1. *Доказать, что для любого натурального числа* n *существует такое натуральное* m, *что* $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m+1}$.

Решение. $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \Rightarrow (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2} \Rightarrow (-1)^n = a_n^2 - 2b_n^2 \Rightarrow \exists m$, такое, что числа a_n^2 и $2b_n^2$ являются последовательными натуральными числами m и $m+1$. Следовательно, $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{2b_n^2} = \sqrt{m} + \sqrt{m+1}$. ■

2. *Пусть функция* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет уравнению* $f''(x) + xe^x f'(x) + f(x) = 0$ *для любого* $x \in R$. *Можно ли утверждать, что функция* f *является ограниченной?*

Решение. Используя уравнение, получаем

$$G(x) \coloneqq (f^2(x) + (f'(x))^2)' = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = -2x\mathrm{e}^x(f'(x))^2.$$

Таким образом, $G(x) \geq 0$ для любых $x \leq 0$ и $G(x) \leq 0$ для любых $x \geq 0$. Следовательно, $x = 0$ - точка глобального максимума функции $f^2(x) + (f'(x))^2$. Поэтому $|f(x)| \leq \sqrt{f^2(x) + (f'(x))^2} \leq \sqrt{f^2(0) + (f'(0))^2}$.

Ответ: можно. ■

3. *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *есть антисимметрическая матрица* $(a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j)$. *Доказать, что* $\det(A + xE_n) \cdot \det(A + yE_n) \geq \left(\det(A + \sqrt{xy}E_n)\right)^2$ *для всех* $x, y \in [0, \infty)$.

Решение. Обозначим $P(x) = \det(A + xE_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Каждый коэффициент a_k равен сумме всех главных миноров порядка k. Так как все главные миноры неотрицательные, то $a_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $P(x)P(y) = \sum(\sqrt{a_i x^i})^2 \cdot \sum(\sqrt{a_i y^i})^2 \geq \left(\sum a_i \left(\sqrt{xy}\right)^i\right)^2 = (P(\sqrt{xy}))^2$. ■

4. *Пусть* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - *дважды дифференцируемая функция, для которой существует* $c \in \mathbb{R}$, *такое, что* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq f'(c)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. *Доказать, что* $f''(c) = 0$.

Решение. Пусть $g(x) = f(x) - xf'(c)$. Тогда

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(c) = (b-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c)\right) \neq 0, \forall a, b,\ a \neq b.$$

Следовательно, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - инъективная функция, т.е. строго монотонная $\Rightarrow g'$ сохраняет знак и $g'(c) = 0 \Rightarrow c$ - точка минимума для $g' \Rightarrow g''(c) = 0$. ■

5. *Найти все линейные функционалы* φ, *определённые на пространстве* $M_n(\mathbb{R})$ *квадратных матриц порядка* n *с вещественными коэффициентами и обладающие свойством* $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ *для любых* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Решение. Каждый линейный функционал φ полностью определяется своими значениями на стандартных матричных единицах E_{ij}. Положим $h_{ji} \coloneqq \varphi(E_{ij})$ и пусть $H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Если $A = (a_{ij})$, то $\varphi(A) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_{ji} = \mathrm{tr}(AH)$. Пусть $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ для всех $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Если $j \neq i$, то $\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ii}E_{ij}) = \varphi(E_{ij}E_{ii}) =$

$\varphi(0) = 0$. Далее, для всех j и k: $h_{jj} = \varphi(E_{jj}) = \varphi(E_{jk}E_{kj}) = \varphi(E_{kj}E_{jk}) = \varphi(E_{kk}) = h_{kk}$. Обозначая $\alpha = \varphi(E_{11})$, получаем $H = \alpha I$.

Ответ: скалярные кратные функционала tr. ■

6. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $e(n)$ – число единиц в троичном разложении n. При каких положительных вещественных числах x сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{e(n)}}{n^2}$?*

<u>Решение.</u> Число n имеет ровно $k+1$ цифр в троичном разложении тогда и только тогда, когда $3^k \le n < 3^{k+1}$. Пусть $S_k \coloneqq \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} \frac{x^{e(n)}}{n^2}$ и $T_k \coloneqq \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} x^{e(n)}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{e(n)}}{n^2}$ состоит из положительных членов, поэтому он сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ сходится. Для $3^k \le n < 3^{k+1}$ имеем $3^{2k} \le n^2 < 3^{2k+2}$, $\frac{T_k}{3^{2k+2}} < S_k \le \frac{T_k}{3^{2k}}$. Поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{3^{2k}}$ сходится. Легко видеть, что чисел n, имеющих $k+1$ троичных цифр и таких, что $e(n) = i$, будет $C_{k+1}^{i} 2^{k+1-i}$. Поэтому $T_k = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i} 2^{k+1-i} x^i = (x+2)^{k+1}$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{k+1}}{9^k} = 9 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{9}\right)^l$ сходится тогда и только тогда, когда $\left|\frac{x+2}{9}\right| < 1$, что для положительных x эквивалентно условию $0 < x < 7$.

Ответ: $\forall\, x \in (0,7)$. ■