Республиканская студенческая олимпиада по математике

Минск, 6 мая 2014 г.

РЕШЕНИЯ

1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m(n3^m+m3^n)}$.

Ответ: $\frac{9}{32}$.

Решение. Обозначим сумму ряда через S, $a_n = 3^n/n$. Тогда

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_m(a_m+a_n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_n(a_m+a_n)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n(a_m+a_n)}.$$

Поэтому

$$2S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_m}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\right)^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

Последнюю сумму можно вычислить так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big|_{x=1/3}=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}dt\right)\Big|_{x=1/3}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)\Big|_{x=1/3}=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=1/3}=\frac{1}{3}\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1/3}=\frac{3}{4}.$$

2. Последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n},\ n\geqslant 1.$$

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Заметим, что

$$a_{n+1}^2=a_n^2+a_n \qquad (*)$$

при всех $n\geqslant 2$. В частности, имеем, что $a_{n+1}>a_n\geq 1$. Если бы $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ была ограничена сверху, то сходилась бы к некоторому $a\geq 1$. Переходя к пределу в $(*)$, имеем, что $a^2=a^2+a$, что очевидно неверно. Поэтому $\lim a_n=\infty$.

Первое решение. Из $(*)$ следует, что $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=1+\frac{1}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, откуда $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Тогда по теореме Штольца имеем

$$\lim\frac{a_n}{n}=\lim(a_{n+1}-a_n)=\lim\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{a_{n+1}+a_n}=\lim\frac{a_n}{a_{n+1}+a_n}=\lim\frac{1}{a_{n+1}/a_n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

.

Второе решение. Из $(*)$ имеем, что $2a_{n+1}=2\sqrt{a_n(1+a_n)}<a_n+(1+a_n)=2a_n+1$, откуда $a_{n+1}<a_n+\frac{1}{2}$. Тогда по индукции $a_n<\frac{n+1}{2}$ и $\frac{a_n}{n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$ при всех $n\geq 2$.

Далее,

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n(1+a_n)}>\frac{2}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n+1}}=\frac{2a_n(1+a_n)}{2a_n+1}=\frac{1+a_n}{1+\dfrac{1}{2a_n}}>(1+a_n)\left(1-\frac{1}{2a_n}\right)=a_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2a_n}.$$

Так как $\lim a_n=\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)$, такое, что $\dfrac{1}{2a_n}<\varepsilon$ для всех $n\geqslant N$. Тогда $a_{N+k}>k\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)$. Следовательно, $\dfrac{a_{N+k}}{N+k}>\dfrac{k}{N+k}\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)$. Если k достаточно велико, то $\dfrac{k}{N+k}>1-\varepsilon$, и тогда $\dfrac{a_{N+k}}{N+k}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n имеем неравенство $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{a_n}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\varepsilon$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{2}$.

3. Найдите все непрерывные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что

$$(a^2+ab+b^2)\int\limits_a^b f(x)dx=3\int\limits_a^b x^2f(x)dx$$

при всех действительных a и b.

Ответ: $f(t)$ – тождественно постоянная на $\mathbb{R}$ функция.

Решение. Положим $a=0$, $b=t>0$. Тогда исходное равенство перепишется в виде $t^2F(t)=3\int\limits_0^t x^2f(x)dx$, где $F(t)=\int\limits_0^t f(x)dx$. Дифференцируя, получим $2tF(t)+t^2f(t)=3t^2f(t)$, откуда $t(F(t)-tf(t))=0$, т.е. $F(t)-tf(t)=0$. Поэтому $\dfrac{d}{dt}(F(t)/t)=\dfrac{F'(t)t-F(t)}{t^2}=\dfrac{tf(t)-F(t)}{t^2}=0$.

Следовательно, функция $F(t)/t$ – постоянная для всех $t>0$, т.е. $F(t)=kt$, при некотором k и всех $t>0$. Поэтому $f(t)=k$, для всех $t>0$.

Аналогично, полагая $a=0$, $b=t<0$, получаем, что $f(t)=k_1$ для всех $t<0$ при некотором k_1.

В силу непрерывности функции f единственной функцией, удовлетворяющей исходному равенству, может являться тождественно постоянная функция. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что тождественно постоянная на $\mathbb{R}$ функция действительно удовлетворяет исходному равенству.

4. Пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ – такие комплексные $n\times n$ матрицы, что $A^2=A$ и $B^2=B$.

Докажите, что если $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|<1$, то $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}B$.

Решение. Из условия $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|<1$ следует, что $||A+B||=\left\{\sum\limits_{i,j}^{n}(a_{ij}+b_{ij}\right\}^{1/2}<1$, а тогда, как известно, матрица $E-(A+B)$ обратима.

Отсюда $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}(E-A-B)A=\mathrm{rang}(-BA)$ и $\mathrm{rang}B=\mathrm{rang}B(E-A-B)=\mathrm{rang}(-BA)$.

5. На плоскости заданы точки $P_1,P_2,\ldots,P_n$, не все из которых лежат на одной прямой. Для всех $1\leqslant i,j,k\leqslant n$, $i\neq j$, положим δ_{ijk} равным 1, если точка P_k лежит на прямой P_iP_j, и равным 0 – в противном случае.

Докажите, что система векторов $\vec{v}_{ij}=(\delta_{ij1},\delta_{ij2},\ldots,\delta_{ijn})$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, порождает $\mathbb{R}^n$.

Решение. Допустим противное. Тогда существует ненулевой вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ортогональный всем векторам $\vec{v}_{ij}$, т.е. система уравнений $\delta_{ij1}x_1+\delta_{ij2}x_2+\ldots+\delta_{ijn}x_n=0$, $1\leqslant i<j\leqslant n$,

имеем нетривиальное решение. Это означает, что в точках $P_1, P_2, \ldots, P_n$ можно расставить такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю, что сумма чисел на каждой прямой P_iP_j будет равна нулю.

Положим $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Зафиксируем произвольную точку P_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и рассмотрим все прямые P_iP_j, $j \neq i$. Пусть среди этих прямых k_i различных, причем, по условию $k_i > 1$. Тогда сумма сумм чисел на этих k_i различных прямых равна $(k_i - 1)x_i + S = 0$, так как сумма чисел на каждой прямой равна нулю, число x_i будет просуммировано k_i раз, а остальные числа – ровно по одному разу. Отсюда

$$x_i = -\frac{S}{k_i - 1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{$**$}$$

Значит, если $S = 0$, то все x_i равны нулю, что противоречит выбору $\vec{x}$. Если же $S \neq 0$, то $(**)$ влечет, что все x_i ненулевые и одного знака (того же, что и S). Но тогда сумма чисел на любой прямой P_iP_j заведомо не равна нулю. Противоречие.

6. В начале координат трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ находится источник света.

Докажите, что существуют сколь угодно большие шары, обладающие тем свойством, что из любой целой точки внутри такого шара источник невидим, т.е. закрывается другими целыми точками.

Решение. Для достаточно больших $a, b, c \in \mathbb{Z}$ точка $(a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$ не видна из начала координат, если НОД$(a, b, c) > 1$. Докажем, что существуют сколь угодно большие кубы, все целые точки которых невидимы из точки $(0; 0; 0)$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим кубическую $n \times n \times n$ матрицу, заполненную различными простыми числами p_{ijk}, $1 \leq i, j, k \leq n$. Пусть

$$P_i = \sum_{j,k=1}^{n} p_{ijk}, \quad Q_j = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ijk}, \quad R_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ijk}.$$

Рассмотрим три системы сравнения

$$\text{(I)} \begin{cases} x \equiv -1 \pmod{P_1}, \\ x \equiv -2 \pmod{P_2}, \\ \quad \cdots \qquad \ldots, \\ x \equiv -n \pmod{P_n}; \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} y \equiv -1 \pmod{Q_1}, \\ y \equiv -2 \pmod{Q_2}, \\ \quad \cdots \qquad \ldots, \\ y \equiv -n \pmod{Q_n}; \end{cases} \quad \text{(III)} \begin{cases} z \equiv -1 \pmod{R_1}, \\ z \equiv -2 \pmod{R_2}, \\ \quad \cdots \qquad \ldots, \\ z \equiv -n \pmod{R_n}. \end{cases}$$

Модули P_i попарно взаимно просты, также как и модули Q_j и R_k. По китайской теореме об остатках система (I) имеет единственное решение $a \pmod{P_1P_2 \ldots P_n}$, система (II) – решение $b \pmod{Q_1Q_2 \ldots Q_n}$, система (III) – решение $c \pmod{R_1R_2 \ldots R_n}$. Но $P_1P_2 \ldots P_n = Q_1Q_2 \ldots Q_n = R_1R_2 \ldots R_n = \Pi p_{ijk}$. Отсюда, для любых $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем

$$a + i \equiv 0 \pmod{P_i}, \quad b + j \equiv 0 \pmod{Q_j}, \quad c + k \equiv 0 \pmod{R_k}.$$

Числа P_i, Q_j, R_k не являются взаимно простыми, так как $p_{ijk} | P_i, Q_j, R_k$.

На отрезке $[(0; 0; 0), (a + i; b + j; c + k)]$ лежит целая точка $\left(\dfrac{a+i}{p_{ijk}}; \dfrac{b+j}{p_{ijk}}; \dfrac{c+k}{p_{ijk}}\right)$.