Белорусская республиканская студенческая олимпиада по математике.
Группа А
12 мая 2016 г.

1. Целые числа a_n, b_n, где $n \in \mathbb{N}$, определяются соотношением $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

2. Случайная точка (α, β) равномерно распределена в единичном квадрате $\{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$. Найдите вероятность того, что многочлен

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{3}t^3 - \alpha^2 t + \beta$$

имеет три различных действительных корня.

Указание. Вероятность равна отношению площади фигуры, которую образуют точки (α, β) с указанным свойством, к площади единичного квадрата.

3. Пусть f, g — непрерывные функции вещественной переменной с периодом 1. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right)$$

4. Пусть для вещественных матриц A, B размером 2×2 выполняется неравенство $\det(AB + BA) \le 0$. Докажите, что тогда $\det(A^2 + B^2) \ge 0$.

5. Рассмотрим два n-мерных пространства X, Y с базисами $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ соотвественно и заданными на X, Y нормами

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_X = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \qquad \left\| \sum_{j=1}^n y_j e'_j \right\|_Y = \max_{1\le j\le n} |y_j|.$$

При каких значениях размерности $n \in \mathbb{N}$ пространства X, Y изометричны, т.е. существует такое линейное взаимно-однозначное отображение $\varphi : X \to Y$, что для любых $u, v \in X$ выполняется равенство

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_Y = \|u - v\|_X?$$

6. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_n \ne 0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Известно, что существует такое целое m, что

$$\left|\frac{a_m}{a_n}\right| > C_n^m.$$

Докажите, что P имеет по крайней мере один корень с абсолютным значением меньше 1.

Решения

1. Заметим, что $(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Поэтому

$$a_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n), \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}((1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n),$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n} \to \sqrt{3},$$

поскольку $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right| < 1$.

Ответ. $\sqrt{3}$.

2. Необходимым и достаточным условием того, что $f = f_{\alpha,\beta}$ обладает тремя различными вещественными корнями, является наличие у его производной $f'_{\alpha,\beta}$ двух вещественных корней $t_1 \neq t_2$ и выполнение условия $f(t_1)f(t_2) < 0$. Имеем,

$$f'(t) = t^2 - \alpha^2 = 0 \implies t_{1,2} = \pm\alpha,$$

$$f(\alpha)f(-\alpha) = \left(\frac{1}{3}\alpha^3 - \alpha^3 + \beta\right)\left(-\frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^3 + \beta\right) = \beta^2 - \frac{4}{9}\alpha^6.$$

Получаем, что $f(\alpha)f(-\alpha) < 0$ тогда и только тогда, когда $\beta < \frac{2}{3}\alpha^3$. Площадь соответствующей фигуры внутри единичного квадрата равна

$$\int_0^1 \frac{2}{3}\alpha^3 d\alpha = \frac{1}{6}.$$

Ответ. 1/6.

3. Так как f равномерно непрерывна, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n \in \mathbb{N}$, для которого

$$|x-y| < \frac{1}{n} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{m/n}^{(m+1)/n} f(x)g(nx)dx = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{m/n}^{(m+1)/n} f\left(\frac{m}{n}\right)g(nx)dx +$$
$$+ \sum_{m=0}^{n-1} \int_{m/n}^{(m+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right)g(nx)dx.$$

Первое слагаемое представляет собой интегральную сумму и сходится к $\int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$. Для второго имеем оценку

$$\left|\int_{m/n}^{(m+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right)g(nx)dx\right| \leq \int_{m/n}^{(m+1)/n} \left|f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right| g(nx)dx \leq \frac{\varepsilon}{n}\int_0^1 \left|g(x)\right| dx.$$

В силу произвольности ε второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым.

4. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \det\big(A^2+B^2+t(AB+BA)\big)$. Это многочлен от t степени не выше второй, причем коэффициент при t^2 равен $\det(AB+BA) \le 0$. Возникает два случая:

1) $\det(AB+BA) = 0$. Тогда f — линейная функция.

$$f(-1) = \det\big(A^2+B^2-AB-BA\big) = \det\big((A-B)^2\big) = \big[\det(A-B)\big]^2 \ge 0.$$

$$f(1) = \det\big(A^2+B^2+AB+BA\big) = \det\big((A+B)^2\big) = \big[\det(A+B)\big]^2 \ge 0.$$

Отсюда следует, что $f(0) \ge 0$, т.е. $\det(A^2+B^2) \ge 0$.

2) $\det(AB+BA) < 0$. Тогда $f(t)$ является вогнутой функцией. В силу этого из неравенств $f(\pm 1) \ge 0$ следует, что $f(0) = \det(A^2+B^2) \ge 0$.

5. Только при $n = 1, 2$. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n = 2$. Рассмотрим отображение $\varphi : X \to Y$, $\varphi(x) = y$, заданное по правилу $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$. Тогда φ — линейный изоморфизм и

$$\|\varphi(x)\|_Y = \max\{|x_1+x_2|, |x_1-x_2|\} = |x_1| + |x_2| = \|x\|_X,$$

т.е. φ — изометрия. При $n \ge 3$ пространства X и Y не изометричны: изометрия должна переводить друг в друга единичные замкнутые шары этих пространств. Последние являются выпуклыми многогранниками. Тогда эти многогранники должны иметь одинаковое число гиперграней. Грани единичного шара в X задаются уравнениями $\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_n = 1$. Их число равно 2^n. В единичном шаре из Y грани задаются уравнениями $x_i = \pm 1$. Их число равно $2n$. Равенство $2^n = 2n$ верно лишь при $n = 1, 2$.

6. Обозначим $x_1, x_2, \ldots x_n$ — корни многочлена. В силу теоремы Виета

$$\frac{a_m}{a_0} = (-1)^m \sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, \quad \frac{a_n}{a_0} = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Отсюда

$$\left|\frac{a_m}{a_n}\right| = \left|\sum \frac{1}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-m}}}\right| > C_n^m.$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\sum \frac{1}{|x_{i_1}| \cdot |x_{i_2}| \ldots |x_{i_{n-m}}|} > C_n^m.$$

Обозначив $x_0 = \min\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|\}$, получим

$$C_n^{n-m} \frac{1}{x_0^{n-m}} > C_n^m,$$

т.е. $x_0 < 1$.