Условия задач первого тура для учащихся 11 классов (старшая группа)

1. Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi\sqrt{x}) = \operatorname{tg}(\pi\sqrt{x+90})$.
2. Найдите все значения параметра a, при которых существует единственная пара чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению $2ax^3 - a^4x^6 = y^2 - 2\sqrt{a}\,y + 2$.
3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AE и BD продолжены до пересечения с описанной вокруг треугольника окружностью в точках E_1 и D_1 соответственно. Известно, что $BH = HD$, $AH = HE_1$, где H – точка пересечения высот.. Определите углы треугольника ABC.
4. Из пункта A вверх по наклонному желобу толкнули шарик, причем он двигался равнозамедленно и его начальная скорость и ускорение были таковы, что за первую секунду он прокатился 30 см, а за каждую следующую – на 2 см меньше, чем за предыдущую. Через 10 секунд после начала движения шарика ему навстречу из пункта B пустили тележку. Ее движение равноускоренно и таково, что в первую секунду она проехала 2 см, а за каждую следующую – на 3 см больше, чем за предыдущую. Сколько сантиметров до встречи с шариком прокатилась тележка, если расстояние между пунктами A и B равно 334 см?
5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина ребра основания равна a, а длина бокового ребра – $a\sqrt{2}$. Через вершины A и B_1 проведана плоскость, пересекающая боковое ребро CC_1 в точке P так, что в сечении получился прямоугольный треугольник ($\angle APB_1 = 90°$). Найдите величину двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.
6. Лиса Алиса и кот Базилио нашли на Поле Чудес клад: несколько одинаковых монеток, лежащих в красивой и явно дорогой шкатулке. Каждый из них захотел забрать шкатулку себе. К сожалению, друзья не знают, сколько стоит шкатулка, и не могут поделить добычу поровну. Поэтому они решили делить деньги из шкатулки по следующему правилу. Вначале все деньги высыпаются на стол. Затем каждый из кладоискателей по очереди (первой начинает Алиса) подходит к столу и забирает себе не более половины оставшихся на столе денег. Тот, кому досталась последняя монетка, забирает ее себе в качестве утешительного приза, поскольку сопернику достается шкатулка. Определите, кому достанется шкатулка при оптимальном поведении каждого из игроков, если вначале в ней было N монет ($N > 1$).

Условия задач первого тура для учащихся 9-10 классов (младшая группа)

1. Пусть α положительный корень уравнения $3x^2 - x - 1 = 0$. Вычислите значение выражения
$$\sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 - 5\alpha + 2} - \sqrt{\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 3}.$$
2. В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и BD пересекаются в точке H. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{AH \cdot AM + BH \cdot BD}{AB^2}$?
3. См. задачу 3 из варианта для старшей группы.
4. См. задачу 4 из варианта для старшей группы.
5. Хозяйство дяди Федора, кота Матроскина и Шарика выросло настолько, что каждый из них построил в общем дворе свой дом. Дома стоят без порядка и без номеров, поэтому почтальон Печкин все время путается, в какой дом какую корреспонденцию приносить. Друзья решили навесить на свои дома номера, но, учитывая дальнейший рост хозяйства, заказали девять табличек с номерами от 1 до 9.

   а) Сколько существует способов пронумеровать дома, используя заказанные таблички (поскольку дома стоят беспорядочно, то и использовать можно любые из табличек и развешивать их можно в любом порядке)?

   б) На Новый Год дядя Федор, кот Матроскин и Шарик, желая, чтобы почтальон Печкин навещал их почаще, решили повесить на дома все девять табличек, причем так, что на некоторых домах могло быть несколько табличек (хоть все девять на одном), а на некоторых – вообще ни одной. Сколько способов развесить девять табличек существует в этом случае?
6. См. задачу 6 из варианта для старшей группы.