Студенческая олимпиада БГУ по математике

22 апреля 2014 г.

1. Функция вещественного переменного f определена и дифференцируема для всех $x \geq 1$ и удовлетворяет условиям $f(1) = 1$ и $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$.

Докажите, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$, причем $\alpha < 1 + \pi/4$.

2. Дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(2013) = 2013$ и $f(2014) = 2014$. Докажите, что

а) существует такая точка $\theta \in (2013, 2014)$, что $f(\theta) = \theta f'(\theta)$;

б) существуют две различные точки $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

3. Докажите, что для возрастающей функции f, $f : [0; \pi/2] \to [0; +\infty]$, выполнено

а) $\int\limits_0^{\pi/2} (f(x) - f(\pi/4))(\sin x - \cos x)dx \geq 0$;

б) существует такое $a \in [\pi/4; \pi/2]$, что $\int\limits_0^a f(x)\sin x dx = \int\limits_0^a f(x)\cos x dx$.

4. Невырожденная матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$, такова, что $\det(A) = 1$, $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{tr}(A^{-1}) = 0$. Докажите, что $A^3 = I_3$, где I_3 – единичная 3×3 матрица.

5. В пространстве квадратично сходящихся вещественных последовательностей

$$l_2 = \{x | \sum_{k=1}^{\infty} x^2(k) < +\infty\}$$

с нормой $||x|| = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^2(k)\}^{1/2}$ рассмотрим два замкнутых шара с центром в нуле:

$$B = \{x \in l_2 | \ ||x|| \leq d\} \quad \text{и} \quad B' = \{x \in l_2 | \ ||x|| \leq d + \delta\},$$

где $0 \leq \delta < d$. Пусть A – выпуклое множество, лежащее в $B' \setminus B$.

Докажите, что для любых точек $x, y \in A$ выполняется неравенство $||x - y|| \leq \sqrt{12d\delta}$.

6. Пусть G – такая группа, что все ее элементы удовлетворяют условию $x^2 = e$, где e – единица группы G.

Докажите, что

а) G – абелева группа;

б) если G конечна и $G \neq \{e\}$, то существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $G \cong \underbrace{Z/2Z \oplus \ldots \oplus Z/2Z}_{n \text{ слагаемых}}$.