$), где $\mathrm{K}\circ\mathrm{K} = 0$. Тогда согласно примеру 9.6.2 из [39] $Rad\mathrm{K} = \mathrm{K}$. Рассмотрим свободный К-модуль $F_{\mathrm{K}}(X)$ над множеством $X = \{x\}$. Тогда его подмодуль $P = \mathrm{K} \square x$ изоморфен естественному К-модулю ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$. Так как К-модуль F_X свободен, то существует единственный гомоморфизм ψ: $F_{\mathrm{K}}(X) \to P$ такой, что $\psi(x) = x$. При этом $Im\psi = P$ и $\psi \circ \psi = \psi$. Поэтому P является ретрактом свободного К-модуля и по теореме 5.2.1 главы I есть проективный К-модуль. Теперь, используя теорему 1 и $\mathcal{J}_2$-радикальность m-кольца К, получаем $radP =$
$= rad(\mathrm{K} \square x) \approx rad_{\mathrm{K}}\mathrm{K} = Rad\mathrm{K} = {}_{\mathrm{K}}\mathrm{K} \approx \mathrm{K} \square x = P$. Так что $radP = P$.$\lozenge$

ГЛАВА III

m-АЛГЕБРЫ С УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

§ 1. АРТИНОВЫ И НЕТЕРОВЫ *m*-АЛГЕБРЫ

1.1. Начальные свойства артиновых и нетеровых *m*-алгебр

В этой главе следуем одной из важных традиций в алгебре − изучению свойств алгебраических систем с теми или иными условиями конечности. Следуя терминологии теории колец, m-алгебру A называем *нетеровой* (*артиновой*), если любое непустое множество ее под-m-алгебр имеет максимальный (соответственно, минимальный) элемент (*условие максимальности*, соответственно, *минимальности*, для решетки под-m-алгебр). m-алгебру A называем *идеально нетеровой* (сокращенно, *i-нетеровой*), если любое непустое множество ее идеалов имеет максимальный элемент. m-алгебру A азываем *идеально артиновой* (сокращенно, *i-артиновой*), если любое непустое множество его идеалов имеет минимальный элемент. m-кольцо К называется *модульно нетеровым* (*модульно артиновым*), если естественный К-модуль $_{K}$К (нетеров (соответственно, артинов). Напомним, что убывающая цепь

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \tag{1.1.1}$$

под-m-алгебр m-алгебры A называется стабилизирующейся, если начиная с некоторого индекса все последующие члены совпадают. Аналогично для возрастающей цепи. m-алгебра A называется *конечно копорожденной* [17], если в случае нулевого пересечения семейства ее под-m-алгебр пересечение некоторого его конечного подсемейства равно нулю.

Теорема 1. Пусть A есть алгебра и $B \in \Im(A)$. Тогда следующие утверждения равносильны

А1) A – артинова m-алгебра;

А2) B и A/B – артиновы m-алгебры;

А3) каждая убывающая цепь (1.1.1) под-m-алгебр m-алгебры A стабилизируется;

А4) в каждом семействе $\{A_i\}_{i\in I}$ под-m-алгебр m-алгебры A существует конечное подсемейство $\{A_i\}_{i\in I_0}$ такое, что $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I_0} A_i$;

Кроме того, из этих утверждений следует

A5) каждая фактор-m-алгебра m-алгебры A конечно копорождена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. A1) $\Rightarrow$ A2). Пусть A – артинова m-алгебра и B − ее идеал. Тогда очевидно, что решетка $SubB$ также удовлетворяет условию минимальности. Далее, согласно второй теореме о гомоморфизмах решетка $Sub(A/B)$ изоморфна подрешетке решетки $SubA$ и поэтому тоже удовлетворяет условию минимальности. Так что B и A/B – артиновы m-алгебры.

A2) $\Rightarrow$ A3). Пусть B и A/B – артиновы m-алгебры и пусть (2.1.1) – некоторая убывающая цепь под-m-алгебр. Рассмотрим убывающую цепь $B\cap A_1 \supseteq \quad \supseteq B\cap A_2 \supseteq \ldots$ под-m-алгебр m-алгебры B. Так как последняя – артинова m-алгебра, то эта цепь стабилизируется на некоторой под-m-алгебре $B\cap A_n$, $n\in\mathbb{N}$, т. е.

$$B\cap A_n = B\cap A_{n+1} = \ldots. \tag{1.1.2}$$

Рассмотрим теперь цепь $(B + A_1)/B \supseteq \ldots \supseteq (B + A_2)/B \supseteq \ldots$ под-m-алгебр фактор-m-алгебры A/B. Так как последняя – артинова m-алгебра, то эта цепь стабилизируется на некотором подмодуле $(B + A_m)/B$, $m\in\mathbb{N}$, т. е.

$$(B + A_m)/B = (B + A_{m+1})/B = \ldots \tag{1.1.3}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $m = n$. По третьей теореме о гомоморфизмах отображение η: $a + B \mapsto a + B\cap A_n$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между элементами множества $(B + A_n)/B$ и элементами множества $A_n/(B\cap A_n)$. Так как $A_{n+1} \subseteq A_n$, то $\eta((B + {}$ ${}+ A_{n+1})/B) = ((B\cap A_n) + A_{n+1})/(B\cap A_n)$. Последнее множество равно $A_{n+1}/(B\cap A_n)$ ввиду (2.1.2), а тогда согласно (2.1.3)

$$A_n/(B \cap A_n) = \eta((B + A_n)/B) = \eta((B + A_{n+1})/B) = A_{n+1}/(B \cap A_n).$$

Отсюда следует, что $A_n = A_{n+1}$. Точно так же $A_{n+1} = A_{n+2}$ и т. д., т. е. цепь (1.1.1) стабилизируется. A3) доказано.

A3) $\Rightarrow$ A1). Если решетка $SubA$ не удовлетворяет условию минимальности, то в ней существует бесконечно убывающая цепь с попарно различными членами, так что условие A3) будет нарушаться.

Таким образом, утверждения A1), A2), A3) равносильны.

A3) $\Rightarrow$ A4). Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – некоторое бесконечное семейство под-m-алгебр m-алгебры A и $C = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Предположим, *е. а.*, что пересечение никакого конечного подсемейства этого семейства не равно C. Зафиксируем некоторый индекс $i_1\in I$ и положим $C_1 = A_{i_1}$. Тогда $C_1 \neq C$. По предположению найдется индекс $i_2 \in I \setminus \{i_1\}$, такой, что $C_1 \cap A_{i_3} \neq C_1$. Тогда положим $C_2 = C_1 \cap A_{i_2}$. Далее должен найтись такой индекс $i_3 \in I \setminus \{i_1, i_2\}$, что $C_2 \cap A_{i_3} \neq C_1$ … , $C_3 = C_2 \cap A_{i_3}$ и т. д. В результате получим бесконечно убывающую цепь под-m-алгебр $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$, что противоречит А3). А4) доказано.

А4) $\Rightarrow$ А3). Пусть (1.1.1) убывающая цепь под-m-алгебр m-алгебры A. Тогда выполняются равенства $A_2 = A_1 \cap A_2$, $A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3, \ldots, A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ввиду А4) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, что невозможно без того, чтобы цепь (1.1.1) не стабилизировалась. Так что А3) выполняется. Доказано, что все четыре утверждения А1) – А4) равносильны.

А4) $\Rightarrow$ А5). Пусть A – артинова m-алгебра и $B \in \Im(A)$. Согласно А4) фактор-m-алгебра A/B – также артинова. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – такое семейство под-m-алгебр m-алгебры A, что они все содержат B и $\bigcap_{i \in I}(A_i / B) = 0$. Согласно второй теореме о гомоморфизмах это означает, что $\bigcap_{i \in I} A_i = B$. Теперь согласно А4) существует конечное множество индексов $I_0 \subseteq I$ такое, что $\bigcap_{i \in I_0} A_i = B$. Значит, $\bigcap_{i \in I_0}(A_i / B) = 0$. Следовательно, m-алгебра A/B конечно копорождена.◊

Обозначим класс всех артиновых m-алгебр из класса $\mathcal{З}$ через $\mathcal{G}_a$, класс всех i-артиновых m-алгебр − через $\mathcal{G}_{ia}$, класс всех нетеровых m-алгебр − через $\mathcal{G}_н$, класс всех i-нетеровых m-алгебр − через $\mathcal{G}_{iн}$.

Из теоремы 1 легко вывести

С л е д с т в и е 1. Класс $\mathcal{G}_a$ замкнут справа и слева и замкнут относительно расширений.◊

m-алгебра A называется *идеально конечно копорожденной*, если для любого ее семейства идеалов с нулевым пересечением существует конечное подсемейство этого семейства с нулевым пересечением. Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. Пусть A есть m-алгебра и $B \in \Im(A)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

И1) A – i-артинова m-алгебра;

И2) каждая убывающая цепь $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ идеалов m-алгебры A стабилизируется;

И3) в каждом семействе $\{A_i\}_{i\in I}$ идеалов m-алгебры A существует конечное подсемейство $\{A_i\}_{i\in I_0}$ такое, что . $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I_0} A_i$;

И4) каждая фактор-m-алгебра m-алгебры A идеально конечно копорождена.◊

В некотором смысле двойственной выглядит ситуация с нетеровыми и i-нетеровыми алгебрами.

Теорема 3. Пусть A есть m-алгебра и $B \in \Im(A)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

Н1) A – нетерова m-алгебра;

Н2) B и A/B – нетеровы m-алгебры;

Н3) каждая возрастающая цепь

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \tag{1.1.4}$$

под-m-алгебр m-алгебры A стабилизируется.

Н4) в каждом семействе $\{A_i\}_{i\in I}$ под-m-алгебр m-алгебры A существует конечное подсемейство $\{A_i\}_{i\in I_0}$ такое, что $\bigvee\limits_{i\in I} A_i = \bigvee\limits_{i\in I_0} A_i$.

Н5) каждая под-m-алгебра m-алгебры A конечно порождена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что Н1) $\Leftrightarrow$ Н2) $\Leftrightarrow$ Н3) доказывается так же, как равносильность утверждений А1), А2), А3) в доказательстве теоремы 1.

Н1) $\Rightarrow$ Н5). Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – некоторое семейство под-m-алгебр нетеровой m-алгебры A. Ввиду следствия 2 достаточно показать, что если A – нетерова m-алгебра, то она конечно порождена. Для этого предположим, что $a_1 \in A$ и $A_1 = \langle a_1\rangle$. Если $A_1 \neq A$, то существует $a_2 \in A \setminus A_1$. Тогда положим $A_2 = \langle a_1, a_2\rangle$ и т. д., действуя таким образом, В случае, если для любого $n \in \mathbb{N}$ $A_n \neq A$, получим бесконечно возрастающую последовательность $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, что противоречит Н3). Следовательно, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $A_n = A$, и m-алгебра A конечно порождена.

Н5) $\Rightarrow$ Н3). При выполнении Н5) пусть (1.1.4) – возрастающая цепь под-m-алгебр m-алгебры A. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ . \qquad (1.1.5)$$

Ясно, что $C \in SubA$ и благодаря H5) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существуют элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in C$ такие, что $< a_1, a_2, \ldots, a_n > = C$. Из (1.1.5) тогда следует, что для некоторых индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ $a_1 \in A_{i_1}$, $a_2 \in A_{i_2}, \ldots,$ $a_n \in A_{i_n}$. Не нарушая общности, можно считать, что A_{i_n} – наибольшая из подалгебр A_{i_1}, $A_{i_2}, \ldots,$ A_{i_n}. Тогда $C = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \subseteq A_{i_n}$, откуда $C =$ $= A_{i_n}$ и, значит, цепь (1.1.4) стабилизируется.

Таким образом, утверждения H1), H2), H3), H5) равносильны.

H5) $\Rightarrow$ H4). Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ – произвольное семейство под-m-алгебр m-алгебры A. Рассмотрим под-m-алгебру $C = \bigvee_{i \in I} A_i$. Согласно H5) алгебра C конечно порождена, поэтому существует $n \in \mathbb{N}$ и элементы $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n \in C$ такие, что $< a_1, a_2, \ldots, a_n > = C$. Для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует конечное подмножество $I_j \subseteq I$ такое, что $a_j \in \bigvee_{i \in I_j} A_i$. Следовательно, $C =$ $= < a_1, a_2, \ldots, a_n > \subseteq \bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{i \in I_j} A_i = \bigvee_{i \in J} A_i$, где $J = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Отсюда следует, что $\bigvee_{i \in I} A_i = \bigvee_{i \in J} A_i$ для конечного множества индексов J. H4) доказано.

H4) $\Rightarrow$ H3). Пусть H4) выполняется и (2.1.4) – возрастающая цепь подалгебр алгебры A. Положим $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Очевидно $C = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$ Согласно H4) существует индекс $n \in \mathbb{N}$ такой, что $C = \bigvee_{i=1}^{n} A_i$ -= A_n. Следовательно, цепь (7.1.4) стабилизируется. H3) доказано. Таким образом, все утверждения H1) – H5) равносильны.◊

Как и для класса $\mathcal{G}_a$ получаем

С л е д с т в и е 2. Класс $\mathcal{G}_н$ замкнут справа и слева и замкнут относительно расширений.◊

По аналогии с теоремой 3 доказывается

Теорема 4. Пусть A есть m-алгебра. Тогда следующие утверждения равносильны:

I1) A – i-нетерова m-алгебра;

I2) каждая возрастающая цепь

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \qquad (1.1.6)$$

идеалов m-алгебры A стабилизируется;

I3) в каждом семействе $\{A_i\}_{i\in I}$ идеалов m-алгебры A существует конечное подсемейство $\{A_i\}_{i\in I_0}$ такое, что $\sum\limits_{i\in I} A_i = \sum\limits_{i\in I_0} A_i$;

I4) каждый идеал B m-алгебры A конечно порожден.◊

Из определений с помощью второй теоремы о гомоморфизмах легко следует

С л е д с т в и е 3. Классы $\mathcal{G}_{ia}$ и $\mathcal{G}_{iн}$ замкнуты справа и замкнуты относительно расширений.

Д о к а з а т е л ь с т в о по существу не отличается от доказательства соответствующей части теоремы 1.◊

С л е д с т в и е 4. Для m-алгебры A следующие утверждения равносильны:

1) m-алгебра A артинова и нетерова;

2) длина каждой цепи в решетке $SubA$ конечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждений A3 и H3 теорем 1 и 3 следует, что длина каждой цепи в решетке подалгебр артиновой и нетеровой алгебры конечна. Обратно, если нет бесконечных цепей в решетке $SubA$, то согласно тем же утверждениям m-алгебра A артинова и нетерова. ◊

Аналогично проверяется

С л е д с т в и е 5. Для m-алгебры A следующие утверждения равносильны;

1) m-алгебра A i-артинова и i-нетерова;

2) каждая цепь в решетке $\Im(A)$ конечна. ◊

Пример 1. Каждая минимальная m-алгебра A артинова и нетерова.◊

Пример 2. Каждая простая m-алгебра i-артинова и i-нетерова.◊

Лемма 1. Пусть m-алгебра A артинова. Тогда к каждой ее под-m-алгебре существует а. д.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A – артинова m-алгебра и $B \le A$. Рассмотрим множество $\Gamma = \{ C \in SubA \mid B + C = A \}$. Так как $A \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \varnothing$. Ввиду артиновости m-алгебры A множество Γ имеет минимальный элемент, который по определению является аддитивным дополнением к B.◊

У п р а ж н е н и е 1. Доказать теорему 2 и 3. ◊

У п р а ж н е н и е 2. Восстановить недостающие детали доказательства теоремы 4. ◊

У п р а ж н е н и е 3. Провести подробные доказательства следствий 4 и 6. ◊

1.2. Эндоморфизмы *m*-алгебр с условиями конечности

Пусть A есть m-алгебра, тогда множество $EndA$ ее эндоморфизмов образует полугруппу относительно операции "$\circ$" суперпозиции, а множество $AutA$ автоморфизмов m-алгебры A составляет подгруппу полугруппы $(EndA, \circ)$. Пусть $\varphi \in EndA$. Тогда обозначая $\varphi^2 = \varphi\circ\varphi$, $\varphi^3 = \varphi\circ\varphi\circ\varphi$, … – получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ будет $Im(\varphi^n) \in SubA$, $Ker(\varphi^n) \in \mathfrak{I}(A)$. Мы имеем убывающую цепь подмодулей

$$Im\varphi \supseteq Im(\varphi^2) \supseteq Im(\varphi^3) \supseteq \ldots \qquad (1.2.1)$$

и возрастающую цепь идеалов

$$Ker\varphi \subseteq Ker(\varphi^2) \subseteq Ker(\varphi^3) \subseteq \ldots \qquad (1.2.2)$$

Теорема 1. Пусть A есть m-алгебра и $\varphi \in End_K A$. Тогда справедливы следующие утверждения:

E1) если A – артинова алгебра, то существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall n \ge n_0 \; (A = Im(\varphi^n) + Ker(\varphi^n)); \qquad (1.2.3)$$

E2) если A – артинова m-алгебра и эндоморфизм φ инъективен, то $\varphi \in AutA$;

E3) если A – i-нетерова m-алгебра, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\forall n \ge n_0 \; (Im(\varphi^n) \cap Ker(\varphi^n) = 0); \qquad (1.2.4)$$

E4) если A – i-нетерова m-алгебра и эндоморфизм φ сюръективен, то $\varphi \in Aut_K A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. E1) Пусть A – артинова m-алгебра и $\varphi \in EndA$. Цепь под-m-алгебр (1.2.1) является убывающей и по теореме 1.1.1 она должна стабилизироваться. Поэтому для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ должны выполняться равенства $Im(\varphi^{n_0}) = Im(\varphi^{n_0+1}) = \ldots = Im(\varphi^{2n_0}) = \ldots$.

Значит, для любого $n \geq n_0$ должно быть $Im(\varphi^{n_0}) = \ldots = Im(\varphi^{2n_0})$, поэтому для любого $a \in A$ $\varphi^n(a) \in Im(\varphi^{2n})$ и для некоторого $b \in A$ выполняется равенство $\varphi^n(a) = \varphi^{2n}(b)$. Из этого следует, что $\varphi^n(a - \varphi^n(b)) = 0$, $a - \varphi^n(b) \in Ker(\varphi^n)$ и $a = \varphi^n(a) + (a - \varphi^n(b)) \in Im(\varphi^n) + Ker(\varphi^n)$. Так как a – произвольный элемент из A, отсюда заключаем, что верно (2.2.3);

E2) если φ инъективен, то φ^n – также инъективен, поэтому $Ker(\varphi^n) = 0$ и из (1.2.3) вытекает, что $Im(\varphi^n) = A$, эндоморфизм φ^n сюръективен, а вместе с ним и φ. Значит, $\varphi \in AutA$;

E3) пусть теперь A – i-нетерова m-алгебра. Тогда цепь идеалов (1.2.2) должна стабилизироваться согласно теореме 1.1.4, так что для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ должны выполняться равенства $Ker(\varphi^{n_0}) = Ker(\varphi^{n_0+1}) =$ $= \ldots = Ker(\varphi^{2n_0}) = \ldots$. Значит, для любого $n \geq n_0$ должно быть $Ker(\varphi^n) =$ $= Ker(\varphi^{2n})$. Если теперь $a \in Im(\varphi^n) \cap Ker(\varphi^n)$, то для некоторого $b \in A$ выполняется равенство $a = \varphi^n(b)$, поэтому $0 = \varphi^n(a) = \varphi^{2n}(b)$. Следовательно, $b \in Ker(\varphi^{2n}) = Ker(\varphi^n)$ и $a = \varphi^n(b) = 0$. Итак, $Im(\varphi^n) \cap Ker(\varphi^n) = 0$ и выполняется (2.2.4).

E4) если теперь φ сюръективен, то φ^n тоже сюръективен и из (1.2.4) немедленно следует, что $Ker(\varphi^n) = 0$ и φ^n инъективен, поэтому φ инъективен и $\varphi \in Aut_K A$.◊

С л е д с т в и е 1. Пусть A – артинова и i-нетерова m-алгебра и пусть $\varphi \in End_K A$. Тогда:

1) существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n \geq n_0$ ($A = Im(\varphi^n) \leftthreetimes Ker(\varphi^n)$);

2) то, что φ является автоморфизмом, равносильно тому, что φ сюръективен и тому, что φ инъективен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) если A – артинова и i-нетерова m-алгебра, то из утверждений E1) и E3) следует, что для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ и для любого $n \geq n_0$ выполняются равенства $A = Im(\varphi^n) + Ker(\varphi^n)$ и $Im(\varphi^n) \cap Ker(\varphi^n) = 0$. Так как $Im(\varphi^n) \in SubA$ и $Ker(\varphi^n) \in \Im(A)$, то по определению полупрямого произведения $A = Im(\varphi^n) \leftthreetimes Ker(\varphi^n)$;

2) непосредственно следует из утверждений E2) и E4).◊

Уп р а ж е н и е 1. Доказать следующее утверждение. Если A – артинова и i-нетерова m-алгебра, то полугруппа ее эндоморфизмов является (идеальным) расширением [18] ниль-полугруппы при помощи группы с внешне присоединенным нулем.◊

1.3. *m*-кольцо многочленов над нетеровым кольцом

Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей 1 и является нетеровым (т. е. с условием максимальности для идеалов) кольцом. Нас интересует аналог теоремы Гильберта о базисе для К-модулей (теорема 6.1.3[17]). В качестве m-кольца К рассматриваем m-кольцо $(R[x]x, +, \cdot, \circ)$ многочленов без свободного члена от переменной x над кольцом R [39]. Отметим, что это m-кольцо нуль-симметрично. В качестве К-модуля A будем рассматривать кольцо $(R[x], +, \cdot)$ многочленов над R или кольцо $(R[x]x, +, \cdot)$ многочленов без свободного члена, где действие элемента $f \in$К на элемент $g \in A$ определяется как в естественном К-модуле через суперпозицию:

$$f \,\square\, g = f \circ g. \tag{1.3.1}$$

Перед формулировкой основного результата потребуется несколько лемм.

Лемма 1. Пусть J – идеал кольца многочленов $A = R[x]$. Тогда J стабилен в К-модуле A и, значит, является идеалом этого К-модуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая формулу (1.3.1), требуется доказать, что для любых многочленов $f, g \in R[x]$ и $h \in R[x]x$, если $f \in J$, то

$$h \,\square\, (g + f) - h \,\square\, g = h \circ (g + f) - h \circ g \in J. \tag{1.3.2}$$

Но это, собственно, было уже показано в доказательстве достаточности теоремы 1.4.2 из книги [39] для случая, когда R – поле, с использованием только того, что R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Так что можно считать, что J стабилен в К-модуле A.◊

З а м е ч а н и е 1. В случае К-модуля $A = R[x]x$ не обязательно всякий идеал кольца $(A, +, \cdot)$ является идеалом К-модуля A. Например, если $R = \mathbb{R}$ – поле действительных чисел, то множество $J = \mathbb{Z}\,x + \mathbb{R}\,[x]x^2$ есть идеал кольца A, но не стабилен в К-модуле A так как не инвариантен слева в кольце A. В самом деле, если $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, то в соответствии с (1.3.1) $(ax) \,\square\, x = (ax) \circ x = ax \notin J$.◊

Ситуацию проясняет следующая

Лемма 2. Пусть J – идеал кольца $A = R[x]x$. Для того чтобы J был идеалом К-модуля A, необходимо и достаточно, чтобы J был идеалом кольца $R[x]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть J – идеал кольца $R[x]$, содержащийся в $R[x]x$. Тогда J является также и идеалом кольца $R[x]x$. Далее, если $f \in J$, $h \in$ К, то соотношение (1.3.2) выполняется для любого $g \in R[x]$ и тем более для любого $g \in R[x]x$. Следовательно, J стабилен в К-модуле A и является в нем идеалом.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть J – идеал кольца $A = R[x]x$ и стабилен в К-модуле A. Покажем, что J является идеалом кольца $R[x]$. Для этого достаточно установить включение $R[x]J \subseteq J$. Пусть $f \in J$ и $g \in R[x]$. Тогда

$g(x) = h(x)x + a$ для некоторого $h \in R[x]$ и $a \in R$. Так как J – идеал кольца $R[x]x$, то $h(x)xf(x) \in J$, а так как J устойчив в К-модуле A, то $(ax) \square f(x)$ = $= (ax) \circ f(x) = a f(x) \in J$. Следовательно, $g(x)f(x) = (h(x)x + a) f(x) = h(x)x f(x) +$ $+ a f(x) \in J + J \subseteq J$. Отсюда ввиду произвольности f и g следует, что $R[x]J \subseteq J$.◊

Объединяя утверждения этих двух лемм, получаем

С л е д с т в и е 1. Пусть J – идеал кольца A, где $A = R[x]$ или $A = R[x]x$. Для того чтобы J был идеалом К-модуля A, необходимо и достаточно, чтобы J был идеалом кольца $R[x]$.

Теорема 1. Пусть R – коммутативное ассоциативное нетерово кольцо с единицей 1 и кольцо $A = R[x]$ или $A = R[x]x$ рассматривается как К-модуль, где $К = R[x]x$ – m-кольцо многочленов без свободного члена от переменной x над кольцом R. Тогда A – i-нетеров К-модуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть J – произвольный идеал К-модуля A. Тогда согласно следствию 1 J является идеалом кольца $R[x]$. Если мы покажем, что J идеально конечно порожден, то согласно теореме 1.1.4 будет установлено, что A является идеально нетеровым К-модулем. Можно предполагать, что $J \neq 0$. Для многочлена $f(x) \in R[x]$ через $deg(f(x))$ обозначается его степень (в частности, степень нулевого многочлена $O(x)$ считается равной ∞), а через $\mathrm{S}(f(x))$ – его старший коэффициент (при этом полагаем $\mathrm{S}(O(x)) = 0$). Далее, положим

$$J_0 = \{ \mathrm{S}(f(x)) \mid f(x) \in J \}. \tag{1.3.3}$$

Опираясь на то, что J – идеал кольца $R[x]$, так же как и в доказательстве теоремы 6.1.3[17] устанавливается, что J_0 является идеалом кольца R. Ввиду нетеровости этого кольца идеал J_0 конечно порожден, а это значит в соответствии с (1.3.3), что существуют элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$, где $m \in \mathbb{N}$, и многочлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x) \in J$ такие, что

$$J_0 = a_1R + a_2R + \ldots + a_mR \tag{1.3.4}$$

и

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \; (a_i = \mathrm{S}(f_i(x)). \tag{1.3.5}$$

Умножая многочлены $f_i(x)$ на соответствующие степени переменной x, мы можем добиться того, что у них будут одинаковые степени, скажем, равные числу $n \in \mathbb{N}$, при этом они останутся в идеале J и будут удовлетворять соотношению (1.3.5). Положим

$$B = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)R[x]. \tag{1.3.6}$$

Так как J является идеалом кольца $R[x]$ и $f_i(x) \in J$ для $i \in \{1,2,...,m\}$, то из (1.3.6) следует, что $B \subseteq J \subseteq R[x]x$. Также из этой формулы видно, что B является идеалом кольца $R[x]$ (и тем более кольца $R[x]x$). Теперь согласно следствию 1 получаем, что B – идеал К-модуля A, причем наименьший среди содержащих все многочлены $f_i(x)$, $i \in \{1,2,...,m\}$. Так что B конечно порожден как идеал К-модуля A.

Рассмотрим произвольный многочлен $f(x) \in J$. Мы утверждаем, что

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{1.3.7}$$

для некоторых многочленов $g(x) \in B$ и $h(x) \in A$, причем $deg(h(x)) \le n$. Это будем доказывать по индукции по степени многочлена $f(x)$. Если $deg(f(x)) \le n$, то доказывать нечего. Предположим теперь, что $deg(f(x)) = = l > n$. Пусть $a = \mathsf{S}(f(x))$. Согласно (2.3.3) $a \in J_0$ и благодаря (1.3.4) имеем разложение $a = a_1 r_1 + a_2 r_2 + ... + a_m r_m$, где $r_1, r_2, \ldots, r_m$ – какие-то элементы из R. Рассмотрим многочлен

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x) x^{l-n}. \tag{1.3.8}$$

Этот многочлен принадлежит J как идеалу кольца $R[x]$ и имеет степень, меньшую l, поэтому по предположению индукции $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) + h(x)$ для некоторых многочленов $\tilde{g}(x) \in B$ и $h(x) \in A$, причем $deg(h(x)) \le n$. Значит, согласно (1.3.8) $f(x) = (\tilde{g}(x) + \sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x) x^{l-n}) + h(x)$ и так как благодаря (1.3.6) $\sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x) x^{l-n} \in B$, то в качестве многочлена $g(x)$ в равенстве (1.3.7) можно взять многочлен $\tilde{g}(x) + \sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x) x^{l-n}$. Доказано, что всякий многочлен представляется в виде (2.3.7). Рассмотрим множество

$$C = (R + R\,x + R\,x^2 + \ldots + R\,x^n) \cap J. \tag{1.3.9}$$

Рассмотрим его как R-модуль (в кольцевом смысле). Как подмодуль конечно порожденного R-модуля $R + R\,x + \quad + R\,x^2 + \ldots + R\,x^n$ R-модуль C конечно порожден, скажем, согласно утверждениям 6.1.3 и 6.1.2 книги [39]. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\{ q_1(x), q_2(x), \ldots q_k(x) \}$ – порождающее множество R-модуля C. Тогда

$$C = \sum_{j=1}^{k} q_j(x) R. \tag{1.3.10}$$

Мы утверждаем,что

$$J = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)R[x] + \sum_{j=1}^{k} q_j(x)R. \qquad (1.3.11)$$

Обозначим через $\tilde{J}$ правую часть этого равенства. Так как все многочлены $f_i(x)$ и $q_j(x)$, $i \in \{1,2,...,m\}$, $j \in \{1,2,...,k\}$ принадлежат J, который является идеалом кольца $R[x]$, то

$$\tilde{J} \subseteq J \qquad (1.3.12)$$

и согласно следствию 1 $\tilde{J}$ будет являться наименьшим идеалом К-модуля A среди содержащих эти многочлены так как является идеалом кольца $R[x]$, порожденным этими же многочленами. Остается доказать обратное включение к (1.3.12). Для этого предположим, что $f(x) \in J$. Тогда имеет место разложение (1.3.7), где $g(x) \in B$ и $h(x) \in A$, причем $deg(h(x)) \le n$. Так как $h(x) = f(x) - g(x) \in J - B \subseteq J - J \subseteq J$, то согласно (1.3.9) $h(x) \in C$. Следовательно, используя (1.3.6), (1.3.7), (1.3.10) и (1.3.11), имеем

$$f(x) = g(x) + h(x) \in B + C = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)R[x] + \sum_{j=1}^{k} q_j(x)R \subseteq$$

$$\subseteq \sum_{i=1}^{m} f_i(x)R[x] + \sum_{j=1}^{k} q_j(x)R[x] = \tilde{J}.$$

Следовательно, $J \subseteq \tilde{J}$ и равенство (1.3.11) выполняется, так что идеал J конечно порожден как идеал К-модуля A. Теорема доказана.◊

§ 2. СТРОГО ПРИВОДИМЫЕ И ПОЛУПРОСТЫЕ *m*-АЛГЕБРЫ С УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

2.1. Строго приводимые и вполне приводимые *m*-алгебры с условиями конечности

Опираясь на результаты п. 1.3 главы II, можем охарактеризовать строго приводимые m-алгебры с условиями конечности

Теорема 1. Пусть A – строго приводимая m-алгебра. Тогда следующие утверждения равносильны.

1˚. A есть сумма конечного числа идеалов, являющихся минимальными под-m-алгебрами.

2˚. A есть прямая сумма конечного числа минимальных под-m-алгебр

3°. A имеет конечную длину.

4°. A имеет конечную идеальную длину..

5°. A – артинова m-алгебра.

6°. A – нетерова m-алгебра.

7°. A – i-артинова m-алгебра.

8°. A – i-нетерова К m-алгебра.

9°. A конечно порождена.

10°. A конечно копорождена.

11°. A идеально конечно порождена.

12°. A идеально конечно копорождена.

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Доказывается так же, как утверждение B1) следствия 1.3.4 главы II .

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A = \sum_{i=1}^{n} {}^{\oplus} A_i$ – разложение m-алгебры A в прямую сумму минимальных под-m-алгебр. Тогда цепь под-m-алгебр

$$A_0 = 0 \ A_1 \lhd A_1 + A_2 \lhd \ldots \lhd A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A \tag{2.1.1}$$

является нормальной и это – композиционный ряд, так как каждый фактор $(\sum_{i=1}^{l} {}^{\oplus} A_i) / (\sum_{i=1}^{l-1} {}^{\oplus} A_i) \approx A_l$, где $l \in \{2, \ldots, n\}$, является неприводимой К m-алгеброй, поэтому этот ряд нельзя уплотнить. Так что A имеет конечную длину.

$2^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Так как A – строго приводимая m-алгебра, то согласно следствию 1.3.1 главы II она гамильтонова, поэтому $SubA = \Im(A)$ и ряд (2.1.1) является главным рядом. Таким образом, A имеет конечную идеальную длину.

$3^\circ \Rightarrow 5^\circ$, $3^\circ \Rightarrow 6^\circ$. Пусть длина композиционного ряда m-алгебры A равна n. Покажем, что всякая цепь в решетке $SubA$ конечна и тогда в соответствии со следствием 2.1.5 A – артинова и нетерова m-алгебра. В самом деле, если это не так, то существует бесконечная цепь в решетке $SubA$. Из этой цепи можно выбрать конечную цепь, скажем, Γ длины, большей n. Ввиду гамильтоновости A $Sub\,A = \Im(A)$, поэтому цепь Γ является нормальным рядом, который согласно следствию 1.4.1 главы I можно уплотнить до композиционного ряда длины, большей n, что будет противоречить тому же следствию.

$4^\circ \Rightarrow 7^\circ$, $4^\circ \Rightarrow 8^\circ$. Аналогично предыдущему абзацу с использованием следствия 2.1.6 (этой главы) и следствия 1.4.2 главы I.

$5^\circ \Rightarrow 10^\circ$, $6^\circ \Rightarrow 9^\circ$, $7^\circ \Rightarrow 12^\circ$, $8^\circ \Rightarrow 11^\circ$. Эти утверждения следуют прямо из теорем 1.1.1, 1.1.3, 1.1.2, 1.1.4 соответственно.

$9^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть A – строго приводимая конечно порожденная m-алгебра и $A = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i$ – разложение m-алгебры A в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных под-m-алгебр. Тогда $A = \bigvee_{i\in I} A_i$. Так же, как и в доказательстве H5) $\Rightarrow$ H4) теоремы 1.1.3, опираясь на конечную порожденность A, доказывается, что существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что $A = \bigvee_{i\in J} A_i$. Так как все под-m-алгебры семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ – это идеалы, то $A = \sum_{i\in J} A_i$, что и требовалось.

$10^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть A – строго приводимая конечно копорожденная m-алгебра и

$$A = \sum_{i\in I}{}^{\oplus} A_i(\pi_i) \quad – \tag{2.1.2}$$

ее разложение в прямую сумму семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ минимальных под-m-алгебр, где для $i\in I$ $\pi_i : A \to A_i$ – естественная проекция. Если множество I конечно, то доказывать нечего. Далее предположим, что I бесконечно и придем к противоречию. С этой целью для каждого $J \in FinI$ положим $B_J = \sum_{j\in I\setminus J} A_j$. Покажем, что

$$\bigcap_{J\in FinI} B_J = 0. \tag{2.1.3}$$

Действительно, если это не так, то существует ненулевой элемент $a \in \bigcap_{J\in FinI} B_J$. Из (3.1.2) следует, что $a = \sum_{i\in J} \pi_i(a)$ для некоторого конечного множества $L \subseteq I$. Но тогда $a \in (\sum_{i\in L} A_i) \cap \bigcap_{J\in FinI} B_J \subseteq (\sum_{i\in L} A_i) \cap B_L = 0$,

что приводит к противоречию. (2.1.3) доказано. Теперь из конечной копорожденности К-модуля A тогда следует, что существует $n \in \mathbb{N}$ и подмножества $J_1, J_2,\ldots, J_n \in FinI$ такие, что $B_{J_1} \cap B_{J_2} \cap \ldots \cap B_{J_n} = 0$, однако идеал $B_{J_1} \cap B_{J_2} \cap \ldots \cap B_{J_n} = B_{\bigcup_{i=1}^{n} J_i}$ не может быть нулевым ввиду бесконечности I. Тем самым доказано, что A есть сумма конечного числа минимальных под-m-алгебр.

$11^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Аналогично доказательству $9^\circ \Rightarrow 1^\circ$

$12^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Аналогично доказательству $10^\circ \Rightarrow 1^\circ$.◊

Теорема 2. Для того чтобы m-алгебра A был строго приводимой и конечно порожденной, необходимо и достаточно, чтобы она был полупростой, артиновой и гамильтоновой.

Доказательство. Необходимость. Пусть m-алгебра A строго приводима и конечно порождена. Согласно следствию 4.5.2 гл. II из строгой приводимости следует ее полупростота. По следствию 1.3.1 гл. II A гамильтонова. Наконец, согласно теореме 1. A − артинова m-алгебра.

Достаточность. Пусть m-алгебра A артинова, гамильтонова и $radA = 0$. Предположим, что $B \le A$. Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{C \le A \mid A = B \vee C\}.$$

Так как $A \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \varnothing$. Ввиду артиновости m-алгебры A в Γ существует минимальный элемент, который по определению будет аддитивным дополнением к B, и он будет идеалом m-алгебры A благодаря гамильтоновости последней. Отсюда согласно теореме 4.5.1 гл. II приходим к тому, что A − строго приводимая m-алгебра. Снова используя теорему 1 и артиновость A, заключаем, что m-алгебра A конечно порождена.◊

Следствие 2. Пусть m-алгебра A полупроста, артинова и гамильтонова. Тогда она нетерова и строго приводима.

Доказательство. Согласно теореме 2 полупростая, артинова и гамильтонова m-алгебра A строго приводима и конечно порождена. Пусть B − под-m-алгебра такой m-алгебры. Согласно следствию 4.1.1 гл. II $radB \subseteq radA = 0$, так что m-алгебра B полупроста. Из теоремы 1.1.1 этой главы и следствия 1.2.1 гл. II следует, что этот m-алгебра артинова и гамильтонова. Снова применяя теорему 2, приходим к тому, что B конечно порождена. По теореме 1.1.2 A − нетерова m-алгебра.◊

Следствие 3. Если m-алгебра A артинова и гамильтонова, то ее фактор-m-алгебра $A/radA$ строго приводима.

Доказательство. Обозначим $R = A/radA$. Согласно следствию 1.1.2 из артиновости A следует артиновость ее фактор-m-алгебры R, а согласно следствию 1.2.2 гл. II R − гамильтонова m-алгебра. Благодаря теореме 4.1.4 гл. II R полупрост, и остается воспользоваться предыдущей теоремой 2 для установления строгой приводимости m-алгебры R.◊

Теорема 3. m-алгебра A вполне приводима и идеально конечно копорождена в том и только в том случае, если она i-артинова и i-полупроста.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть m-алгебра A вполне приводима и идеально конечно копорождена. Согласно следствию 4.5.2 гл. II она тогда i-полупроста, а по теореме 1.1.2 i-артинова.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что m-алгебра A i-артинова и i-полупроста и пусть $B \in \Im(A)$. Рассмотрим множество $\Gamma = \{ C \trianglelefteq A \mid B + + C = A \}$. Так как $A \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \varnothing$. Ввиду i-артиновости A Γ имеет минимальный элемент, скажем, D. Легко видеть, что D является i. а. д. для B в A. Применяя теорему 4.5.2 гл. II , получаем, что m-алгебра A вполне приводима. То, что A идеально конечно копорождена, следует из теоремы 1.1.2.◊

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что для вполне приводимой m-алгебры A следующие утверждения равносильны:

1°. A есть сумма конечного числа идеалов, являющихся простыми m-алгебрами.

2°. A есть прямая сумма конечного числа простых m-алгебр.

3°. A имеет конечную идеальную длину..

4°. A – i-артинова m-алгебра.

5°. A – i-нетерова m-алгебра.

6°. A идеально конечно порождена.

7°. A идеально конечно копорождена.◊

2.2. Конечно-порожденные и конечно-копорожденные *m*-алгебры

Предложение 1. Пусть для m-алгебры A выполняются следующие условия:

а) $radA \subsetneq A$;

б) m-алгебра $A/radA$ конечно порождена.

Тогда сама m-алгебра A конечно порождена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия а) и б) выполняются. Положим $R = radA$. Ввиду б) существует $n \in \mathbb{N}$ и элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ такие, что $< a_1 + R, a_2 + R, \ldots, a_n + R > = A/R$.. Отсюда следует, что

$< a_1, a_2, \ldots, a_n > + radA = A$. и согласно (a) $< a_1, a_2, \ldots, a_n > = A$. Значит, m-алгебра A конечно порождена.◊

Из этого и из теоремы 1.1.2 непосредственно вытекает.

С л е д с т в и е 1. Если для каждой под-m-алгебры m-алгебры A выполняются условия (а) и (б) предыдущего предложения, то m-алгебра A нетерова.◊

Более сильный аналог предложения 1 для вполне приводимого радикала выглядит следующим образом.

Теорема 1. m-алгебра A идеально конечно порождена тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

а) $i\text{-}radA \subsetneq A$;

б) m-алгебра $A / i\text{-}radA$ идеально конечно порождена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть m-алгебра A идеально конечно порождена. Тогда $i\text{-}radA \subsetneq A$ согласно утверждению б) предложения 4.2.2 гл. II. Далее, по второй теореме о гомоморфизмах свойство m-алгебры быть идеально конечно порожденной сохраняется при сюръективных гомоморфизмах, поэтому б) выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что условия а) и б) выполняются. Обозначим $i\text{-}radA$ через R. Тогда для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство $<< a_1 + R, a_2 + R, \ldots, a_n + R >> =$ $= A / R.$, $\neq 0$, откуда следует, что $<< a_1, a_2, \ldots, a_n >> + i\text{-}radA = A$, и ввиду того, что $i\text{-}radA \subsetneq A$, отсюда вытекает равенство $A = << a_1, a_2, \ldots, a_n >>$, так что m-алгебра A идеально конечно порождена.◊

Теорема 2. Для m-алгебры A следующие утверждения равносильны:

а) A конечно копорождена;

б) m-алгебра $SocA$ конечно копорождена и $SocA \subsetneq A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) $\Rightarrow$ б) пусть m-алгебра A конечно копорождена. Предположим, что $B \leq A$ и $B \neq 0$. Покажем, что B содержит некоторую минимальную под-m-алгебру. Для этого рассмотрим множество $\Gamma = \{ C \leq B \mid C \neq 0\}$. Так как $B \neq 0$, то $B \in \Gamma \neq \varnothing$. Упорядочим Γ по обратному включению, т. е. для $C_1, C_2 \in \Gamma$ положим $C_1 \tilde{\leq} C_2 \Leftrightarrow C_2 \subseteq C_1$. Пусть $\Lambda = \{ C_j \mid j \in J \}$ − произвольная максимальная цепь в Γ и положим $D = \bigcap\limits_{j \in J} C_j$. Покажем, что D есть наибольший элемент в Λ. Так как $D \subseteq B$, то для этого, очевидно, достаточно показать, что $D \in \Gamma$. Если это не так, то по определению $\Gamma = \bigcap\limits_{j \in J} C_j = 0$, а тогда ввиду конечной копорожденности A отсюда следует, что $\bigcap\limits_{j\in J} C_j = 0$ для некоторого конечного множества индексов $J_0 \subseteq J$. Но тогда некоторый элемент из цепи Λ равен нулю, что противоречит тому, что Λ состоит из ненулевых под-m-алгебр. Противоречие показывает, что упорядоченное множество $(\Gamma, \tilde{\leq})$ индуктивно и по лемме Цорна должно иметь максимальный элемент, скажем, C_0. Очевидно, что C_0 и есть минимальная под-m-алгебра m-алгебры B. Теперь по определению цоколя $C_0 \subseteq B \cap SocA \neq 0$. Следовательно, выполняется соотношение $\forall B \leq \grave{A}\ (B \cap SocA = 0 \Rightarrow B = 0)$. Это означает как раз то, что $SocA \subsetneqq A$. То, что m-алгебра $SocA$ конечно копорождена, следует из того, что решетка $SubSocA$ является подрешеткой решетки $SubA$;

б) $\Rightarrow$ а) предположим, что $\{ C_j \mid j \in J \}$ − произвольное семейство под-m-алгебр m-алгебры A такое, что

$$\bigcap_{j\in J} C_j = 0. \tag{2.2.1}$$

Из определения цоколя видно, что для любой под-m-алгебра $B \leq A$ должно быть $SocB = B \cap SocA$, поэтому из (2.2.1) выводим $0 = (\bigcap\limits_{j\in J} C_j) \cap SocA =$ $\bigcap\limits_{j\in J}(C_j \cap SocA)$. Отсюда ввиду конечной копорожденности m-алгебры $SocA$ вытекает, что $0 = (\bigcap\limits_{j\in J_0} C_j) \cap SocA$ для некоторого конечного множества индексов $J_0 \subseteq J$. Но тогда из предположения $SocA \subsetneqq A$ следует, что $\bigcap\limits_{j\in J_0} C_j = 0$. Мы доказали, что m-алгебра A конечно копорождена.◊

С л е д с т в и е 2. m-алгебра A артинова тогда и только тогда, когда для любого ее идеала B выполняются соотношения :

а) $Soc(A/B) \subsetneqq A/B)$;

б) m-алгебра $Soc(A/B)$ конечно копорождена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть A − артинова m-алгебра и $B \in SubA$. Тогда согласно теореме 1.1.1 m-алгебра A/B артинова и является конечно копорожденной m-алгеброй, поэтому для нее должны выполняться условия а) и б) теоремы 2.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для каждого идеала B m-алгебры A выполняются условия а) и б). Тогда согласно теореме 3 каждая фактор-m-

алгебра m-алгебры A конечно копорождена, а тогда по теореме 1.1.1 A − артинова m-алгебра.◊

В связи с определением цоколя m-алгебры (п.1.3) приведем некоторые достаточные условия, чтобы $SocA = W_1$, где $W_1 = \bigcap \{B \mid B \overset{\times}{\subseteq} A\}$. При этом используем обозначения упомянутого выше пункта 1.3.

Предложение 2. Пусть A есть m-алгебра. Тогда каждое из следующих условий достаточно для выполнения равенства $SocA = W_1$.

1°. m-алгебра A атомная.

2°. m-алгебра A артинова.

3°. m-алгебра A вполне разложима, в частности, строго приводима.

4°. m-алгебра A гамильтонова.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Предположим, что каждая ненулевая под-m-алгебра содержит минимальную под-m-алгебру и предположим, что $W_2 \neq W_1$. Тогда согласно лемме 1.3.1 $W_2 < W_1$. Из этого ввиду того, что по следствию 6.1.6 гл. I множество $Sub^{\times} A$ является фильтром решетки $SubA$, вытекает не существенность под-m-алгебры W_2. Вследствие этого существует ненулевая под-m-алгебра $B \leq A$ такая, что $W_2 \cap B = 0$. Если теперь C − минимальная под-m-алгебра, содержащаяся в B, то $W_2 \cap C =$ $= 0$. Однако это противоречит определению $W_2 = \bigvee\limits_{C \propto A} C$.

2°. Пусть m-алгебра A артинова. Если $0 \neq B \in SubA$, то множество $(\downarrow B) \setminus \{0\}$ ввиду артиновости m-алгебры A имеет минимальный элемент, который, очевидно, является минимальной m-алгеброй. Значит, решетка $SubA$ атомна и согласно предыдущему $W_2 = W_1$.

3°. Предположим, что A − вполне разложимая m-алгебра. Тогда A является прямой суммой минимальных под-m-алгебр, поэтому $W_1 \subseteq A =$ $= \bigvee\limits_{C \propto A} C = W_2$ и $W_2 = W_1$.

4°. Пусть A − гамильтонова m-алгебра. Покажем сначала, что m-алгебра W_1 строго приводима. В самом деле, пусть $C \leq W_1$. Тогда согласно лемме 6.2.1 гл. I для C существует под-m-алгебра D, которая является д.п. для C в A. Отсюда ввиду гамильтоновости A и согласно следствию 2.2.2 гл. I $C \vee D = C + D = C \oplus D$. Обозначим под-$m$-алгебру $C + D$ через E и докажем, что $E \overset{\times}{\subseteq} A$. В самом деле $\Im(A) = SubA$ благодаря гамильтоновости A, поэтому идеал D является i. д. п. для идеала C в A. Но тогда согласно утверждению г) леммы 6.2.5 гл. I $E \overset{\urcorner}{\subseteq} A$ и, таким образом, $E \overset{\times}{\subseteq} A$. Отсюда по определению W_1 имеем включение $W_1 \subseteq E = C + D$. Теперь используя модулярность решетки $\Im(A)$, получаем $W_1 = W_1 \cap (C + D) =$

$= C + (W_1 \cap D) = C \oplus (W_1 \cap D)$. Это означает, что C выделяется прямым слагаемым. Ввиду произвольности C отсюда по определению выводим, что W_1 является строго приводимой К m-алгеброй. Привлекая теперь теорему 1.3.2 гл. II**,** получаем, что W_1 − вполне разложимая m-алгебра. Пусть $\iota\colon W_1 \to A$ − вложение под-m-алгебры W_1 в A. Тогда согласно (3.3.1), (3.3.4) и лемме 1.3.1 имеем

$$\iota(W_1) \subseteq \bigvee \{ Im\varphi \mid \varphi \in Hom(B, A), B - \text{вполне разложимая } m\text{-алгебра} \} =$$

$$= SocA \subseteq \iota(W_1).$$

Следовательно, $W_2 = SocA = W_1$.◊

2.3. Полупростые *m*-алгебры с условиями конечности

Напомним (п.1.2), что для $B, C \in SubA$ пишем $B \prec\!\!\!- C$, если $B \in \mathcal{M}a\, C$. Введем еще одно обозначение: $B \prec C$, если $B \in \Im(A) \cap \mathcal{M}aC$.

Теорема 1. Пусть m-алгебра A полупроста и $A \neq 0$. m-алгебра A конечно копорождена тогда и только тогда, когда решетка $SubA$ градуирована (п. 1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $radA = 0$ и m-алгебра A конечно копорождена. Согласно (1.1.6) тогда $0 = radA =$ $= \bigcap \{ C \in \Im(A) \mid A/C$ – минимальная m-алгебра$\}$. Ввиду конечной копорожденности A отсюда следует существование конечного множества $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, идеалов m-алгебры A таких, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ m-алгебра $B_i = A/C_i$ минимальна, и

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = 0. \tag{2.3.1}$$

Отсюда следует (теорема 2.4.1 гл. I), что m-алгебра A является подпрямым произведением семейства m-алгебр $\{B_i\}_{i=1}^{n}$, т. е. можно считать, что

$A \le \prod_{i=1}^{n} B_i(\pi_i)$, где π_i − естественная проекция $\prod_{i=1}^{n} B_i(\pi_i)$ на B_i, и

$\pi_i(A) = B_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Докажем по индукции по n, что решетка $SubA$ градуирована.

Если $n = 1$, то $A = B_1$, решетка $SubA$ двухэлементна и, очевидно, градуирована. Пусть далее $n > 1$ и будем использовать предположение индукции, что подпрямое произведение меньшего числа минимальных сомножителей имеет градуированную решетку под-m-алгебр. Для этого предположим, что для некоторого $a \in A$ $\pi_i(a) \neq 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $i = 1$. Если $Ker\,\pi_1 = 0$, то ввиду сюрьективности π_1 этот гомоморфизм является изоморфизмом, так что A минимальна и ее решетка подмодулей градуирована. Далее рассматриваем случай $Ker\,\pi_1 \neq 0$. Тогда ввиду минимальности фактор-m-алгебры A/C_1 идеал C_1 является максимальной под-m-алгеброй в A. Мы можем считать, что $C_1, C_2,\ldots, C_n$ − различные идеалы из $\mathcal{M}a\,A$. Поэтому для каждого $i\in\{2,\ldots, n\}$ имеет место равенство

$$C_1 + C_i = A. \tag{2.3.2}$$

Покажем, что C_1 является подпрямым произведением минимальных m-алгебр $B_2,\ldots, B_n$. В самом деле из (2.3.1) следует, что

$$\bigcap_{i=2}^{n} C_1 \cap C_i = \bigcap_{i=1}^{n} C_i = 0. \tag{2.3.3}$$

По третьей теореме о гомоморфизмах для $i\in\{2,\ldots, n\}$ имеем, используя (3.3.2) $B_i = A/C_i \approx (C_1 + C_i)/C_i \approx C_1/(C_1\cap C_i)$. Отсюда следует, что фактор-m-алгебры $C_1/(C_1\cap C_i)$ минимальны и благодаря (3.3.3) m-алгебра C_1 изоморфна подпрямому произведению семейства $\{B_i\}_{i=2}^{n}$ минимальных m-алгебр, и тогда по предположению индукции решетка $SubC_1$ градуирована. Пусть теперь $H\in SubA \setminus \{A\}$. Покажем, что через H проходит некоторый максимальный ряд m-алгебры A. В самом деле, если $H \subseteq C_1$, то ввиду градуированности m-алгебры C_1 через H проходит некоторый максимальный ряд

$$0 = D_1 \prec D_2 \prec \ldots \prec D_m = C_1 \tag{2.3.4}$$

m-алгебры C_1, где $m\in \mathbb{N}$. Так как $C_1\in\Im(A)\cap\mathcal{M}aA$, то $C_1 \prec A$, и мы имеем максимальный ряд

$$0 = D_1 \prec D_2 \prec \ldots \prec D_m = C_1 \prec A,$$

m-алгебры A, проходящий через H.

Далее предположим, что $H \not\subseteq C_1$. Тогда рассмотрим подмодуль $D = H\cap C_1$. Так как $D \subseteq C_1$, то ввиду градуированности решетки $SubC_1$ через D проходит некоторый максимальный ряд (2.3.4) m-алгебры C_1, скажем, пусть $D = D_j$ для некоторого $j\in\{1,\ldots, m-1\}$. Далее, так как $C_1\in SubA\cap\mathcal{M}aA$, то $D\in\Im(H)$ и $C_1 + H = A$. Теперь по второй теореме о гомоморфизмах $B_1 = A/C_1 = C_1 \approx H/(H\cap C_1) = H/D$. Следовательно, $D \prec H$. Поэтому получим максимальный ряд

$$0 = D_1 \prec \ldots \prec D_j = D \prec H, \tag{2.3.5}$$

соединяющий 0 и H.

Следующим шагом докажем, что решетка $SubA$ коатомна, т. е. $\downarrow \mathcal{M}aA = SubA \setminus \{A\}$. Действительно, пусть $H \in (SubA) \setminus \{A\}$. Если $H \subseteq C_1$, то $H \in \downarrow \mathcal{M}aA$. Пусть теперь H не содержится ни в какой максимальной под-m-алгебре m-алгебры A. Тогда существует в решетке $SubA$ бесконечно возрастающая цепь $H_0 < H_1 < \dots < H_l < H_{l+1} < \dots$, где для каждого $l \in \mathbb{N}$ $H_l \nsubseteq C_1$ и $H_l \neq A$. Отсюда по доказанному выше следует, что $H_l \cap C_1 \prec H_l$. Ввиду $H \subseteq H_l$ имеем $H \cap C_1 \subseteq H_l \cap C_1$. При этом $H \cap C_1 \neq H_l \cap C_1$, иначе согласно (3.3.5) $H_l \cap C_1 \prec H < H_l$ в противоречие с тем, что $H_l \cap C_1 \prec H_l$. Теперь ввиду градуированности решетки $SubC_1$ существует максимальная цепь, соединяющая $H \cap C_1$ и $H_l \cap C_1$. Точно так же устанавливается, что существует максимальная цепь, соединяющая $H_l \cap C_1$ и $H_{l+1} \cap C_1$, и т. д. В результате получим существование в $SubC_1$ элемента сколь угодно большой высоты, что противоречит градуированности этой решетки. Противоречие показывает, что решетка $SubA$ коатомна.

Теперь требуется доказать, что длины всех максимальных цепей, соединяющих 0 и H, ограничены сверху. Если $H \subseteq C_1$, то это следует из градуированности решетки $SubC_1$. Пусть теперь $A \neq H \nsubseteq C_1$ и предположим, что существует максимальный ряд

$$0 = H_0 \prec H_1 \prec \dots \prec H_{l-1} \prec H_l = H \tag{2.3.6}$$

такой, что

$$l > l(H \cap C_1) + 1. \tag{2.3.7}$$

Рассмотрим под-m-алгебры $G_i = H_i \cap C_1$ для $i \in \{0, 1, \dots, l\}$. Ясно, что $G_i \subseteq \subseteq G_{i+1}$ для каждого $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$. Покажем, что $G_i \neq G_{i+1}$ для всех таких i, кроме одного. Действительно, из того, что $H \nsubseteq C_1$, следует, что для некоторого $j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ $H_j \subseteq C_1$ и $H_{j+1} \nsubseteq C_1$ Как и выше для H доказывается, что $G_{j+1} = H_{j+1} \cap C_1 \prec H_{j+1}$. В то же время, так как $H_j \subseteq \subseteq C_1$ и $H_j \subseteq H_{j+1}$, то $H_j \subseteq G_{j+1}$ и ввиду $H_j \prec H_{j+1}$ должно быть $G_j = = H_j \cap C_1 = H_j = G_{j+1}$. Если теперь $i < j$, то $G_i = H_i \cap C_1 = H_i \neq H_{i+1} = = H_{i+1} \cap C_1 = G_{i+1}$. Если же $j < i$ и $G_i = G_{i+1}$, то $G_{i+1} \prec H_i \prec H_{i+1}$, в противоречие с тем, что $G_{i+1} \prec H_{i+1}$. Мы приходим к тому, что цепь $0 = G_0 \subseteq \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_l = H \cap C_1$ может быть короче цепи (3.3.6) не более, чем на 1, что противоречит (2.3.7). Итак, длины всех максимальных цепей, соединяющих 0 и H, не превосходят $l(C_1)$. Это верно и для всякой максимальной под-m-алгебры H. Ввиду доказанной выше коатомности решетки

$SubA$ заключаем, что длины всех максимальных цепей, соединяющих 0 и A ограничены сверху, поэтому можно говорить о высоте $l(A)$ m-алгебры A как высоте элемента A решетки $SubA$.

Осталось показать, что если $B < C \leq A$, то существует максимальная цепь, проходящая через B и C. Будем доказывать по индукции по высоте $l(A)$ полупростой и конечно копорожденной m-алгебры A. При $l(A) = 1$ $B = 0 -\!\!< C = A$ – максимальная цепь, соединяющая B и C. Пусть далее $l(A) > 1$. Если $C = A$, то уже было раньше доказано, что существует максимальная цепь, соединяющая 0 и A, проходящая через B. Если $C \neq A$, то существует максимальная под-m-алгебра $H \in \mathcal{M}aA$, содержащая C, и так как $l(H) < l(A)$, то по предположению индукции существует максимальная цепь в H, скажем, (2.1.9), проходящая через B и C. Тогда $0 = H_0 -\!\!< H_1 -\!\!< \ldots -\!\!< H_{l-1} -\!\!< H_l = H -\!\!< A$ – максимальная цепь в A, проходящая через B и C. Итак, доказано, что $SubA$ – градуированная решетка.

Н е о б х о д и м о с т ь. Если $SubA$ – градуированная решетка, то, очевидно, что m-алгебра A артинова и согласно теореме 2.1.1 она конечно копорождена. Теорема доказана.◊

С л е д с т в и е 1. Если m-алгебра A полупроста и конечно копорождена, то она артинова, нетерова и коатомная.◊

Отметим, что в случае гамильтоновости m-алгебры A в предыдущих рассуждениях знак “$-\!\!<$” можно заменить на “$\prec$”, и мы приходим к следующему утверждению.

С л е д с т в и е 2. m-алгебра A строго приводима и конечно порождена в том и только в том случае, когда она гамильтонова, полупроста и имеет градуированную решетку под-m-алгебр.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть m-алгебра A строго приводима и конечно порождена. Тогда согласно теореме 3.1.1 A является полупростой, гамильтоновой и артиновой, последнее по теореме 2.1.1 влечет ее конечную копорожденность. Теперь согласно теореме 1 решетка $SubA$ оказывается градуированной.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть m-алгебра A гамильтонова, полупроста и имеет градуированную решетку $SubA$. Тогда по теореме 1 она конечно копорождена. Согласно следствию 1 из полупростоты и конечной копорожденности следует, что m-алгебра A артинова. Теперь из полупростоты, артиновости и гамильтоновости согласно утверждению (б) теоремы 2.1.1 следует строгая приводимость и конечная порожденность m-алгебры A.◊

2.4. 0-нильпотентность радикала Джекобсона

По аналогии с теориями колец и почтиколец элемент $x \in$K называется *ниль-элементом* или *нильпотентом*, если $x^{[n]} = \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ раз}} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Идеал $I \in \mathfrak{I}(\text{К})$ называем *ниль-идеалом*, если он состоит из ниль-элементов, и будем называть 0-*нильпотентным*, если для какого-то $n \in \mathbb{N}$ $I^{[n]} = 0$. Соответственно m-кольцо К называем *ниль-m-кольцом* (0-*нильпотентным m-кольцом*) если таковым является идеал К. При этом если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\text{К}^{[n+1]} = \underbrace{\text{К} \circ \text{К} \circ \ldots \circ \text{К}}_{n+1 \text{ раз}} = 0$ и $\text{К}^{[n]} \neq$ -0, то это m-кольцо считается 0-*нильпотентным индекса* $n + 1$.

Теорема 1. Пусть естественный К-модуль $_{\text{К}}\text{К}$ m-кольца К артинов и гамильтонов. Тогда идеал RadК m-кольца К 0-нильпотентен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $R = Rad$К и $A = {}_{\text{К}}\text{К}$. Согласно теореме 4.6.1 гл II $R = radA$. Для $n \in \mathbb{N}$
положим

$$R^{<n>} = {}_{\text{К}}{<}R^{[n]}{>}. \tag{2.4.1}$$

Ясно, что $R^{[n+1]} \subseteq R^{[n]}$ и поэтому $R^{<n+1>} \subseteq R^{<n>}$. Таким образом, мы имеем убывающую цепь подмодулей $R = R^{<1>} \supseteq R^{<2>} \ldots \supseteq R^{<n>} \supseteq R^{<n+1>} \supseteq \ldots$,
и в силу артиновости К-модуля A эта цепь должна стабилизироваться (теорема 2.1.1), т. е. для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$R^{<n>} = R^{<n+1>} = \ldots \tag{2.4.2}$$

Если $R^{[n]} = 0$, то все доказано, так что далее предполагаем, что

$$R^{[n]} \neq 0. \tag{2.4.3}$$

Положим

$$\Gamma = \{ B \leq R \mid {}_{\text{К}}{<}R^{[n]} \circ B{>} \neq 0 \}. \tag{2.4.4}$$

Ввиду (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.3) $R \in \Gamma \neq \varnothing$. Благодаря артиновости К-модуля A в Γ должен существовать минимальный элемент, скажем, B_0. Мы имеем тогда $< R^{[n]} \circ B_0 > \neq 0$, и, следовательно, для некоторого $a_0 \in B_0$

$$_{\text{К}} < R^{[n]} \circ a_0 > \neq 0 \tag{2.4.5}$$

и $< R^{[n]} \circ a_0 > \neq 0$, поэтому согласно (2.4.4) $< a_0 > \in \Gamma$, и ввиду минимальности B_0 приходим к равенству

$$B_0 = {}_{\text{К}}{<}\, a_0 {>}. \tag{2.4.6}$$

Следующим шагом будет доказательство равенства

$$_{\text{К}} < R^{[n+1]} \circ a_0 > = {}_{\text{К}} < R^{[n]} \circ a_0 >. \tag{2.4.7}$$

В самом деле из $R^{[n+1]} \subseteq R^{[n]}$ сразу следует, что ${}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n+1]}{\circ}a_0{>} \subseteq {}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n]}{\circ}a_0{>}$. Для доказательства обратного включения предположим, что $a_1, a_2,\ldots, a_n \in R$. Тогда согласно (3.4.1) и (3.4.2) $a_1{\circ}a_2{\circ}\ldots{\circ}a_n \in R^{[n]} \subseteq R^{<n>} = R^{<n+1>}$. Из этого следует, что существует такой терм $u(t_1, t_2,\ldots, t_k)$, $k\in\mathbb{N}$, из свободного К-модуля $F_{\mathrm{K}}(X)$, где $X = \{t_1, t_2,\ldots, t_k\}$, и элементы $b_{1,1}, b_{2,1},\ldots, b_{n+1,1}, \ldots, b_{1,k}, b_{2,k},\ldots, b_{n+1,k} \in R$ такие, что $a_1{\circ}a_2{\circ}\ldots{\circ}a_n = u(b_{1,1}{\circ}b_{2,1},\ldots {\circ}b_{n+1,1}, \ldots, b_{1,k}{\circ}b_{2,k}{\circ}\ldots {\circ}b_{n+1})$. Ввиду того, что преобразование $\psi_{a_0} : c \mapsto c{\circ}a_0$ является эндоморфизмом К-модуля ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{K}$, отсюда получаем, что

$$u(b_{1,1}{\circ}b_{2,1}{\circ}\ldots {\circ}b_{n+1,1}{\circ}a_0,\ldots\ldots, b_{1,k}{\circ}b_{2,k}{\circ}\ldots,{\circ}b_{n+1}{\circ}a_0) \in {}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n+1]}{\circ}a_0{>}.$$

$$a_1{\circ}a_2{\circ}\ldots{\circ}a_n{\circ}a_0 = \psi_{a_0}(a_1{\circ}a_2{\circ}\ldots{\circ}a_n) =$$

$$= \psi_{a_0}(u(b_{1,1}{\circ}b_{2,1}{\circ}\ldots {\circ}b_{n+1,1}, \ldots, b_{1,k}{\circ}b_{2,k},{\circ}\ldots {\circ}b_{n+1}) =$$

$$= u(\psi_{a_0}(b_{1,1}{\circ}b_{2,1}{\circ}\ldots {\circ}b_{n+1,1}),\ldots, \psi_{a_0}(b_{1,k}{\circ}b_{2,k}{\circ}\ldots,{\circ}b_{n+1})) \in {}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n+1]}{\circ}a_0{>}$$

Следовательно, равенство (2.4.7) доказано.

Далее из инвариантности справа идеала $R = Rad\mathrm{K}$ следует включение $R{\circ}a_0 \subseteq R$, а так как ψ_{a_0} − эндоморфизм К-модуля A, то $R{\circ}a_0 = \psi_{a_0}(R) \leq$ $\leq R$. Теперь согласно (3.4.7) и (3.4.5) имеем ${}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n]}{\circ}R{\circ}a_0{>} =$ $= {}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n+1]}{\circ}a_0{>} = {}_{\mathrm{K}}{<}R^{[n]}{\circ}a_0{>} \neq 0$. Отсюда и согласно (2.4.4) $R{\circ}a_0 \in \Gamma$. Используя теперь инвариантность слева подмодуля B_0, то, что $a_0 \in B_0$, получаем включение $R{\circ}a_0 \subseteq B_0$. Это приводит к равенству

$$R{\circ}a_0 = B_0 \tag{2.4.8}$$

ввиду минимальности B_0. Пользуясь этим и равенством (2.4.6), выводим

$$B_0 = R{\circ}a_0 \subseteq R{\circ}\,{}_{\mathrm{K}}{<}a_0{>} = R{\circ}B_0 = R{\circ}R{\circ}a_0 \subseteq R{\circ}a_0 = B_0.$$

Следовательно,

$$B_0 = R{\circ}B_0 = {}_{\mathrm{K}}{<}R{\circ}B_0{>}. \tag{2.4.9}$$

Снова используя (2.4.8) и устойчивость подмодуля B_0, получаем $B_0 =$ $= R{\circ}a_0 \subseteq \mathrm{K}\Box a_0 \subseteq \mathrm{K}\Box B_0 \subseteq B_0$, откуда вытекает, что $B_0 = \mathrm{K}\Box a_0$, и B_0 − конечно-порожденный К-модуль, поэтому согласно лемме 1.3.1 гл. II и благодаря гамильтоновости A решетка $StB_0 = SuB_0$ коатомна. Из этого согласно предложению 4.2.2 гл. II, формулам (2.4.6) и (2.4.7) вытекает, что

$$radB_0 = i\text{-}radB_0 \subsetneq B_0. \tag{2.4.10}$$

С другой стороны, благодаря лемме 4.6.1 гл. II, теореме 4.6.1 гл. II, гамильтоновости A и соотношению (2.4.9), имеем

$$B_0 = {}_{\text{К}}< R\circ B_0 > = {}_{\text{К}}<< R\circ B_0 >> = {}_{\text{К}}<< Rad\text{К} \,\square\, B_0 >> = {}_{\text{К}}<< (rad_{\text{К}}\text{К}) \,\square\, B_0 >> \subseteq$$

$$\subseteq radB_0 = i\text{-}radB_0 \subseteq B_0.$$

Отсюда следует, что $i\text{-}radB_0 = B_0$, что противоречит (2.4.10) ввиду того, что $B_0 \neq 0$. Остается возможность $R^{[n]} = 0$, так что RadК − 0-нильпотентный идеал.◊

Возвращаясь к теме леммы 4.6.1 гл. II, рассмотрим пример, который показывает, что не имеет смысла рассматривать для m-колец аналог “хороших” колец в смысле [17] § 9, иначе говоря, нет таких m-колец К, что для любого К-модуля A знак включения в (4.6.1) гл. II можно заменить на знак равенства.

Пример 1. Пусть К − произвольное m-кольцо и пусть A является чистым К-модулем, причем кольцо $(A, +, \cdot)$ – с нулевым умножением и с аддитивной группой $(A, +) = (\mathbb{Z}(2^{\infty}), +)$ – квазициклической группой. Здесь $\mathcal{M}aA = \varnothing$, поэтому $radA = A \supset \{0\} = <<(rad_{\text{К}}\text{К}) \,\square\, A >>$.◊

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андрунакиевич В. А.*, *Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. 496 с.

2. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. 284 с.

3. *Артамонов В. А.* Представление Магнуса в конгруэнц-модулярных многообразиях // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 39, № 5. С. 978−995.

4. *Артамонов В. А.*, *Салий В. Н.*, *Скорняков Л. А* и др. Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991. 480 с.

5. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Мир, 1984. 566 с.

6. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966. 556 с.

7. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Сборник статей. Вып. 1. Изд-во Саратовского ун-та : 1965. С. 3–178.

8. *Ван дер Варден Б.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.

9. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1972. 176 с.

10. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. 344 с.

11. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

12. *Ершова С. Г.* О гамильтоновых полугруппах // Мат. записки Ур. ГУ, 1974. Т. 9, тетрадь I. С. 22–29.

13. *Зарисский О.*, *Самюэль П.* Коммутативная алгебра. Т. 1. М.: Ин. лит., 1963. 373 с.

14. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. 448 с.

15. *Кальюлайд У. Э.* Полугрупповые дуо-кольца // XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Ч. II. Изд-во БГУ, Минск, 1983. С.92–93.

16. *Каргаполов М. И.*, *Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 240 с.

17. *Каш Ф.* Модули и кольца. М.: Мир, 1982. 368 с.

18. *Клиффорд А.*, *Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972. 285 с.

19. *Кон Г.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 351 с.

20. *Кривенко В. М.* Строение ретрактных полугрупп //Ассоциативные действия. Межвузовский сборник научных трудов, 1983. Ленинград: Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1983. С. 57–64.

21. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

22. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.

23. *Кэртис Ч.*, *Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.

24. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.

25. *Ляпин Е. С.* Полугруппы. М.: Физматгиз, 1960. 592 с.

26. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем // Мат. сб., 1954. Т. 35(77), № 1. С 3−20.

27. *Мельников О. В.*, *Ремесленников В. Н.*, *Романьков В. А* и др. Общая алгебра. Т. 1. М.: Наука, 1990. 592 с.

28. *Пинус А. Г.* Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр. Иркутск : Изд-во Иркутского ун-та, 1986. 131 с.

29. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966. 604 с.

30. *Салий В. Н.* Решетки с единственными дополнениями. М.: Наука, 1984. 128 с.

31. *Сас Ф.* О кольцах, каждое подкольцо которых является прямым слагаемым кольца // Мат. сб., 1956. Т. 40(82), № 2. С 269−272.

32. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977. 319 с.

33. *Смирнов Д. М.* Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1992. 205 с.

34. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972. 352 с.

35. *Цаленко М. Ш.*, *Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категорий. М.: Наука, 1974. 256 с.

36. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977. 688 с.

37. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.

38. *Шеврин Л. Н.*, *Просвиров А. С.* Полугруппы с изотонной идеализаторной функцией // Тр. Моск. матем. об-ва, 1983. Т. 29, С 235−246.

39. *Ширяев В. М.* Кольца с дополнительной операцией суперпозиции. Минск : Изд-во БГУ, 2004. 276 с.

40. *Ширяев В. М.* Некоторые свойства категории модулей над мультиоператорным почтикольцом // IX Белорусская математическая конференция. Тез. докл. Ч. I. Изд-во ГрГУ, Гродно, 2004. С.55–56.

41. *Banaschewski B.*, *Nelson E.* On the non-existense of injective near-ring modules // Canad. Math. Bull. 1977. Vol. 20. № 1. P. 17−23.

42. *Beidleman J. C.* A radical for near-ring modules // Michigan Math. J., 1965. Vol. 12. P. 377–383.

43. *Beidleman J. C.* On the Theory of Radicals of Distributively Generated Near-Ring // Math. Annalen., 1967. Vol. 173. P. 89–101.

44. *Bell H. E.* Duo rings : some applications to commutativity theorems // Canad. Math. Bull. 1968. Vol. 11. № 3. P. 375−380.

45. *Betsch G.* Struktursätze für Fastringe. Doctoral-Dissertation.Eberhard-Karls. Universitat zu Tübingen. 1963.

46. *Burris H.*, *Sankappanavar H. P.* A Course in Universal Algebra. New-York; Berlin: Springer, 1981. 276 p.

47. *Clay J. R.* «Near-rings: Geneses and Applications». Oxford: University Press, 1992. 134 p.

48. *Feller E.* Properties of primary non commutative rings // Proc. Amer. Math. Soc., 1958. Vol. 89, № 1. P. 79–81.

49. *Freese R.*, *Mc Kenzie R.* Commutator theory for congruence modular variety. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, iv + 227 p.

50. *Gorenstein D.* Finite groups. Harper and Row Publisher, 1968. 527 p.

51. *Gratzer G.* Universal algebra. Springer Verlag, 2-nd edition. 1979.

52. *Gumm H. P.* Algebras in congruence permutable varieties: Geometrical properties in affine algebras // Alg. Univers. 1979. Vol. 9, № 1. P. 8−34.

53. *Hageman G.*, *Herrman G.* A concrete ideal multiplication for algebraic systems and its relations to congruence distributivity // Arch. Math. 1979. Vol. 32. № 2. P. 234−245.

54. *Higgins P. J.* Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6, № 3. P. 366−416.

55. *Jonsson B.* On the representation on lattices // Math. Scand., 1953. Vol. 1, P. 193–206.

56. *Klikovits L.* Hamiltonian varieties of universal algebras // Acta Sci. Math. 1975. Vol. 37, № 1–2.

57. *Lajos S.* On regular rings and semigroups. Preprint. Karl Marx University, Budapest, 1974. 24 p.

58. *Laxton R. R.* A radical and its theory for distributively generating near-rings // J. London Math. Soc. 1963. Vol. 38, № 1. P. 40−48.

59. *Maeda F* . Lattice theoretical characterization of abstract geometries // J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 1951. Vol. 15. P. 87–96.

60. *Malone J. J.* Near-rings with trivial multiplication // Amer. Math. Monthly, 1967. Vol. 74. P. 1111–1112.

61. *Manal P.* Group rings, in which every left ideal is a right ideal // Proc. Amer. Math. Soc., 1979. Vol. 76, № 2. P. 204–208.

62. *Mason G.* Injective and proective near-ring modules // Compositio Math., 1976. Vol. 33, № 1. P. 43–54.

63. *Mlitz R.* Radicals and semisimple classes of Ω -groups // Proc. Edinburg Math. Soc., 1980. Vol. 23. P. 37–41.

64. *Ore O.* Theory of equivalence relations // Duke Math. J. , 1942. Vol. 9. P. 573–627.

65. *Oswald A.* A note on injective modules over a d.g. near-ring // Canad. Math. Bull. 1978.

66. *Parmenter M. M., Stewart P. N., Wiegandt R.* On the Groenwald-Heyman strongly prime radical // Quaest. Math. 1984. Vol 7 . P. 225–240.

67. *Pilz G.* Near-rings. Amsterdam : North-Holland, 1983, xv + 470 p.

68. *Ramakataiah D.* Radicals of Near-rings // Math. Zeit., 1967. B. 97. S. 45–56.

69. *Redei L.* Vollidealringe im weiteren Sinn // Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1952. B. 3. S. 243–268.

70. *Sasaky U., Fujiwara S.* The decomposition of matroid lattices // J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 1952. Vol. 15. P. 183–188.

71. *Scott S. D.* Tame near-rings and *N*-groups // Proc. Edinburg Math. Soc., 1980. Vol. 23. P. 275–296.

72. *Scott S. D.* Central submodules of an *N*-groups // Report Series No 175. University of Auckland, Department of Math. Auckland, New Zealand, 1981. 5 p.

73. *Smith J. D. H.* Mal'cev Varieties. Lecture Notes in Math. New-York; Berlin: Springer, 1976. 158 p.

74. *Sokratova O.* Ω -rings, their flat and projective acts with some applications. Dissertationes mathematicae Universitatis Tartuensis. 24.Tartu, 2000. P. 1–109.

75. *Steinfeld O.* Quasi-ideals in rings and semigroups. Preprint. Academiai Kiado, Budapest, 1978.

76. *Werner H*. Congruences on products of algebras and functionally complete algebras // Alg. Univers., 1974. Vol. 4. P. 99–105.

77. *Wiegandt R.* On subdirectly irreducible near-rings, which are fields // Near-rings and Near-fields. (*Betsch G.*, editor) Math. Studies, 137: North-Holland, Elsenier Science Publishers, 1987. P. 295–298.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Гл. I

§ 1

1.1

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$, $\mathbb{N}_{\mathbf{2}}$, $\mathbb{Z}$ 10
C_n^m, 2^X 10
$|X|$, $FinX$ 10
$X \times Y, X \cup Y, X \cap Y$ 10
$X \sqcup Y$ 10
$f|_Z, c_y, IdX$ …10
$\rho^{-1}, \Delta_x, \rho \circ \sigma$ 10
$(PartX, \cap, \vee)$...11...
$A^*, \sum B$ 11
$(L, \leq), \downarrow a, \uparrow a, [a, b]$ 11
$\uparrow M, \downarrow M$, $a -< b$ 11
$(A, +), <X>_+$ 11
$(К, +, .), <X>_r, \ll X \gg_r$ 11
$\overline{\prod_{i \in I} A_i}$ (π_i) 11
$(К, +, \cdot, \circ)$ 11
$(К, +), (К, .), (К, \circ)$ 12
ψ_a, φ_a 12
$E(К), I(К)$ 12
$<X>, \ll X \gg$, 12
SubК, $\Im$(К), ConК 12
$\mathcal{K}$ 12
$\mathcal{K}_0$ 13
A_0^A 13
(К, A, α), $_КA$ 13
$_КA$, $(A, +)$, $(A, \ )$, $I(A)$ 13
$x\square a$ 13
$Hom_К(A, B)$, $Hom(A, B)$ 13
$A \leq B, A < B$, SuA 14
“$\cap$”, “$\vee$” 14
$_К<X>$ 14
$\vee_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ 14
$B \trianglelefteq A, B \triangleleft A$ 14
$_К\ll X \gg \sum_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ 14
StA, A/B 14
$Con\,A$, φ^{-1} 14
$(B : C), (B \div C)$ 14
К-Mod 15
$\mathcal{Z}$ 16
SubК, $\Im$(К), ConК 16
$<X>_+, \ll X \gg$ 16
$Hom(A, B)$ 16
$\mathcal{M}$, A/B 16

1.2

$(L, \wedge, \vee)$ 16
$CompL$ 17
$\mathcal{M}iL$, $\mathcal{M}aL$, 17
$a^\#$ 17
$l(a, b), l(b)$ 18
$ConL$ 18
$a \sim b$, J(L) 18
$\theta(J)$, 19
γ, PartX 19
$\overline{X}$, $(M, \overline{\ })$ 20
$L(M, \overline{\ })$ 20
$l(X)$ 21
$x < p, x \vee y$, 21
$(M, \mathcal{P})$ 22
P1, P2 22
P3 22
$x + y$, $p \wedge q$ 22
$L(M, \mathcal{P})$…22
$V(D, \mathfrak{m}), L(D, \mathfrak{m})$ 23
$\mathcal{P}(D, \mathfrak{m})$ 23
$M, \mathcal{P}$ 24
b_0, b_1, b_∞ 24

1.3

1.4

§ 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

§ 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

3.6

§ 4

4.1

4.2

4.3

§ 5

5.1

5.2

5.3

§ 6

6.1

6.2

Гл. II

§ 1

1.1

1.2

1.3

1.5

§ 2

2.1

2.2

2.3

2.4

§ 3

3.1

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

§ 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.6

Гл. III

§ 1

1.1

1.2

1.3

§ 2

2.2

2.3

2.4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное электронное издание

Ширяев Владимир Михайлович

**НУЛЬ-СИММЕТРИЧНЫЕ
МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ
ПОЧТИКОЛЬЦА**

В трех томах

Том 1

В авторской редакции

Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Н. П. Ракицкая*

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*

Электронный ресурс 2,47 Мб
Режим доступа:
Дата доступа:
Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
220030, Минск проспект Независимости, 4.