Республиканская студенческая олимпиада по математике

Минск, 6 мая 2014 г.

1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m^2 n}{3^m(n3^m+m3^n)}$.

2. Последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

3. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$(a^2+ab+b^2)\int\limits_a^b f(x)dx = 3\int\limits_a^b x^2 f(x)dx$$

при всех действительных a и b.

4. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – такие комплексные $n \times n$ матрицы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$. Докажите, что если $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| < 1$, то $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}B$.

5. На плоскости заданы точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$, не все из которых лежат на одной прямой. Для всех $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, $i \neq j$, положим δ_{ijk} равным 1, если точка P_k лежит на прямой P_iP_j, и равным 0 – в противном случае.

Докажите, что система векторов $\vec{v}_{ij} = (\delta_{ij1}, \delta_{ij2}, \ldots, \delta_{ijn})$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, порождает $\mathbb{R}^n$.

6. В начале координат трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ находится источник света.

Докажите, что существуют сколь угодно большие шары, обладающие тем свойством, что из любой целой точки внутри такого шара источник невидим, т.е. закрывается другими целыми точками.

Время работы 4,5 часа.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

Пользоваться справочной литературой и калькуляторами запрещено.