



**Корзюк В. И. Уравнения математической физики:** учеб. пособие / В. И. Корзюк. — Минск: БГУ, 2011. — 459 с. — (Классическое университетское издание).

**ISBN 978-985-518-427-1**

Рассматриваются основные уравнения математической физики и задачи для них. Излагаются методы исследования разных граничных задач для дифференциальных уравнений математической физики (большое внимание уделяется вопросу разрешимости и доказательству их корректной постановки), а также новый метод доказательства существования и единственности сильного решения граничных задач и метод характеристик отыскания классических решений смешанных задач для одномерного волнового уравнения.

Для студентов, обучающихся в вузах по математическим специальностям.

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	9
<b>Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ</b>	
1.1. Множества и элементы	15
1.2. Отображения	16
1.3. Действительные и комплексные числа	17
1.4. Линейные пространства	19
1.5. Нормированные и гильбертовы пространства	21
1.6. Конечномерное евклидово пространство $R^n$	25
1.7. Функции многих независимых переменных	26
1.8. Производные функций многих независимых переменных	28
1.9. Элементы векторного анализа	30
<b>Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ</b>	
2.1. Понятие об уравнениях с частными производными	39
2.2. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка	41
2.3. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка	45
2.4. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными	47
2.4.1. Приведение к каноническому виду гиперболических уравнений	50
2.4.2. Приведение к каноническому виду параболических уравнений	52
2.4.3. Приведение к каноническому виду эллиптических уравнений	54
2.5. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка со многими независимыми переменными	57
2.6. Понятие о характеристиках дифференциальных уравнений с частными производными	61
2.7. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	65
<b>Глава 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ЗАДАЧИ ДЛЯ НИХ</b>	
3.1. О постановке задач для дифференциальных уравнений с частными производными	73
3.2. Корректная постановка задач	75
3.3. Уравнения поперечных колебаний струны	77
3.4. Уравнение теплопроводности	79
3.5. Математические модели на основе уравнений колебания струны и теплопроводности	82
3.6. Вывод уравнения колебаний мембраны	88
3.7. Задачи для волнового уравнения, уравнений теплопроводности и Пуассона	91
3.7.1. Задачи для волнового уравнения	92
3.7.2. Задачи для уравнения теплопроводности	95
3.7.3. Задачи сопряжения разнотипных уравнений	96
3.7.4. Задачи для уравнения Пуассона	97
3.7.5. Обобщение волнового уравнения и уравнения теплопроводности	98
3.8. Уравнение неразрывности	100
3.9. Уравнения движения	102
3.10. Уравнение энергии	107
3.11. О задачах в гидродинамике и газовой динамике	110
3.12. Уравнения Максвелла (основные уравнения электродинамики)	111
3.13. Уравнение Гельмгольца	113
3.14. Другие уравнения математической физики	115
3.14.1. Уравнения равновесия балки	115
3.14.2. Уравнения и задачи колебаний пластин	116
3.14.3. Уравнение Шредингера	121

3.14.4. Солитоны и нелинейные волновые уравнения	122
3.14.5. Уравнения переноса	123
<b>Глава 4. ЗАДАЧА КОШИ</b>	
4.1. Теорема Коши - Ковалевской	131
4.1.1. Аналитические функции и формулировка теоремы Коши - Ковалевской	131
4.1.2. Сведение задачи Коши к задаче Коши для линейных систем первого порядка	134
4.1.3. Единственность решения задачи Коши	137
4.1.4. Существование решения задачи Коши	137
4.1.5. Примеры некорректно поставленных задач	141
4.2. Метод Даламбера	146
4.2.1. Формула Даламбера	146
4.2.2. Смешанная задача в четверти плоскости	148
4.3. Формула Кирхгофа	151
4.3.1. Осреднение функций по сфере	151
4.3.2. Вывод формулы Кирхгофа	153
4.3.3. Формула Пуассона для волнового уравнения	155
4.3.4. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона	157
4.3.5. Принцип Гюйгенса	157
4.4. Метод Дюамеля	159
4.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности	163
4.5.1. Принцип минимума и максимума для уравнения теплопроводности	163
4.5.2. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности	164
4.5.3. Преобразование Фурье	166
4.5.4. Пространство $L_2(\Omega)$	172
4.5.5. Операторы осреднения Соболева	174
4.5.6. Вывод формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности	178
4.5.7. Обоснование формулы Пуассона (4.5.47)	181
4.6. Решение задачи Коши для волнового уравнения с помощью преобразования Фурье	183
4.7. Сильное решение задачи Коши для гиперболического уравнения	187
4.7.1. Постановка задачи и вспомогательные неравенства	187
4.7.2. Гильбертовы пространства Соболева $H^l(\Omega)$	190
4.7.3. Энергетическое неравенство для задачи Коши (4.7.1), (4.7.3)	194
4.7.4. Понятие сильного решения	201
4.7.5. Сильное решение задачи Коши (4.7.1), (4.7.3)	203
4.7.6. Операторы осреднения с переменным шагом	206
4.7.7. Доказательство леммы 4.7.3	220
4.8. Метод Римана	229
4.8.1. Задачи для гиперболического уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных, записанного во втором каноническом виде	229
4.8.2. Метод Римана для задачи Коши	233
<b>Глава 5. ЗАДАЧА ГУРСА</b>	
5.1. Постановка задачи Гурса для гиперболического уравнения	239
5.2. Энергетическое неравенство задачи Гурса	240
5.3. Сильное решение задачи Гурса	242
5.4. Метод последовательных приближений	246
<b>Глава 6. ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ</b>	
6.1. Обобщенное решение задачи Дирихле	255
6.1.1. Определение обобщенного решения задачи Дирихле	255
6.1.2. Эквивалентность норм пространств $H^1(\Omega)$ и $H^p(\Omega)$	257
6.1.3. Теорема Ф. Рисса	261
6.1.4. Существование обобщенного решения задачи Дирихле	262
6.2. Обобщенное решение задачи Неймана	264
6.3. Граничная задача третьего рода для уравнения Пуассона	269
6.4. Задача Штурма - Лиувилля	271
6.4.1. Задача Штурма - Лиувилля с условиями Дирихле	271
6.4.2. Задача Штурма - Лиувилля с условиями Неймана	273
6.4.3. Задача Штурма - Лиувилля со смешанными граничными условиями Дирихле и Неймана	274
6.4.4. Задача Штурма - Лиувилля с граничными условиями третьего рода	276
6.4.5. Обобщение оператора Лапласа	276
<b>Глава 7. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ</b>	
7.1. Метод Фурье	283
7.1.1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямо угольнике	283
7.1.2. Задача Неймана для уравнения Пуассона в прямо угольнике	287
7.1.3. Задача со смешанными условиями для уравнения Пуассона	288
7.1.4. О граничных задачах для уравнения Пуассона в прямоугольнике с условиями третьего рода	289
7.1.5. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в параллелепипеде	291
7.2. Специальные функции	294

7.2.1. Уравнение теории специальных функций	294
7.2.2. Цилиндрические функции	296
7.2.3. Полиномы Лежандра	300
7.2.4. Присоединенные функции Лежандра	310
7.2.5. Другие специальные функции	313
7.3. Метод Фурье для канонических областей	318
7.3.1. Граничные задачи для уравнения Пуассона в круговом цилиндре	319
7.3.2. Сферические функции	325
7.3.3. Шаровые функции	330
7.3.4. Задача Штурма - Лиувилля для оператора Лапласа в шаре	334
7.4. Метод Грина	338
7.4.1. Формулы Грина	338
7.4.2. Гармонические функции и интегральное представление функций из класса $C^2(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$	340
7.4.3. Единственность задач Дирихле для уравнения Пуассона	351
7.4.4. Метод Грина для задачи Дирихле	354
7.4.5. Метод Грина для задачи Неймана	356
7.4.6. Построение функции Грина для задачи Дирихле уравнения Пуассона	358
7.4.7. Интеграл Пуассона для круга и шара	365
7.4.8. О единственности решений внутренней задачи Неймана	368
7.4.9. О единственности решений внешней задачи Неймана	370
7.5. Метод потенциалов	373
7.5.1. Потенциалы простого и двойного слоя	375
7.5.2. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям	387
7.5.3. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа	390
7.5.4. Другие применения метода потенциала	399
7.5.5. О методе граничных элементов	401
<b>Глава 8. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ</b>	
8.1. Смешанные задачи для гиперболического уравнения	405
8.1.1. Сильное решение смешанных задач для гиперболического уравнения	406
8.1.2. Метод Фурье для смешанных задач для гиперболического уравнения	409
8.1.3. Обоснование метода Фурье для классического решения первой смешанной задачи уравнения колебания струны	411
8.1.4. Метод Фурье для смешанных задач для волнового уравнения в случае шара	416
8.1.5. Метод характеристик	417
8.2. Смешанные задачи для параболических уравнений	432
8.2.1. Сильное решение смешанных задач (8.2.6)-(8.2.8)	433
8.2.2. Метод Фурье для смешанных задач параболических уравнений	447
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ</b>	451
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	452